ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

С. Ф. Макарук (Брест, Беларусь)

Рассматривается следующая задача, возникающая при изучении экстремальных свойств композиционных материалов.

Рассмотрим конечное число простых замкнутых взаимнонепересекающихся кривых L_k, $k = \overline{1,n}$, $\operatorname{int} L_i \cap \operatorname{int} L_j = \emptyset$ $\forall\, i \neq j$. Обозначим $D^- := \bigcup_{k=1}^n \operatorname{ext} L_k$ многосвязную область, ограниченную объединением L кривых L_k, а $D^+ := \bigcup_{k=1}^n \operatorname{int} L_k = \bigcup_{k=1}^n D_k$ — объединение внутренностей кривых L_k (D^+ — несвязная область). Области D^+ и D^- заполнены материалами с различной проводимостью. Пусть $g \in C^{1,\lambda}(\mathbb{C})$ — заданная функция, связанная со значениями внешнего потока (внешней силы).

Задача состоит в нахождении кривой L, такой чтобы при заданной функции g сконструированный материал имеел оптимальную эффективную проводимость. Соответствующая математическая модель сводится к задаче определения (кусочно) аналитической функции $\varphi(z)$, непрерывной вплоть до границы соответствующих областей, удовлетворяющей краевому условию

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

такой, что изменяющаяся компонента функционала эффективной проводимости σ принимает максимальное (или минимальное) значение, т.е.

$$\sigma := \frac{1}{\pi r^2} \int_L \operatorname{Re} \varphi^+(t)\, dy \to \max(\min), \quad t = x + iy, \tag{2}$$

в предположении, что площадь области D^+ фиксирована.

Если включения являются взаимнонепересекающимися кругами $D_k := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_k| < r_k\}$, $k = \overline{1,n}$, различного радиуса, a_k, $k = \overline{1,n}$ — центры включений, то имеет место следующая

Лемма. Пусть функция σ достигает максимума на множестве точек $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда $\sigma(A) \in R$, и каждый круг D_k касается хотя бы одного из остальных кругов D_m, и замыкание $\overline{D^-}$ является связным множеством в $\mathbb{C}$.

Получено полное геометрическое описание задачи в случае двух и трех круговых включений различных радиусов, в важном, с точки зрения механики композиционных материалов, случае, когда $g(z) = \overline{z}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. *Mityushev V.V., Rogosin S.V.* Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Function. Boca Raton-London: Chapman and Hall / CRC Press, 1999.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КАК ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ЛОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

О. В. Макеева (Ульяновск, Россия)

В пространстве $C^2[0,1]$ рассмотрена линейная задача на собственные значения $u'' + \mu^2 u = 0$, $u(0) = 0$, $u(x_0) = u(1)$. Она имеет два набора собственных чисел $\mu_m = \dfrac{2\pi m}{1 - x_0}$, $\mu_s = \dfrac{\pi(2s+1)}{1 + x_0}$, которым отвечают собственные функции $\varphi_m = \sin \mu_m x$, $\varphi_s = \sin \mu_s x$. Сопряженная задача $v'' + \mu^2 v = 0$, $v(0) = v(1) = 0$, $\dfrac{\partial v(x_0+0)}{\partial x} - \dfrac{\partial v(x_0-0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(1)}{\partial x}$ в пространстве $C^2[0,x_0) \cup C^2(x_0,1] \cap C[0,1]$ имеет те же собственные числа. Жордановы цепочки длины два существуют при условии $\mu_m = \mu_s \Rightarrow x_0 = \dfrac{2s - 2m + 1}{2s + 2m + 1}$.

Для уточнения приближенно заданного собственного значения при $m = s = 1$, $x_0 = 1/5$ применен метод ложных возмущений [1]. Построен оператор ложного возмущения такой, что заданные приближения становятся точными для возмущенного оператора. На основе теории ветвления дискретного спектра и итерационного процесса Ньютона–Канторовича вычислены соответствующие точное собственное значение и жордановы элементы прямой и сопряженной задачи.

Литература

1. *Логинов Б.В., Макеева О.В., Цыганов А.В.* Уточнение приближенно заданных жордановых цепочек линейной оператор-функции спектрального параметра на основе теории возмущений // Межвузовский сборник научных трудов *Функциональный анализ.* Т. **38** (2003) С. 53–62.