ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА СИСТЕМ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В $\mathbb{R}^3$

Е. В. Грицук, А. Т. Усс (Брест, Беларусь)

В работе гомотопическими средствами вычисляется индекс краевой задачи общего вида (Римана–Гильберта) для класса эллиптических ортогонального типа систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^3$. Для системы Моисила-Теодореску ранее индекс такой задачи найден В.И. Шевченко [1]. Индекс задачи известен и в случаях, когда эллиптическая система принадлежит классу псевдосимметрических систем [2] или классу ТКР-систем (трехмерных аналогов системы Коши–Римана) [3].

Рассматриваемый нами класс содержит систему Моисила–Теодореску, имеет непустые пересечения, но не совпадает ни с классом псевдосимметрических систем, ни с классом систем ТКР-типа.

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова, задана система четырех уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial U}{\partial x^j} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где A_j $(j = 1, 2, 3)$ — квадратные постоянные матрицы четвертого порядка. Будем говорить, что система (1) имеет ортогональный тип, если характеристическая матрица $\mathfrak{A}(\xi)$ этой системы удовлетворяет равенству $\mathfrak{A}(\xi)\mathfrak{A}^T(\xi) = \det \mathfrak{A}(\xi) \cdot E$ (символ T обозначает транспонирование; E — единичная матрица четвертого порядка). Постановку задачи Римана–Гильберта см. в [2] или [3].

Теорема. Индекс регуляризуемой задачи Римана–Гильберта для эллиптической системы (1) ортогонального типа равен минус единице.

Таким образом, во всех изученных случаях индекс задачи Римана–Гильберта один и тот же — минус один. Это позволяет предположить, что для любой эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами индекс регуляризуемой задачи Римана–Гильберта, поставленной для односвязной области, равен минус единице.

Литература

1. *Шевченко В.И.* Гомотопическая классификация задач Римана–Гильберта для голоморфного вектора // Респ. межвед. сб. *Матем. физика*, вып. 17. Киев: Наукова Думка. (1975) С. 184–186.

2. *Басик А.И., Усс А.Т.* Гомотопическая классификация краевых задач Римана–Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ // *Труды Ин-та математики. Минск*, **12** (2) (2004) С. 33–37.

3. *Усс А.Т.* Краевая задача Римана–Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши–Римана //*Доклады НАН Беларуси.* **47** (6) (2003), С. 10–15.

ON BÄCKLUND TRANSFORMATION FOR EQUATION OF K_2 HIERARCHY

V. I. Gromak (Minsk, Belarus)

Bäcklund transformations (BTs) for ordinary differential equations (ODEs), and in particular for hierarchies of ODEs, are a topic of great current interest. Today BTs are universally recognized as an important property of integrable nonlinear ODEs, and there is much interest in their derivation. BTs for the Painleve equations had previously been studied in Soviet literature; a comprehensive list of references can be found in [1]. The arm of present paper is to explore BTs for the sixth order equation

$$w^{(6)} = 7w^2(2w'w'' + w^{(4)}) - 7w'w^{(4)} + w\left(\frac{28}{3}(w')^3 + 21(w'')^2 + 28w'w'''\right) -$$
$$- 14w''w''' + 28(w')^2w'' - 14w^4w'' - 28w^3(w')^2 + \frac{4}{3}w^7 + zw - \alpha \tag{1}$$

which is the second member of Kaup–Kupershmidt (K_2) hierarchy [2].

Theorem 1. Let $w = w(z,\alpha)$ be a solution of equation (1) such that

$$v(z) := w^{(5)} - w(24w'w'' + w^{(4)}) - 2w^2(2(w')^2 + 3w^{(3)}) + 8w'w^{(3)} + 3(w'')^2 + 6w^3w'' - \frac{4}{3}(w')^3 + 8w^4w' - \frac{4}{3}w^6 - z \neq 0$$

$$u(z) := w^{(5)} - 2w(6w'w'' - w^{(4)}) - w^2(10(w')^2 + 3w^{(3)}) + 5w'w^{(3)} + \frac{9}{2}(w'')^2 - 6w^3w'' - \frac{16}{3}(w')^3 + 2w^4w' + \frac{2}{3}w^6 + \frac{z}{2} \neq 0.$$

Then the transformations

$$B_1: \ w(z,\alpha) \to \tilde{w}(z,\tilde{\alpha}) = w + 2(\alpha+1)/v(z), \quad B_2: \ w(z,\alpha) \to \hat{w}(z,\hat{\alpha}) = w + (1-2\alpha)/u(z),$$

determine the solutions of (1) with parameters $\tilde{\alpha} = -\alpha - 2$, $\hat{\alpha} = -\alpha + 1$.

We now may apply the Bäcklund transformations $T = B_1B_2 : w(z,\alpha) \to w_T(z,\alpha+3)$, $T^{-1} = B_2B_1 : w(z,\alpha) \to$ $\to w_{T^{-1}}(z,\alpha-3)$ to obtain the rational solutions and families of special transcendent solutions. In particular, we present

Theorem 2. The equation (1) admits a rational solution if either $\alpha = 3k$, or $\alpha = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.