УДК 517.954

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК, Т. А. ЯЦУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ – НИРЕНБЕРГУ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ – ограниченная односвязная область, гомеоморфная шару, границей которой $\partial\Omega$ является гладкая $(n-1)$-мерная поверхность Ляпунова. Задача Римана – Гильберта состоит в отыскании пары функций $u \in C^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\upsilon \in C^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в области Ω эллиптической по Дуглису – Ниренбергу [1] системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a_0 u + \sum_{j=1}^{n} b_j \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{k,j=1}^{n} d_{kj} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_k \partial x_j} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

и граничному условию

$$g_1(y)u(y) + g_2(y)\upsilon(y) = f(y), \quad y \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $g_1, g_2, f : \partial\Omega \to \mathrm{R}$ – заданные непрерывные по Гёльдеру функции, $a_0, b_j, c_j, d_{kj}(k, j = 1,2,\ldots,n)$ – заданные действительные числа.

В плоском $(n = 2)$ случае, когда система (1) представляет собой систему Коши – Римана, задача Римана – Гильберта (задача Гильберта в терминологии Ф. Д. Гахова [2]) является одной из основных краевых задач теории аналитических функций и достаточно подробно изучена (см. [2, с. 217; 3, с. 144] и имеющуюся там библиографию).

В случае если $n = 3$ и система (1) либо принадлежит классу трехмерных аналогов системы Коши – Римана [4], либо является эллиптической кососимметрической системой [5] или эллиптической системой ортогонального типа [6], для задачи Римана – Гильберта получено условие регуляризуемости, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен их индекс. При $n = 4$ известны примеры систем [7–9], обладающих свойством, что никакие граничные условия не могут образовать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу.

Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского. Это условие накладывает дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеровость краевой задачи как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [1]. В настоящей работе получено условие регуляризуемости краевой задачи (1), (2).

Теорема. *Краевая задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y \in \partial\Omega$ *и при каждом ненулевом векторе* τ, *касательном к поверхности* $\partial\Omega$, *выполняется неравенство*

$$-g_1(y)b(\lambda_1\nu + \tau) + a_0 g_2(y) \neq 0, \tag{3}$$

где $b(\xi) = \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j$, λ_1 *– корень уравнения* $\det A(\lambda\nu + \tau) = 0$, *лежащий в верхней* λ*-полуплоскости,* ν *– единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* y, $A(\xi)$ *– характеристическая матрица системы* (1).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 373–416.

2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 640 с.

3. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Наука, 1968. – 511 с.

4. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

5. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Збірник статей. Математика. Інформаційні технології. Освіта. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

6. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.

7. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

8. Басик, А. И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А. И. Басик, А. Т. Усс // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26.

9. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.