

5. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
6. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
7. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424
8. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
9. Монахов, В.С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.

Материал поступил в редакцию 15.12.2017

GRITSUK D.V., TROFIMUK A.A. On finite π -solvable groups with given properties of 2-maximal π -subgroups.

We obtain estimates of the derived π -length and the nilpotent π -length of a π -solvable group G in which 2-maximal subgroup of Hall π -subgroup of G is Abelian (nilpotent). In particular, in the Abelian case the derived π -length of such group does not exceed 4 and the nilpotent π -length of such group does not exceed 3.

УДК 517.91: 004.021 УДК 519.61, 517.9

Чичурин А.В., Швычкина Е.Н., Кальчук И.В.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ ХЕМОСТАТА И КАЧЕСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Введение. Изучение математических моделей, описывающих процессы лабораторного культивирования генетически модифицированных организмов в настоящее время является крайне важным. Генетическая модификация, как правило, осуществляется путем вставки молекулы ДНК в клетку в виде плазмиды. Эти плазмидосодержащие микроорганизмы затем растут в хемостате [1]. В течение процесса роста родительские клетки микроорганизма могут потерять плазмиды и вернуться к бесплазмидному состоянию или приобрести новые модифицированные плазмидосодержащие клетки. Примеры таких процессов культивирования описаны в [2, 3].

Для моделирования непрерывного процесса культивирования генно-модифицированных микроорганизмов применим методы, рассмотренные в работах [4, 5, 6]. Для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов наиболее продуктивное развитие получила модель, разработанная и проанализированная Ф.Стюартом и Б.Левиным [2]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = ((1-q)\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t) + q\mu_1(s(t))x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1(t)$ – плотность плазмидосодержащего и $x_2(t)$ плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени t ; $\mu_i(s(t))$ ($i=1,2$) – удельные скорости роста; q – вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток.

В работах [1–3] приведено исследование системы (1) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата i -м микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} \quad (i=1,2), \quad (2)$$

где параметры a_i ($i=1,2$) – постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Ментен);

Чичурин Александр Вячеславович, д. ф-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, Украина, г. Луцк; профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина, г. Брест.

Швычкина Елена Николаевна, к. ф-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, г. Брест.

Кальчук Инна Владимировна, к. ф-м. н., доцент, заведующая кафедрой алгебры и математического анализа Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки, Украина, г. Луцк.

m_i ($i=1,2$) – максимальная скорость роста i -го микроорганизма.

При анализе системы (1) в работе [2] использовался параметр, названный «стоимостью плазмиды» и показывающий селективное преимущество бесплазмидных клеток:

$$\rho(s) = 1 - \frac{\mu_1(s(t))}{\mu_2(s(t))}. \quad (3)$$

Систему (1) рассмотрим в случае, когда функции $\mu_i(s(t))$ ($i=1,2$) задаются равенствами (2), параметры a_1, a_2 удовлетворяют условию $a_1 = a_2$ [7, 8]. При этих условиях постоянные m_1 и m_2 связаны следующим соотношением $m_1 = (1-\rho)m_2$. При таких предположениях система (1) примет вид:

$$\begin{cases} s'(t) = (s_0 - s(t))D - \frac{(1-\rho)m_2 x_1(t)s(t)}{a_2 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) = \left(\frac{m_2(1-\rho)(1-q)s(t)}{a_2 + s(t)} - D \right) x_1(t), \quad x_2'(t) = \frac{m_2 s(t)(q(1-\rho)x_1(t) + x_2(t))}{a_2 + s(t)} \end{cases} \quad (4)$$

Для системы (4) будем искать решения, принимающие положительные значения и удовлетворяющие начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \quad x_2(0) = x_{20} \geq 0. \quad (5)$$

