УДК 519.2

И. Н. МЕЛЬНИКОВА, А. А. ШУЛЮК
Брест, БрГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ

В данной работе речь будет идти об одной математической модели, которая обязана своим происхождением хорошо известному физическому процессу броуновского движения, совершаемого взвешенной в жидкости частицей под воздействием хаотических столкновений с молекулами. Мы рассматривали это движение на плоскости, обозначив через $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ координаты броуновской частицы с учетом времени *t*, и считали, что в начальный момент $t=0$ она находится в начале координат. Предположим, что величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ имеют совместную плотность вероятности, которая обладает центральной симметрией относительно точки 0. Предположим еще, что смещение броуновской частицы в ортогональных направлениях OX_1 и OX_2 происходит независимо и в итоге при каждом t координат $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ есть независимые случайные величины. Тогда, как мы знаем, каждая из этих величин имеет нормальную плотность вероятности вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)}\right), \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь одну из координат, условившись говорить о броуновском движении на прямой. С самого начала следовало бы сказать об однородности процесса броуновского движения, которую мы выразим в следующей форме: смещение частицы в промежутке времени от s до $s+t$, равное $\xi(s+t)-\xi(s)$, имеет то же распределение вероятностей, что и смещение $\xi(t)-\xi(0)$ за то же время t при начальном $s = 0$ (считаем $\xi(0)=0$). Учитывая, что конечный промежуток времени частицы практически испытывает бесконечно большое число независимых друг от друга соударений с молекулами, будем предполагать, что смещение частицы на различных непересекающихся интервалах $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ представляется независимыми величинами $\xi(t_1),\xi(t_2)-\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$. При этом предположении для параметра $\sigma^2(t)=D\xi(t)$ в формуле (1) получаем следующую зависимость от времени: $\sigma^2(s+t)=\sigma^2(s)+\sigma^2(t), s,t\ge 0$.

В самом деле, $\xi(s+t)=\xi(s)+\left[\xi(s+t)-\xi(t)\right]$ есть сумма независимых величин и $D\xi(s+t)=D\xi(s)+D\left[\xi(s+t)-\xi(t)\right]$, где величина $\xi(s+t)-\xi(s)$

имеет ту же дисперсию, что и $\xi(t)$. Таким образом, $\sigma^2(t)$ есть линейная функция от t, $\sigma^2(t)=\sigma^2\cdot t$, $t\geq 0$, постоянная σ^2 называется коэффициентом диффузии.

Задача. Показать, что при любых $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ величины $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)$ имеют нормальное распределение вероятности с нулевыми средними значениями и корреляционной матрицей $B=\{B_{kj}\}$,

$$B_{kj}=M\xi(t_k)\xi(t_j)=\sigma^2\min(t_k,t_j),\qquad k,j=1,\ldots,n.$$

Отметим, что

$$B(s,t)=M\xi(s)\xi(t)=\sigma^2\min(s,t),\quad s,t\geq 0,$$

есть так называемая корреляционная функция процесса броуновского движения.

Итак, в нашей модели броуновского движения $\xi(t)$, $t\geq 0$, на любом интервале $(s,t]$ величина $\xi(t)-\xi(s)$ имеет нормальную плотность вероятности

$$p(t-s,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2\sqrt{2\pi(t-s)}}\right),\quad -\infty<x<\infty,$$

Причем для любых $0<t_1<\ldots<t_n$ приращения $\xi(t_1)-\xi(0),\ldots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ являются независимыми. При условии $\xi(s)=x$ в последующем течении процесса $\xi(t)$, $t\geq s$ случайные величины $\xi(t)-x$ имеют такое же распределение вероятностей, как и соответствующие $\xi(t-s)$ при условии $\xi(0)=0$. В частности, условная плотность вероятности величин $\xi(t)$ при условии $\xi(s)=x$ есть

$$p(s,x,t,y)=p(t-s,y-x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right),\quad -\infty<y<\infty.$$

Она зависит от переменных параметров s,t и x; легко проверить, что

$$-\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},\quad \frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

(эти дифференциальные уравнения известны как прямое и обратное уравнения диффузии).