МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Множества. Отношения. Булевы функции

Методические указания

к выполнению лабораторных работ по дисциплине

«Дискретная математика»

для студентов специальностей:

1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»,
1-40 03 01 «Искусственный интеллект»

Брест 2015

УДК 347 77/.
ББК 67.403.3 73/.

В методических указаниях приведены краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ, рассмотрен ряд прикладных задач и даны алгоритмы их решения. Методические указания содержат описание трех лабораторных работ с вариантами индивидуальных заданий к ним.

Методические указания предназначены для использования студентами специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» и 1-40 03 01 «Искусственный интеллект» в ходе выполнения лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика».

Составитель: Глущенко Т.А., старший преподаватель кафедры ИИТ

Рецензент: Пролиско Е.Е., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования Учреждения образования «Брестский государственный университет» им. А.С. Пушкина, к.т.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является важной составляющей в системе подготовки инженеров специальностей «Автоматизированные системы обработки информации» и «Искусственный интеллект», поскольку понятия, методы и алгоритмы дискретной математики широко применяются как в информатике в целом, так и в практическом программировании.

Данное методическое пособие разработано в соответствии с учебными программами по дисциплине «Дискретная математика» для специальностей 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» и 1-40 03 01 «Искусственный интеллект». Пособие содержит краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ и задания к самим работам по трем темам: «Множества», «Отношения» и «Булевы функции». Каждое вводимое понятие поясняется на примерах. Для каждой лабораторной работы указаны пункты заданий для выполнения и приведены индивидуальные варианты для обработки заданий. С учетом специфики специальностей все пункты заданий, если не оговаривается особо, предполагают программную реализацию. По результатам выполнения каждой работы должен быть представлен отчет

ТЕМА №1. *МНОЖЕСТВА*

Понятие «множества» принадлежит к числу исходных, неопределяемых строго понятий математики. Определим множество как некоторую, вполне определенную совокупность объектов, рассматриваемых как единое целое. Объекты, из которых составлено множество, называются его *элементами*. Элементы множества различны и отличимые друг от друга. *Элементами множества могут быть объекты самой различной природы.* Например, множество N натуральных чисел *1, 2, 3, ..*; множество Z целых чисел *.., -2, -1, 0, 1, 2, ..*; множество A букв русского алфавита; множество S студентов группы *АС-45* и т.п.

Множества, элементами которого являются множества, называются *семейством* или *классом*.

Если объект a является элементом множества B, то говорят, что a принадлежит B и обозначают: $a \in B$. В противном случае говорят, что a не принадлежит B и, соответственно, обозначают: $a \notin B$. Для наших примеров мы можем записать, что $2 \in N$, но $g \notin A$.

Обычно в *конкретных рассуждениях* элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется *универсальным* множеством (или универсумом).

Множества могут быть *конечными* (т. е. состоящими из конечного числа элементов) и *бесконечными*. Например, множества A, S, из наших примеров – конечные множества. Бесконечными являются множества N, Z, множество прямых, проходящих через фиксированную точку плоскости, множество равносторонних треугольников и т.д.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$ или $\{\}$.

Число элементов в *конечном множестве A* называется *мощностью A* и обозначается $|A|$. Например, мощность множества букв русского алфавита, $|A| = 33$. Для пустого множества $|\varnothing| = 0$ и оно является *конечным множеством мощности 0*. В то же время $|\{\varnothing\}| = 1$, поскольку множество $\{\emptyset\}$ состоит из *одного элемента* - пустого множества.

Пусть A и B некоторые множества.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если *каждый элемент* множества A является элементом множества B, т. е. если $a \in A$, то $a \in B$. И это обозначается следующим образом $A \subseteq B$, где знак $\subseteq$ называется знаком *нестрогого включения*.

Заметим, что каждое множество есть подмножество самого себя: $\forall A: A \subseteq A$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\forall A$: $\emptyset \subseteq A$ и, если фиксировано некоторое универсальное множество, каждое рассматриваемое множество есть его подмножество $A \subseteq U$.