Сведем решение поставленной задачи к решению одного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $x_1(t)$. Для этого складываем все три уравнения системы (4). В результате получим неполное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Delta(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t)$ вида $\Delta'(t) = D(s_0 - \Delta(t))$. Интегрируя это уравнение, находим его общее решение $\Delta(t) = s_0 + e^{-tD}c_1$, где c_1 – произвольная постоянная. Тогда функция $s(t)$ имеет вид

$$s(t) = s_0 + e^{-tD}c_1 - x_1(t) - x_2(t). \quad (7)$$

Исключим из второго и третьего уравнений системы (4) функцию $s(t)$ и получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x_2(t)$:

$$x_2'(t) - x_2(t) \left(\frac{D(q+p-qp)}{(1-q)(1-p)} + \frac{x_1'(t)}{(1-q)(1-p)x_1(t)} \right) = \frac{(q-qp)(Dx_1(t) + x_1'(t))}{(1-q)(1-p)}$$

Проинтегрируем это уравнение. После преобразований запишем функцию $x_2(t)$ в виде

$$x_2(t) = c_2 e^{(\psi(1-q)(1-p)-1)t} x_1^{\psi(1-q)(1-p)}(t) - \frac{q(1-p)x_1(t)}{q+p-qp}, \quad (8)$$

где c_2 – произвольная постоянная. Используя найденные функциональные соотношения (7) и (8) между функциями $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, перепишем второе уравнение системы (4) в виде

$$x_1'(t) = x_1(t) \left(\frac{m_2(1-q)(1-p)(c_1 e^{-Dx_1} + s_0 - \rho \psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t))}{c_1 e^{-Dx_1} + a_2 + s_0 - x_1(t) + q(1-p)\psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t)} - D \right), \quad (9)$$

где $\psi_1 = \frac{1}{(1-q)(1-p)} - 1$, $\psi_2 = \frac{1}{q+p-qp}$

Имеют место следующие теоремы [8].

Теорема 1. Решение системы (4) сводится к решению уравнения (9). Более точно, решение системы (6), удовлетворяющее начальным условиям (5), имеет вид (7), (8), (9), где a_2, m_2, ρ, q, D – положительные числа, $\rho \neq 1$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Теорема 2. Система (4) имеет решение вида

$$s(t) = s_0 - x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(t) = \frac{q(\rho - 1)x_1(t)}{q + \rho - qp},$$

$$(da_2 + vs_0)(tv + \ln x_1(t)) = \zeta \phi (\ln x_1(t) - \ln((1 - \zeta \phi)(da_2 + vs_0) - v(1 + \phi)x_1(t))) a_2 m_2, \quad (10)$$

где $v \equiv d - \zeta \phi m_2$, $\phi \equiv \rho - 1$, $\zeta \equiv q - 1$.

Замечание. Равенства (10) были получены в кодах системы *Mathematica*, причем третье соотношение было записано с помощью команды *InverseFunction[f]*, используемой для представления обратной функции для функции f [9]. С помощью этой команды, мы однозначно вычисляем значения всех трех функций $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ при заданном значении переменной t и строим их графики. Доказательство того, что полученные соотношения (10) определяют решение системы (4) проводится непосредственной постановкой.

В кодах системы *Mathematica* определим программную функцию следующим образом:

```
sol2E = s0 log(x1(t))(m2(1-q)(1-p) - d) -
-a2(m2(1-q)(1-p)(log(a2d((1-q)(1-p) -
(1-p) - 1) + (d - m2(1-q)(1-p))(s0((1-q) x
(1-p) - 1) + (2-p)x1(t)) - log(x1(t))) +
+d log(x1(t)))) / ((d - m2(1-q)(1-p))(a2d +
+s0(d - m2(1-q)(1-p)))) == c3 + t
sol2[t_, x_, a_, m_, d_, q_, rho_, s0_, c3_] :=
:= ((sol2E /. {x1[t] -> x, a2 -> a, m2 -> m,
s0 -> s0, C[3] -> c3}).
```

