3. **Ляпунов, А. М.** *Общая задача об устойчивости движения* // А. М. Ляпунов – М., Гостехиздат, 1950.

4. **Еругин, Н. П.** *Приводимые системы* /Н. П. Еругин // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова, Т. 13 – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946.

5. **Gorbuzov, V. N.** *First integrals of linear differential systems* // V. N. Gorbuzov, A. F. Pranevich – Mathematics. Classic. Analys. and ODEs (arXiv:0806.4155v1 [math.CA]), 2008.

ВЫСШИЕ АНАЛОГИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Е. В. Грицук (Минск, Беларусь)

В результате автомодальной редукции дифференциальных уравнений в частных производных Каупа-Купершмидта (см., например, [1]) к обыкновенным дифференциальным уравнениям были получены уравнения иерархии K_2

$$\left(\frac{d}{dz}+w\right)h_n\left(w'-\frac{1}{2}w^2\right)-zw+\beta=0, \qquad (K_2)$$

где оператор $h_n(u)$ определяется реккурентно $h_0(u)=1, h_1(u)=u_{zz}+4u^2, \Omega=D^3+2uD+u_z$, $J=D^3+3(uD+Du)+2(D^2uD^{-1}+D^{-1}uD^2)+8(u^2D^{-1}+D^{-1}u^2)$,

$$h_{n+2}(u)=J\Omega h_n(u), D=\frac{d}{dz}, D^{-1}(\cdot)=\int(\cdot)dz.$$

Вид первых двух членов ${}_4K_2$ и ${}_6K_2$ иерархии, а также свойства их решений изложены в работах [2,3]. В настоящем сообщении приводятся некоторые общие результаты, касающиеся структуры уравнений иерархии.

Теорема 1. *Уравнение* ${}_{3n+s}K_2$ *имеет структуру*

$$w_{3n+s}+\gamma_{3n+s}w_0^{(3n+s+1)/2}+P_{(3n+s-3)/2}(w_0,w_1,\dots,w_{3n+s-2})-zw+\beta=0,$$

где $w_m=d^mw/dz^m$, $P_{(3n+s-3)/2}$ *– полином от* $w_0,w_1,\dots,w_{3n+s-2}$ *степени* $(3n+s-3)/2$ *вида*

$$P_{(3n+s-3)/2}(w_0,w_1\dots,w_{3n+s-2}):=\sum_{\langle k\rangle=3n+s+1,k_0\leq(3n+s-5)/2}b_{k_0k_1\dots k_{3n+s-2}}w_0^{k_0}w_1^{k_1}\dots w_{3n+s-2}^{k_{3n+s-2}}.$$

Через k *обозначен мультииндекс* $k=(k_0,k_1,\dots,k_{3n+s-2})$ *с нормой*

$$\langle k\rangle:=\sum_{p=0}^{3n+s-2}(p+2)k_p,$$

$b_{k_0k_1\dots k_{3n+s-2}}$ *– константы, и*

$$\gamma_{3n+s}=\gamma_{6-2s}\left(-\frac{1}{2}\right)^{(3n+3s-6)/2}\prod_{j=0}^{(n+s-4)/2}\frac{(3n+s-5-6j)(3n+s-2-6j)2^5}{(3n+s-4-6j)(3n+s-6j)},$$

$s=0$ *в случае четных* n *и* $s=1$ *в случае нечетных* n.

Теорема 2. *Подвижные полюса решения уравнения ${}_{3n+s}K_2$ могут быть только первого порядка.*

Литература

1. **Kudryashov, N. A.** //ANZIAM J. – 2002. – V. 44. – P. 149-160.
2. **Громак, В. И.** //Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – С. 2042-2048.
3. **Громак, В. И.** //Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – С. 172-180.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Громак (Минск, Беларусь)
vgromak@gmail.com

Преобразования Беклунда, впервые введенные для исследования поверхностей постоянной отрицательной кривизны, являются мощным инструментом для изучения свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [1]) и, в частности, уравнений Пенлеве [2].

Для уравнений Пенлеве систематический подход для построения преобразований Беклунда впервые был осуществлен через инвариантность гамильтоновых систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве [3]. Так, например, для второго уравнения Пенлеве (P_2) в форме $q'' = 2q^3 + tq + b - 1/2$ преобразование Беклунда было получено [4] из инвариантности гамильтоновой системы

$$q' = \{H, q\} = p - q^2 - t/2, \;\; p' = \{H, p\} = 2qp + b, \tag{1}$$

где гамильтониан $H = \frac{p^2}{2} - (q^2 + \frac{t}{2})p - bp$, а скобка Пуассона $\{\varphi(q,p,t,), \psi(q,p,t,)\}$, определяется соотношением $\{\varphi, \psi\} = \varphi_p\psi_q - \varphi_q\psi_p$.

Система (1) допускает преобразование $(q,p) \to (\tilde{q}, \tilde{p}) = (q + b/p, p)$, которое является каноническим, т.к. $\{\tilde{p}, \tilde{q}\} = 1$ и, следовательно, сохраняет гамильтонову структуру системы (1). Если для общей функции $\varphi = \varphi(q,p,b,t)$ ввести преобразования r, s соотношениями

$$r(\varphi) = \varphi(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{b}, t) = \varphi(q + \frac{b}{p}, p, -b, t),$$

$$s(\varphi) = \varphi(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{b}, t) = \varphi(-q, -p + 2q^2 + t, 1 - b, t),$$

то система (1) инвариантна относительно преобразований r, s, причем операторы r, s коммутируют с оператором дифференцирования, то есть $(r(\varphi))' = r(\varphi')$, $(s(\varphi))' = s(\varphi')$, при этом $r^2 = s^2 = I$, где I - тождественное преобразование. Множество всех преобразований Беклунда $W =< r, s >= \{(sr)^n, \; (sr)^n r\}$, $n \in \mathbb{Z}$, генерированное преобразованиями r и s, образует группу с фундаментальными соотношениями $r^2 = s^2 = I$. Эта группа называется аффинной группой Вейля типа $A_1^{(1)}$ (см., например, [5]).

В работе для уравнений Пенлеве и их высших аналогов приведены эквивалентные системы, для которых справедлива

Теорема. *Для систем, эквивалентных уравнениям Пенлеве и их высшим аналогам, преобразования Беклунда коммутируют с операцией дифференцирования.*