Два множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Сформулируем это утверждение иначе: $A = B$ тогда и только тогда, когда они являются подмножествами друг друга: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* (*строгим* или *истинным*) подмножеством B и обозначается $A \subset B$, знак $\subset$ называется знаком *строгого включения*.

Операции над множествами

Определим операции над множествами, с помощью которых можно строить новые множества из уже имеющихся множеств.

Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A или B. Символически это можно записать так:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Рассмотрим пример.

Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

Пересечением множеств A и B, обозначение $A \cap B$, называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Для нашего примера $A \cap B = \{3\}$.

Операции объединения и пересечения позволяют обобщение: можно рассматривать объединение и пересечение совокупности множеств.

Разностью множеств A и B, обозначение $A \setminus B$ (A - B), называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не принадлежат B

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Соответственно, $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$.

Для нашего примера: $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$.

Симметрической разностью множеств A и B, обозначение $A \Delta B$, называется множество всех тех и только тех элементов, которые либо принадлежат A и не принадлежат B, либо принадлежат B, но не принадлежат A.

$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$.

Для симметрической разности справедливы соотношения:

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Для наших множеств $A \Delta B = \{1,2,4,5\}$.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества U, то может быть определена операция дополнения.

Дополнением (до U) множества A, обозначение $\overline{A}$, называется множество всех элементов U, не принадлежащих A. Множество U должно быть либо задано, либо очевидно из контекста.

$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$.

Определим для наших множеств A и B универсум: $U = \{1, 2,\ldots, 8\}$. Тогда $\overline{A} = \{4,5,6,7,8\}$, $\overline{B} = \{1,2,.3,7,8\}$.

Операции над множествами удобно изображать графически. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника. Сами исходные множества изображаются фигурами внутри прямоугольника (кругами или овалами), а результат операций графически выделяется, закрашивается. Такие диаграммы называются диаграммами Эйлера-Венна. Например, диаграммы операций пересечения, объединения и разности двух множеств выглядят следующим образом:

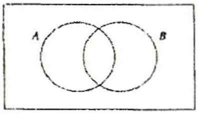

Рисунок 1 – $A \cap B$

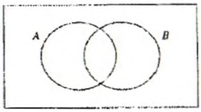

Рисунок 2 – $A \cup B$

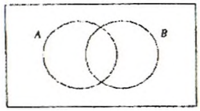

Рисунок 3 – $A \setminus B$

Диаграммы для трех множеств A, B и C рисуются аналогичным образом.

На рисунках 4 и 5 изображены результаты соответствующих операций над тремя множествами.

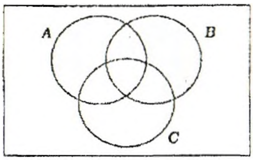

Рисунок 4 – $(A \cup B) \setminus C$

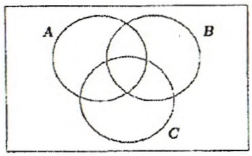

Рисунок 5 – $(A \cap C) \cup B$

Для мощности объединения двух множеств имеет место следующая формула, называемая *формулой включений и исключений*:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Для n конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формула принимает вид:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$
$$(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Рассмотрим задачу на применение этой формулы.

Предположим, что из *100* (универсум) опрошенных студентов *50* изучают химию (множество A), *53* (множество B) - математику, *42* (множество C) - физику, *15* - химию и физику ($|A \cap C|$), *20* занимаются физикой и математикой ($|B \cap C|$), *25* - математикой и химией ($|A \cap B|$) и *5* студентов ($|A \cap B \cap C|$) изучают все три предмета. Требуется ответить на следующие вопросы:

1. Сколько студентов изучают хотя бы один из трех перечисленных предметов?

2. Сколько студентов не изучают ни один из трех перечисленных предметов?
3. Сколько студентов изучают только математику?
4. Сколько студентов изучают физику или химию, но не изучают математику?
5. Сколько студентов не изучают ни математику, ни химию?

Чтобы ответить на первый вопрос, нам необходимо найти мощность множества $|A \cup B \cup C|$. Применим формулу включений и исключений:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Имеем:

$|A \cup B \cup C| = 50 + 53 + 42 - 15 - 20 - 25 + 5 = 90$.