Найдем значения параметров системы (4), при которых она интегрируется и определим ее решение в виде «чистой» функции

`sol3[t_, x_, a_, m_, d_, q_, rho_, s0_, c3_]`. Из условия $C[2]=0$ получаем

```
int=Solve[(Solve[{s[t]==s0-x1[t]-x2[t],sol1[[1]]}
/.t -> 0/.Rule -> Equal],C[2]][[1,1,2]]==0]
{{x1[0] -> -((-q-p+qp)x2[0]
q(-1+p)},{q -> 0, x2[0] -> 0},
{rho -> 1,x2[0] -> 0}}.
```

Из биологического смысла параметров системы (4) из списка `int` выбираем только первое условие. Т. к. $x_1(0) \geq 0, x_2(t) \geq 0$, то выделим область (изображена на рис. 1) значений параметров ρ и q , при которых удастся найти решения системы (4).

```
RegionPlot[{(-q-p+qp)
q(-1+p)} > 0], {rho, -6, 5}, {q, 0, 1},
FrameLabel -> {"rho", "q"}, LabelStyle ->
Directive[Bold, Black, 14], BoundaryStyle ->
Dashed, PlotStyle -> Yellow, ImageSize -> {250, 250}].
```

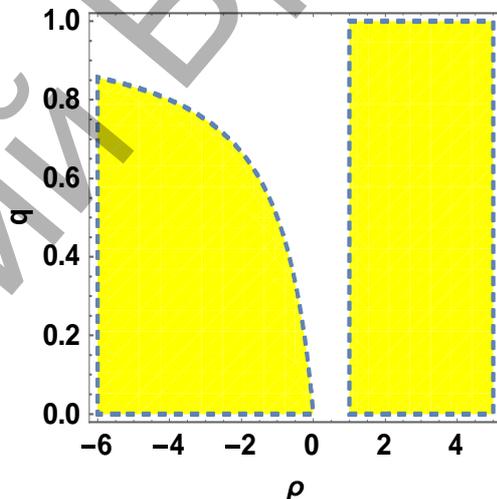
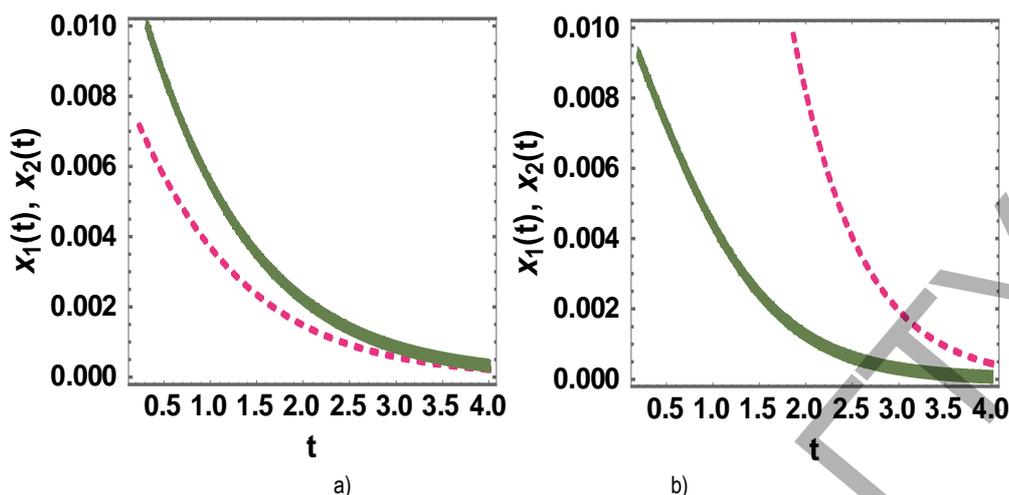


Рисунок 1 – Область значений параметров ρ и q

Замечание. На рис 1 выделена область, где $\rho < 0$, однако это согласуется с биологическим смыслом решаемой задачи. В статье [3] параметр «стоимость плазмиды» характеризуется как показатель преимущества плазмидосодержащих клеток над безплазмидными. А именно, в случае, когда скорость роста плазмидного штамма (m_1) меньше, чем у бесплазмидного (m_2), имеют место положительные значения параметра ρ . В условиях (например, наличие антибиотика), когда селективно поддерживаются плазмидные клетки, коэффициент ρ может достигать бесконечно больших отрицательных значений при отсутствии роста бесплазмидных клеток ($m_2 \rightarrow 0$).

