6. Hamad, M. A. Theoretical work on magnetocaloric effect in $La_{0.75}Ca_{0.25}MnO_3$ / M. A. Hamad // J. Adv. Ceram. – 2012. – Vol. 1 (4). – P. 290–295.

7. Magnetite (Fe3O4): a new variant of relaxor multiferroic / M. Ziese [et al.] // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2012. – Vol. 24. – P. 086007–086015.

8. The Evidence for Ferroelectricity on Magnetite Ceramics below the Verwey Transition / W. Yu-Qiang [et al.] // Chinese Phys. Lett. – 2011. – Vol. 28. – P. 127701–086015.

9. Макоед, И. И. Корреляции диэлектрических и магнитных свойств магнетита / И. И. Макоед // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 22–28.

УДК 519.2

И. Н. МЕЛЬНИКОВА, И. А. ДОРДЮК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ПРОЦЕССУ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Представьте себе мелкую частицу, взвешенную в однородной жидкости. Частица испытывает хаотические столкновения с молекулами жидкости, в результате чего она находится в непрерывном беспорядочном движении. Дискретным аналогом этого процесса может служить следующая модель случайного блуждания. Частица меняет свое положение лишь в дискретные моменты времени, кратные Δt. Изменение положения происходит таким образом, что, находясь в точке x, частица независимо от предшествующего поведения переходит с равными вероятностями в одну из соседних точек $x+\Delta x$ или $x-\Delta x$, причем смешение Δx одно и то же для всех x (речь идет лишь об одной координате движущейся частицы, иначе, об одномерном случайном блуждании). В пределе, когда $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, получается непрерывное случайное блуждание, характерное для физического процесса броуновского движения.

Обозначим $\xi(t)$ положение броуновской частицы в момент времени t. Пусть в начальный момент времени $t=0$ частица находится в точке $x=0$. При дискретном блуждании за время t она совершает $n=\dfrac{t}{\Delta t}$ шагов, из которых какое-то случайное число шагов совершается в положительном направлении. Если обозначить S_n число шагов в положительном направлении, то общее смешение в положительном направлении составит $S_n \Delta x$, а в отрицательном направлении $-(n - S_n)\Delta x$. Таким образом, общее смещение $\xi(t)$ за время $t = n \cdot \Delta t$ связано с числом S_n следующим равенством: $\xi(t) = [S_n \Delta x - (n - S_n)\Delta x] = (2S_n - n)\Delta x$.

Если считать, что $\xi(0) = 0$, то $\xi(t) = [\xi(s) - \xi(0)] + [\xi(t) - \xi(s)]$ для любого s, $0 \le s \le t$. Очевидно, в описанной модели случайного блуждания величины $\xi(s) - \xi(0)$ и $\xi(t) - \xi(s)$ являются независимыми, причем распределение вероятностей приращения $\xi(t) - \xi(s)$ точно такое же, как и приращения $\xi(t - s) - \xi(0)$. Поэтому дисперсия $\sigma^2(t) = D\xi(t)$ удовлетворяет соотношению $\sigma^2(t) = \sigma^2(s) + \sigma^2(t - s)$, $0 \le s \le t$.

Видно, что, как функция от t, дисперсия $\sigma^2(t)$ с ростом t меняется линейно и, таким образом, $D\xi(t) = \sigma^2 t$, где σ^2 – некоторая постоянная, называемая *коэффициентом диффузии*. С другой стороны, легко подсчитать, что дисперсия смещения за время t (иначе, за n шагов, $n = \dfrac{t}{\Delta t}$) есть $D\xi(t) = \Delta x^2 \dfrac{t}{\Delta t}$. В итоге получаем следующее соотношение между Δx и Δt: $\dfrac{\Delta x^2}{\Delta t} = \sigma^2$.

Совершаемые частицей переходы не зависят друг от друга, и их можно рассматривать как испытания Бернулли с вероятностью «успеха» $p = \dfrac{1}{2}$, за который можно принять шаг в положительном направлении. Тогда S_n – число шагов в положительном направлении – будет равно числу «успехов» в n испытаниях Бернулли. При этом положение частицы в момент времени t будет следующим образом связано с нормированной величиной $S_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(2S_n - n)$: $\xi(t) = S_n^* \sqrt{n}\Delta x = S_n^* \sqrt{t} \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}} = S_n^* \sigma \sqrt{t}$.

Используя теорему Муавра – Лапласа, получаем, что распределение вероятностей случайной величины $\xi(t)$ при предельном процессе броуновского движения задается формулой

$$\mathrm{P}\left\{x_1 \le \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}} \le x_2\right\} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{P}\left\{x_1 \le S_n^* \le x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx.$$