Заметим, что, например, в число 15 студентов, изучающих химию и физику, входят 5 студентов, изучающих еще и математику. Поэтому, число студентов, изучающих *только химию и физику,* равно: 15 – 5 = 10.

Аналогично, в число 50 студентов, изучающих химию, входят 10 студентов, изучающих только химию и физику, 20 студентов (25 – 5 = 20), изучающих только химию и математику, 5 студентов, изучающих все три предмета и, наконец, 15 студентов (50 – 10 – 20 – 5 = 15) изучают одну химию.

Чтобы найти число студентов, не изучающих ни один из трех предметов, необходимо от универсума отнять число студентов, изучающих хотя бы один предмет: *100 – 90 = 10.*

Отвечаем на третий вопрос. Математику изучают *53* студента. Чтобы найти число студентов, изучающих только математику, необходимо от этого числа отнять число студентов, изучающих только математику и физику, только математику и химию и изучающих все три предмета.

Только математику и физику изучают: *20 – 5 = 15.*

Только математику и химию: *25 – 5 = 20.* Все три предмета изучают *5* студентов.

И для числа студентов, изучающих только математику, имеем: *53 – 15 – 20 – 5 = 13.*

Найдем теперь, сколько студентов изучают физику или химию, но не изучают математику. Для этого сначала найдем число студентов, изучающих физику или химию по формуле для мощности объединения двух множеств:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 42 - 15 = 77$.

Теперь от этого числа надо отнять число студентов, изучающих только химию и математику, только математику и физику и изучающих все три предмета. В результате имеем:

77 – 20 – 15 – 5 = 37.

Число студентов, не изучающих ни математику, ни химию, найдем, отняв от общего числа студентов число студентов, изучающих математику или химию. В результате имеем: *100 – 78 = 22.*

Эту же задачу можно решить диаграммами Эйлера-Венна.

Диаграмма Эйлера-Венна приведена на рисунке 6. Как мы видим из диаграммы, универсум, включая множества *A*, *B* и *C*, разбит на непересекающиеся между собой множества.

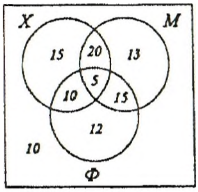

Рисунок 6

Пусть *A*, *I* – непустые множества и $\mathrm{E} = \{A_i\}$ – некоторое семейство непустых подмножеств множества (множество подмножеств *A*) *A*: $\mathrm{E} = \{A_i \mid A_i \subseteq A \wedge i \in I\}$, где множество *I* – множество индексов. Семейство E называется *разбиением* множества *A*, если выполнены два условия:

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для всех* $i \neq j$;
2. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Множества A_i при этом называются *блоками разбиения* множества *A*.

Например, на рисунке 7 условно изображено некоторое множество *A* , разбитое на пять блоков:

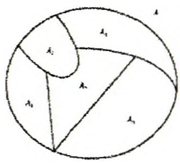

Рисунок 7

Пусть задано множество *A = {1,2,3}*. Имеем пять разбиений множества *A*:

$\mathrm{E}_1 = \{\{1,2,3\}\}$, $\mathrm{E}_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $\mathrm{E}_3 = \{\{2\},\{1,3\}\}$, $\mathrm{E}_4 = \{\{3\},\{1,2\}\}$, $\mathrm{E}_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

Число всех разбиений *n-элементного* множества называется *числом Белла* и обозначается B_n. В нашем случае *n = 3* и $B_3 = 5$.

Семейство E называется *покрытием* множества *A*, если каждый элемент *A* принадлежит *хотя бы одному из подмножеств* A_i : $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Для нашего множества *A = {1,2,3}* покрытиями будут являться, например, семейства: $\mathrm{E}_6 = \{\{1,2\}\{1,3\}\}$ или $\mathrm{E}_7 = \{\{2,3\},\{1,3\},\{2\}\}$.

Семейство E называется *дизъюнктным*, если элементы этого семейства попарно не пересекаются, то есть каждый элемент множества *A* принадлежит не более чем одному из множества A_i: $A_i \cap A_j = \varnothing$ *для всех* $i \neq j$. Семейство $E_8 = \{\{1\},\{2\}\}$ для нашего примера является дизъюнктным.