Для решения `sol3[t_, x_, a_, m_, d_, q_, rho_, s0_, c3_]` будут иметь место только значения $\rho < 0$, т. к. параметры m_1 и m_2 (согласно равенству $m_1 = (1 - \rho)m_2$) неотрицательны при $0 < \rho < 1$. Но эти значения не входят в область существования значений параметров ρ и q (рис. 1).

Приведем графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и соответствующие безубыточные концентрации для различных значений параметров, входящих в систему (4) (рис. 2).



a) для параметров $m_2=2.3$, $a_1=a_2=0.6$, $c_3=4$, $s_0=0.2$, $\rho=-2$, $q=0.4$, $d=2$;
 b) для параметров $m_2=1.3$, $a_1=a_2=0.6$, $c_3=2$, $s_0=0.001$, $\rho=-3$, $q=0.1$, $d=1.5$;

Рисунок 2 – Графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$

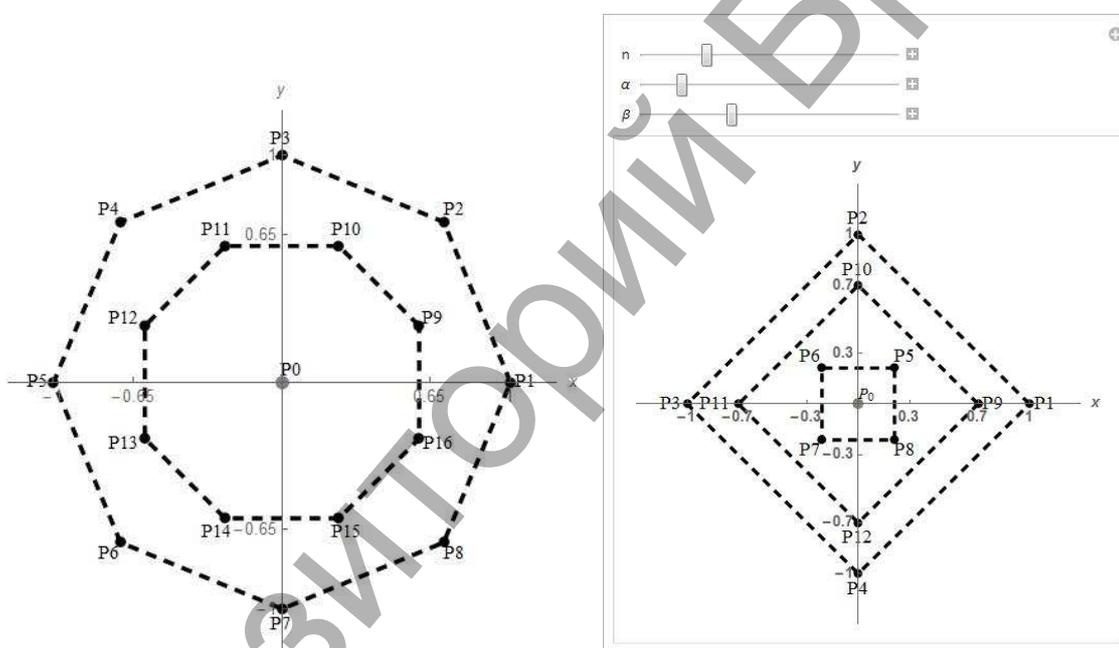


Рисунок 3 – Динамические модели 17-ти и 13-ти тел с неполной симметрией, изображенные во вращающейся декартовой системе координат

На рисунке 2 функция $x_1(t)$ изображена пунктирной линией, а функция $x_2(t)$ сплошной. Из вида кривых на рисунке 2 можно сделать вывод о том, что плазмидные и бесплазмидные клетки с течением времени уменьшают свою численность. При этом отметим, что значение параметра q (вероятность образования бесплазмидных клеток) определяет, какие из клеток будут доминировать в своей численности.

