УДК 531(075.8)

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК
Брест, БрГУ

К МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Многие задачи темы «Кинематика материальной точки» посвящены нахождению закона движения точки. Для решения таких задач в первую очередь необходимо определиться с выбором координат, в которых будет удобно решать поставленную задачу (естественно, что в учебных задачах на этот выбор часто «намекают» авторы задачника). Затем нужно разложить заданные кинематические величины (скорость, ускорение и т. д.) по локальному базису выбранной системы координат. Далее,из полученной системы дифференциальных уравнений находят требуемые величины. Основная трудность состоит в том, что система, как правило, является нелинейной. В качестве примера рассмотрим задачу 1.29 из сборника [1].

Задача. Самолет, изображенный на рисунке 1 точкой A, движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\vec{v}_1 = \vec{v}$. В момент, когда самолет пролетает над ракетной установкой, запускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость $\vec{v}_2$, все время направленную к самолету, $|\vec{v}_2| = 2v$. Найти уравнение траектории ракеты в системе осей $A\xi\eta$, движущейся вместе с самолетом. Найти также время T полета ракеты с момента вылета до поражения самолета и величину ее ускорения как функцию от угла φ.

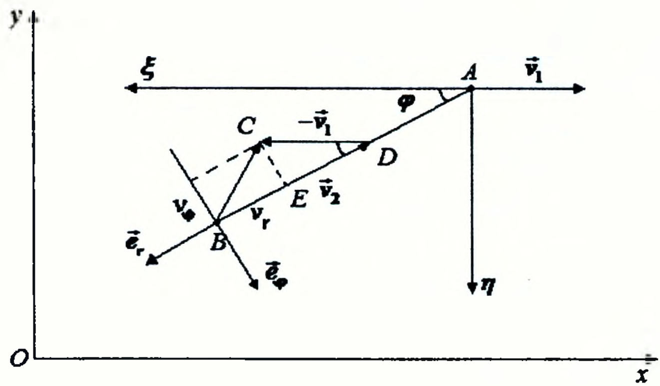

Рисунок 1

Решение. В системе координат $A\xi\eta$ вектор скорости точки B равен $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \overrightarrow{BC}$. Найдем проекции v_r и v_φ этого вектора на координатные орты $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ в полярных координатах, связанных с $A\xi\eta$. Так как

$$CE = CD \cdot \sin\varphi = v \cdot \sin\varphi,\ ED = CD \cdot \cos\varphi = v \cdot \cos\varphi,$$

$$BE = BD - ED = 2v - v \cdot \cos\varphi,$$

то

$$\begin{cases} v_r = -v \cdot (2 - \cos\varphi), \\ v_\varphi = -v \cdot \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = -v \cdot (2 - \cos\varphi), \\ r\dot{\varphi} = -v \cdot \sin\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Перемножив крест-накрест уравнения системы (1) и отбрасывая dt, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{2}{\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \right) d\varphi. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$C \cdot r = \frac{\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2},$$

где C – произвольная постоянная. Т. к. в начальный момент $t = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $r = H$, то

$$r = \frac{H \sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}. \tag{3}$$

Формула (3) определяет траекторию ракеты в полярной системе координат, связанной с системой координат $A\xi\eta$ (рисунок 2).

Найдем время T полета ракеты. Подставив (3) во второе уравнение системы (1), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{H\dot{\varphi}}{(1 + \cos\varphi)^2} = -v. \tag{4}$$

Интегрируя (4) по переменной t от 0 до T, получим

$$-vT = \int_0^T \frac{H\dot{\varphi}(t)dt}{(1 + \cos\varphi)^2}.$$

Вычислим последний интеграл, учитывая, что $\varphi(0) = \pi/2$ и $\varphi(T) = 0$:

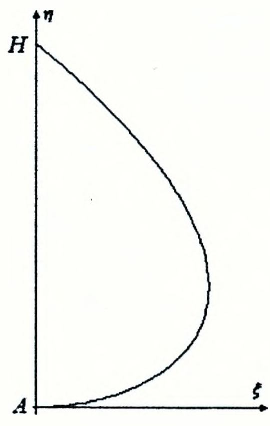

Рисунок 2

$$\int_0^T \frac{H\dot{\varphi}(t)dt}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{H}{2}\cdot\int_{\varphi(0)}^{\varphi(T)} \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\left(tg\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{H}{2}\left(tg\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\varphi(0)}^{\varphi(T)} =$$

$$= -\frac{H}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = -\frac{2H}{3}.$$

Тогда $T = \frac{2H}{3v}$.

Для вычисления ускорения $|\vec{w}|$ ракеты найдем его проекции w_r и w_φ на координатные орты $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$. Вычисление радиального ускорения проведем по формуле $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$. Из первого уравнения системы (1)

$$\ddot{r} = -v\dot{\varphi}\sin\varphi = [\text{с учетом второго уравнения (1)}] = \frac{v^2\sin^2\varphi}{r}.$$

Далее

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{(r\dot{\varphi})^2}{r} = [\text{с учетом второго уравнения (1)}] = \frac{v^2\sin^2\varphi}{r}.$$

Тогда $w_r = 0$.

Пользуясь формулой $w_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$, найдем трансверсальное ускорение. Дифференцируя по времени второе уравнение системы (1), получим

$$\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -v\dot{\varphi}\cos\varphi = [\text{с учетом второго уравнения (1)}] = \frac{v^2\cos\varphi\sin\varphi}{r} =$$

$$= [\text{с учетом (3)}] = \frac{v^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)^2}{H}.$$

Перемножив первое и второе уравнения системы (1), получим

$$\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{v^2\sin\varphi(2-\cos\varphi)}{H} = [\text{с учетом (3)}] = \frac{v^2(2-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)^2}{H}.$$

Тогда $w_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{2v^2(1+\cos\varphi)^2}{H}$.

Ответ: $r = \frac{H\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$, $T = \frac{2H}{3v}$, $w = w_\varphi = \frac{2v^2(1+\cos\varphi)^2}{H}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по аналитической механике : учеб. пособие для вузов / Е. С. Пятницкий [и др.]. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 400 с.