Как видим, разбиение множества A можно определить как *дизъюнктное покрытие этого* множества.

Булеан. Прямое произведение множеств

Множество *всех* подмножеств множества A называется *булеаном* множества A и обозначается $P(A)$ или 2^A.

Для конечного множества A мощность его булеана: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Пусть дано множество $A = \{1, 2, 3\}$. Найдем его булеан. $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, (2,3)\{1,2,3\}\}$. Как видим, элементами булеана являются множества, и, как мы уже отмечали, пустое множество $\varnothing$ и само множество A являются подмножествами A и входят в булеан. Мощность булеана нашего множества A равна: $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$.

Над множествами определена еще одна операция – *декартово произведение* множеств. Дадим вначале определение упорядоченной пары.

Упорядоченная пара на множествах A и B, обозначаемая записью (a, b), определяется не только самими элементами $a \in A$ и $b \in B$, но и порядком, в котором они записаны. И в этом состоит ее существенное отличие от неупорядоченной пары. В неупорядоченной паре порядок элементов не существенен, она берется в фигурные скобки и $\{1,3\} = \{3,1\}$ (как мы знаем, это одно и то же множество).

Если $A = B$, то говорят об упорядоченной паре на множестве A.

Равенство упорядоченных пар определяется следующим образом:

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

В общем случае, $(a,b) \neq (b,a)$.

Простейший и важнейший пример использования упорядоченных пар дает аналитическая геометрия. Если на плоскости введена некоторая прямоугольная система координат, то каждая точка плоскости однозначно задается упорядоченной парой действительных чисел – координатами этой точки. Точка с координатами (1,3) совсем не то же самое, что точка с координатами (3,1):

$(1,3) \neq (3,1)$.

Обобщенным понятием упорядоченной пары является упорядоченный *n- набор*, или *кортеж*. Часто кортеж *называют вектором. Число n называется длиной кортежа (или размерностью кортежа)*, а элемент a_i - *i-й проекцией* или *i-й компонентой кортежа*. В отличие от конечного множества $\{a_1,...,a_n\}$ кортеж $(a_1,...,a_n)$ на множествах $A_1,....,A_n$ характеризуется не только входящими в него элементами $a_1 \in A_1 ... a_n \in A_n$, но и порядком, в котором они перечисляются, и компоненты кортежа могут совпадать. Как и для упорядоченных пар, роль порядка в кортеже фиксируется определением равенства кортежей. Два кортежа $(a_1,...,a_n)$ и $(b_1,...,b_n)$ на множествах $A_1,...,A_n$ равны, если: $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть A и B – два множества. *Прямым* (*декартовым*) *произведением* двух множеств A и B называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству A, а второй принадлежит множеству B:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Например, пусть заданы множества A = {1,2} и B = {3,4}. Тогда $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.

В общем случае, $A \times B \neq B \times A$.

Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1,...,A_n$ называют декартовым (прямым) произведением множеств $A_1,...,A_n$ и обозначают $A_1 \times ... \times A_n$.

$A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1,...,a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\}$.

Для нашего примера зададим еще множество C = {5,6}.

Тогда, $A \times B \times C = \{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\}$. Получили *8* упорядоченных троек.

Если все множества A_i, $i = \overline{1,n}$ равны между собой, то указанное декартово произведение называют *n-й декартовой степенью множества A* и обозначают A^n. Таким образом, *степенью множества A* называется его прямое произведение самого на себя: $A^n = \underbrace{A \times ... \times A}_{n-раз}$.

Если мощность множества A равна n, а мощность множества B равна m, то мощность прямого произведения: $|A \times B| = n \cdot m$.

Соответственно, $|A^n| = |A|^n$.

Задание.

На универсуме $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ заданы множества A, B, C.

Варианты заданий и множеств указаны в таблице 1. Для указанных множеств:

1. Для заданного множества A построить булеан.
2. Алгоритмом «*слияние*» построить объединение множеств A и B.
3. Найти прямое произведение $A \times B$ и его мощность.
4. Вычислить выражение согласно варианту, проиллюстрировать результат диаграммой Эйлера-Венна.
5. Указать примеры покрытий и разбиения множества A.