Компьютерное моделирование в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел. Система *Mathematica* была эффективно использована при решении ряда ограниченных задач космической динамики. Соответствующие новые модели космической динамики были предложены Б. Эльмабсуттом и Е.А. Гребениковым в работах [10–12]. В этих моделях гравитационное поле создается телами, образующими правильные многоугольники, вращающиеся вокруг центрального тела, и в таком гравитационном поле исследуется движение пассивно гравитирующей массы. Системы дифференциальных уравнений, описывающие такие модели, являются существенно нелинейными и, поэтому, их интегрирование "в квадратурах" абсолютно бесперспективно. В таких случаях

А.Пуанкаре рекомендовал [13] исследовать проблему существования стационарных решений (точек равновесия). Эта проблема, как показали современные авторы, сводится к решению весьма сложных систем нелинейных алгебраических уравнений, которые раньше не были известны в математической литературе [14]. Найти точное решение этих алгебраических систем в аналитической форме невозможно из-за их существенной нелинейности. Используя же современные системы компьютерной математики, такие как система *Mathematica*, можно найти координаты точек равновесия с произвольной точностью и исследовать их устойчивость по Ляпунову. Алгоритмы компьютерного моделирования таких задач описаны в работах [15, 16]. Укажем задачи, при которых были разработаны и использованы эти алгоритмы.

1. При описании новых ограниченных задач космической динамики:

- визуализация самих моделей [16, 17] (например, визуализация ограниченных одно-, двух- и трехкольцевых задач) и создание компьютерных программ, позволяющих строить такие изображения, аналогичные приведенным на рис. 3; точки P_i ($i = \overline{0,16}$) и

P_i ($i = 0, 12$) обозначают взаимно гравитирующие тела, внутри этих конфигураций имеется еще одно тело (материальная точка с бесконечно малой массой), движение которой исследуется;

- проверка громоздких аналитических условий теоремы Банка-Эльмабсута [18], вычисление интервалов допустимых значений для геометрических и гравитационных параметров моделей [23] (рис. 4);
- визуализация положений равновесия и определение координат точек равновесия с любой требуемой точностью (рис. 5); [14, 16].

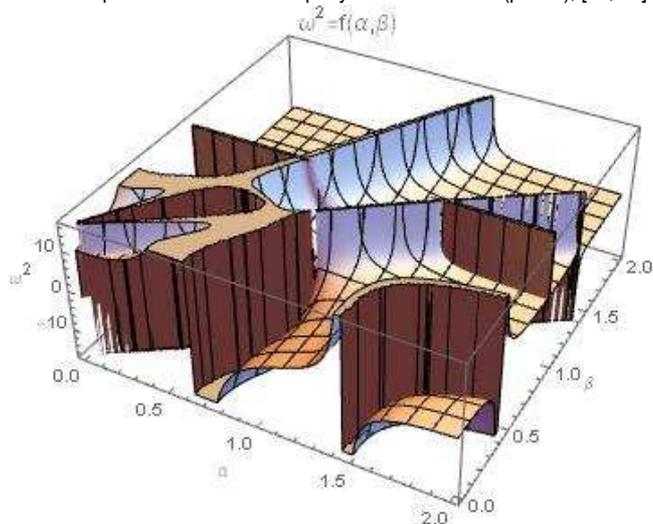


Рисунок 4 – Зависимости между угловой скоростью Ω , расстояниями α, β в трехкольцевой ограниченной задаче четырнадцати тел

