ЧАСТНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ

А. П. Гринько (Брест, Беларусь)

В работе вводятся частные и смешанные локальные операторы дробного интегродифференцирования с переменными пределами интегрирования. Рассмотрим пространство $L_{(p_1,\dots,p_n)}(R^n)$ (со смешанной нормой) функций $\varphi(x_1,\dots,x_n)$:

$$\|\varphi\|_{L_{(p_1,\dots,p_n)}(R^n)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x_1,\dots,x_n)|^{p_1}\,dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\dots\right)^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right)^{1/p_n}.$$

Введем следующие обозначения: $\alpha^m=(\alpha_1,\dots,\alpha_m,0,\dots,0)$, $\varepsilon^m=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$, $t^m=(t_1,\dots,t_m)$, $\Gamma(\alpha^m)=$ $=\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)$, $x'=(x_{m+1},\dots,x_n)$, $dt^m=dt_1\dots dt_m$, $(x-t)^{\alpha^m-1}=(x_1-t_1)^{\alpha_1-1}\dots(x_m-t_m)^{\alpha_m-1}$.

Оператор

$$(I^{\alpha^m,-\varepsilon^m}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha^m)}\int\limits_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1}\dots\int\limits_{x_m-\varepsilon_m}^{x_m}\frac{\varphi(t^m,x')}{(x-t)^{1-\alpha^m}}\,dt^m \tag{1}$$

называется смешанным локальным правосторонним дробным интегралом порядка α^m,

$$(\mathfrak{D}^{\alpha^m,-\varepsilon^m}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha^m)}\,\frac{\partial^m}{\partial x_1\dots\partial x_m}\int\limits_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1}\dots\int\limits_{x_m-\varepsilon_m}^{x_m}\frac{\varphi(t^m,x')}{(x-t)^{\alpha^m}}\,dt^m \tag{2}$$

— смешанной локальной правосторонней дробной производной порядка α^m.

В случае $m=1$ равенства (1) и (2) определяют частный локальный правосторонний дробный интеграл и частную локальную правостороннюю дробную производную порядную α соответственно.

В работе доказаны условия ограниченности операторов (1) из пространства $L_{(p_1,\dots,p_n)}(R^n)$ в пространство $L_{(q_1,\dots,q_n)}(R^n)$. В случае дифференцируемости функции $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ получены различные формы представления операторов (2).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф05МС-050).

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника (1987).

2. *Гринько А.П., Карпук М.М.* Дробные производные в точке и их применения // *Труды Института математики НАН Беларуси.* Минск: (2004), Т. 12, № 1, с. 46–53.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА ВЫШЕ ВТОРОГО

Е. В. Грицук, А. Т. Усс (Брест, Беларусь)

Известно [1–3], что если эллиптическая система двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами гомотопна паре уравнений Лапласа, то задача Дирихле для нее (в обычных постановках) является нетеровской и имеет фредгольмовский характер разрешимости (т.е. имеет нулевой индекс). В пространствах размерности $n\geq 3$ каждая система указанного типа гомотопна паре уравнений Лапласа, и потому для каждой такой системы задача Дирихле является фредгольмовой. Б.В. Боярским было высказано предположение (см. [2]), что результат не зависит от порядка дифференциальных уравнений. Однако, это не верно.

В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ($n\geq 3$) с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим задачу Дирихле отыскания пары функций $(u(x),v(x))\in C^{4,1+\mu}(\Omega;\partial\Omega)$, удовлетворяющей в Ω системе

$$(\partial_n^2+16\Delta)(\partial_n^2-31\Delta)u-28\Delta(\partial_n^2+16\Delta)v=0,\quad 50\Delta(\partial_n^2+\Delta)u+(\partial_n^2+\Delta)(\partial_n^2+44\Delta)v=0, \tag{1}$$

а на границе $\partial\Omega$ — условиям

$$(u,v)|_{\partial\Omega}=(f_1,g_1),\quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial\nu},\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\right|_{\partial\Omega}=(f_2,g_2). \tag{2}$$

Здесь $\partial_j:=\partial/\partial x^j$ — оператор частного дифференцирования, $\Delta=\sum_{j=1}^{n-1}\partial_j^2$ — оператор Лапласа по переменным $(x^1,\dots,x^{n-1})$, ν — непрерывное поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Теорема 1. Система (1) гомотопна паре бигармонических уравнений в классе $\mathfrak{M}(s=4;\,p=2;\,n\geq 3)$.

Теорема 2. Задача (1), (2) не является нетеровской.

Литература

1. *Боярский Б.В.* О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости // Бюл. Польск. АН серия матем., астр. и физ. наук. **7** (9) (1959) С. 565–570.

2. *Боярский Б.В.* О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве // Бюл. Польск. АН серия матем., астр. и физ. наук. **8** (1) (1960) С. 19–24.

3. *Шевченко В.И.* О задаче Неймана для эллиптической системы двух уравнений второго порядка со многими независимыми переменными. В сб. *Матем. физика.* Вып. 5. (1968). Киев: Наукова Думка. С. 206–209.