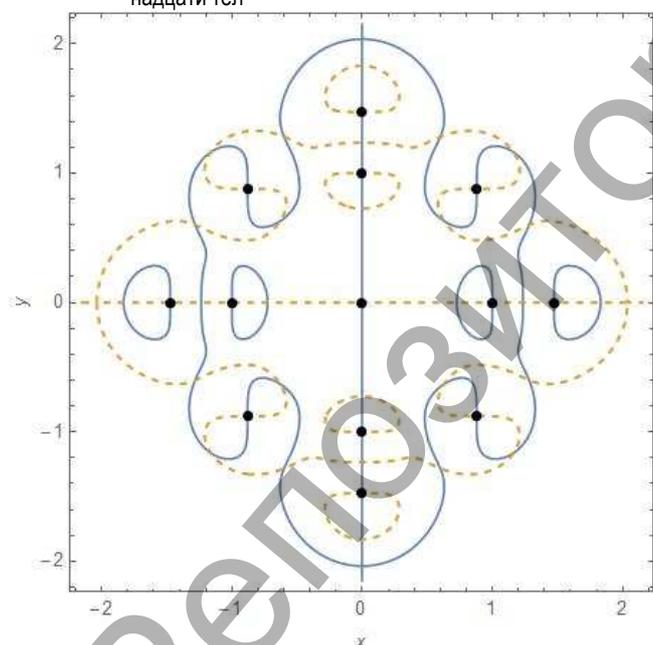


Рисунок 5 – Точки пересечения двух кривых (непрерывной и пунктирной) представляют положения равновесия. В данной трехкольцевой ограниченной задаче 14-ти тел имеют место равенства $m_0 = 10m$

2. При исследовании линейной устойчивости. Построение линеаризованной системы дифференциальных уравнений и изучение арифметических свойств собственных значений матрицы этой системы. При выполнении этой процедуры получаем систему линейных дифференциальных уравнений [17]

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A \bar{x},$$

где матрица A имеет вид [14]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & b_n & 0 & 0 & 2\omega_n & 0 \\ b_n & c_n & 0 & -2\omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее элементы $a_n, b_n, c_n, d_n, \omega_n$ для любого n имеют трудно-обозримый вид, хотя их аналитическая форма для конкретного n с помощью системы *Mathematica* выводится достаточно легко [16, 20]. Если известно число колец в модели с неполной симметрией, то программа для вычисления величин $a_n = a, b_n = b, c_n = c, d_n = d, \omega_n = \omega$ содержит в алгоритме следующие этапы:

- с помощью команд **FindRoot** и **Eigenvalues[A]/Chop** находят координаты положений равновесия и численные величины собственных значений матрицы A с требуемой точностью;
- затем исследуется линейная устойчивость точек равновесия (соответствующие программы приведены в [14, 19, 20]).

3. **Определение резонансов и исследование устойчивости по Ляпунову у стационарных решений.** В случае наличия «частотных» резонансов при исследовании устойчивости положений равновесия следует опираться на известные теоремы А.П. Маркеева [10]. В первую очередь, с помощью преобразований Биргхофа и компьютерной системы *Mathematica*, строятся соответствующие симплектические матрицы [16, 20].

4. **При численных исследованиях положений равновесия.** Используя систему *Mathematica*, можно локально решить численными методами соответствующие рассматриваемым моделям системы дифференциальных уравнений [21]. Проведя численное интегрирование, найденные решения записывают в виде интерполяционных функций на заданных временных промежутках. Затем строятся фазовые портреты исследуемых положений равновесия, и оценивается возмущение начальных координат (рис.6).

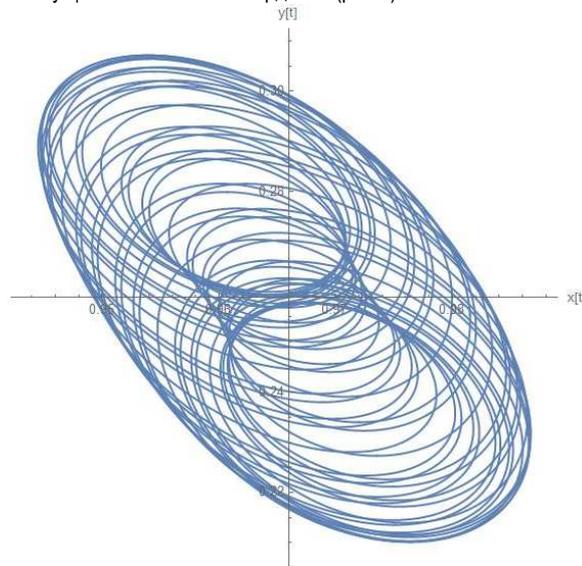


Рисунок 6 – Фазовый портрет положения равновесия $x_{eq} = 0.966, y_{eq} = 0.259$ для трехкольцевой ограниченной задачи с параметрами $m_0 = 10m, t = 300$ и начальными условиями $x(0) = x_{eq} + 10^{-3}, x'(0) = 10^{-2}, y(0) = y_{eq} + 10^{-3}, y'(0) = 10^{-3}$

5. Анимация графической информации. В работах [16, 17, 19, 22, 23, 24] представлены программные модули для исследования динамики в ограниченных ньютоновых задачах 12-ти и 14-ти тел с «неполной симметрией», с использованием для этого возможности графической анимации системы *Mathematica*. Для полученных результатов применялась процедура анимации, позволяющая наблюдать процесс движения материальных точек с течением времени.

Заключение. В работе описаны основные этапы алгоритма исследования и указаны источники, содержащие программную реализацию теоретического метода, рассмотренного в работах [7, 8]. Описан алгоритм поиска областей изменения биологических параметров в зависимости от коэффициентных условий существования аналитических решений исследуемой дифференциальной системы (модель Стюарта-Левина). Приведена визуализация построенных решений для некоторых значений параметров. Перечислены задачи, возникающие в процессе исследования ограниченных задач многих тел, при решении которых были эффективно использованы алгоритмы компьютерного моделирования. В частности, указаны конкретные команды, перечислены численные и аналитические возможности системы *Mathematica*. Приведен ряд рисунков, демонстрирующий действие соответствующих программных модулей и команд этой системы.

Публикация автора Швычкиной Е.Н. была выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-124).

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
- Levin, B.R. The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Nonconjugative Factors / B.R. Levin, F.M. Stewart // *Genetics*. – 1980. – Vol. 94, № 2. – P. 425–443.
- Ганусов, В.В. Популяционная динамика бактериальных плазмид / В.В. Ганусов, А.В. Брильков, Н.С. Печуркин // *Матем. моделирование*. – 2001. – Т. 13, № 1. – С. 77–98.
- De Leenheer, P. Feedback Control for Chemostat Models/ P. De Leenheer, H. Smith // *J. Math. Biol.* – 2003. – № 46. – P. 48–70.
- Dimitrova, N.S. Optimizing the Productivity in a Chemostat Model of Plasmid-bearing Plasmid-free Competition: the Case of General Uptake Functions / N.S. Dimitrova // *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*. – 2013. – Vol. 10, Issue 1. – P. 12–21.
- Chichurin, A. Numerical research of the chemostat model for the single-nutrient competition / A. Chichurin, H. Shvychkina // *Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 7th International Workshop CASTR'2013, Siedlce, Poland, 22–25 Sep. 2013 / University of Podlasie ; Eds.: M. Jakubiak [and others]. – Siedlce, 2013. – Vol. IV, № 1. – P. 130–136.*
- Чичурин, А.В. Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // *Вестник БрГТУ : Физика, математика, информатика*. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 9–14.
- Чичурин, А.В. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2015. – № 3. – С. 59–65.

CHICHURIN A.V., SHVYCHKINA A.N. KALCHUK I.V. Computer methods of investigation in chemostat models and qualitative studies of the limited Newtonian many-body problem

In this paper, a method is given for searching for regions of biological parameter changes depending on the coefficient conditions for the existence of analytic solutions of the investigated differential system (the Stewart-Levin model). The visualization of the constructed solutions for some parameter values is presented. Some effective computer modeling algorithms for the limited problems of many bodies (new models of space dynamics) are described on the basis of the experience of using the system of computer mathematics *Mathematica*.

- [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://reference.wolfram.com/language/ref/InverseFunction.html>.
- Elmabsout, B. Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le probleme des n corps / B. Elmabsout // *Cel. Mech. and Dyn. Astron.*, – 1988. – Vol. 4., № 1. – P. 131–151.
- Гребеников, Е. А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / Е.А. Гребеников // *Матем. моделирование*. – 1998. – Т. 10, № 8. – С. 74–80.
- Grebenicov, E. Two New Dynamical Models in Celestial Mechanics / E. Grebenicov // *Rom. Astron. J.* – 1998. –Vol. 8, № 1. – P. 13–19.
- Пуанкаре, А. Избранные труды: в 3 т. / А. Пуанкаре – Москва : Наука, 1971–1974. – 3 т.
- Гребеников, Е.А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е.А. Гребеников, Д. Козак, М. Якубяк. – Москва : Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.
- Гадомский, Л. Исследование линейной устойчивости равновесных решений для ограниченной задачи 14 тел с неполной симметрией / Л. Гадомский, А.В. Чичурин // *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. – 2009. Сер. 2. – № 1 (77). – С. 39–44.
- Козак-Сковородкина, Д. Применение компьютерной системы *Mathematica* в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел / Д. Козак-Сковородкина. – Москва : РУДН, 2005. – 146 с.
- Гребеников, Е.А. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел / Е.А. Гребеников, Л. Гадомский, Н.И. Земцова, М. Якубяк. – Москва : ВЦ РАН, 2006. – 44 с.
- Bank, D. Configurations polygonales en equilibre relative / D. Bank, A. Elmabsout // *C. R. Acad. Sci. Paris. Serie II b.* – 2001. – Vol. 329. – P. 243–248.
- Гадомский, Л. Исследование линейной устойчивости равновесных решений для ограниченной задачи 14 тел с неполной симметрией / Л. Гадомский, А.В. Чичурин // *Веснік Гродзенскага ун-та*. – 2009. Сер. 2. – № 1 (77). – С. 39–44.
- Ихсанов, Е.В. Компьютерные методы нормализации гамильтоновых ограниченных задач небесной механики / Е.В. Ихсанов. – Москва : Изд-во РУДН, 2004. – 132 с.
- Чичурин, А.В. Численные исследования ограниченной ньютоновой задачи четырнадцати тел с неполной симметрией / А.В. Чичурин // *Труды ИСА РАН*. – 2008. – Т. 32 (3). – С. 210–230.
- Гадомский, Л. Некоторые примеры визуализации задач космической динамики в системе *Mathematica* / Л. Гадомский, А.В. Чичурин // *Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования: сб. научных тр.* – Гродно, 2007. – С. 179–185.
- Chichurin, A., Using Computational Methods For Finding Solutions And There Visualization In The Restricted Problems Of The Cosmic Dynamics Of The Fourteen Bodies With Three Rings/ A. Chichurin // *Труды ИСА РАН*. – 2010. – Т. 51 (1). – С. 87–104.
- Chychuryn, A. Zastosowanie programu komputerowego *Mathematica* do badań liczbowych i wizualizacji ograniczonego problemu Newtona czternaściu ciał z niepełną symetrią / A. Chichurin // *Studia i Materiały EWSiE*. – Warszawa, 2012. – № 4. – S. 73–90.

Материал поступил в редакцию 07.02.2018