Пункты 1-4 реализовать программно, пункт 5 – вручную.

Таблица 1 – Варианты заданий

№	Множества			Выражение
	A	*B*	*C*	
1.	{1,2,3,4,5,6}	{5,6,7,8}	{2,3,5,7,8}	$(A\setminus B)\cap C$
2,	{2,3,4,5}	{3,4,6,7}	{4,8,9}	$(B\Delta A)\setminus C$
3.	{2,3,4,5,6}	{3,4,6,7}	{3,5,8,9}	$(A\Delta B)\cup C$
4.	{1,2,3,4,5}	{4,5,6,7}	{3,5,7,8}	$\overline{A}\cup(B\cap C)$
5.	{1,3,4,7}	{3,5,6,7,8}	{2,4,5,7}	$A\cap\overline{(B\setminus C)}$
6.	{2,4,5,8}	{2,3,6,8,9}	{1,4,7,8,9}	$A\cup(\overline{B}\cap C)$
7.	{1,2,6,9}	{2,3,5,6,7}	{2,3,5,6,8}	$(A\cup B)\setminus C$
8.	{1,2,4,7,8}	{2,4,5,6,8}	{3,4,5,8,9}	$(A\cup B)\cap\overline{C}$
9.	{1,2,3,4,6,9}	{3,4,5,8,9}	{5,6,7,9}	$A\cap(B\Delta C)$
10.	{1,3,5,6,7,8}	{2,3,4,5,8}	{1,2,3,5,6}	$(A\setminus B)\setminus C$
11.	{1,3,5,6,7,8}	{2,3,5,7,9	{3,4,6,7}	$(A\setminus \overline{B})\cap C$
12.	{1,3,4,7,8,9}	{2,4,6,8}	{1,3,4,7,8,9}	$\overline{(A\cup B)}\cap C$
13.	{2,3,4,5,6}	{3,4,6,7}	{3,5,8,9}	$(A\Delta B)\cap C$
14.	{1,3,5,6,7,8}	{2,3,4,5,8}	{1,2,3,5,6}	$A\setminus(B\setminus C)$
15.	{1,2,3,4,5,6}	{5,6,7,8}	{2,3,5,7,8}	$A\setminus(B\cap C)$
16.	{1,2,3,4,5}	{4,5,6,7}	{3,5,7,8}	$A\setminus(B\cup C)$
17.	{1,2,3,4,5,6}	{5,6,7,8}	{2,3,5,7,8}	$A\setminus(B\cup C)$
18.	{2,4,5,8}	{2,3,6,8,9}	{1,4,7,8,9}	$(B\cap C)\setminus\overline{A}$

ТЕМА №2. *ОТНОШЕНИЯ*

Понятие отношения используют для обозначения связи между объектами или понятиями.

Для строго математического описания любых связей между элементами двух множеств введем понятие бинарного отношения.

Пусть A и B - два множества. *Бинарным отношением* R из множества A во множество B (между множествами A и B) называется подмножество прямого произведения A и B:

$$R \subseteq A \times B .$$

Для бинарных отношений обычно используется *инфиксная* форма записи:

$aRb : (a,b) \in R \wedge R \subseteq A \times B$, означающая, что элементы a и b находятся в отношении R.

Если $A = B$, то говорят, что R есть бинарное отношение на множестве A.

Таким образом, бинарное отношение R – это множество, элементами которого являются упорядоченные пары, связанные данным отношением на множестве $A \times B$ *или на множестве* A^2 $(A \times A)$.

По аналогии с бинарными отношениями введем понятие n - *местного* (*n-арного*) отношения: n – *местным отношением* R на множествах $A_1, A_2, ..., A_n$ называется подмножество прямого произведения множеств:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n .$$

Наиболее изученным и употребляемым типом отношений являются бинарные отношения. Будем рассматривать бинарные отношения, слово «*бинарные*» в дальнейшем может быть опущено.

Рассмотрим примеры бинарных отношений:

1. Все множество $A \times B$ есть отношение множеств A и B, называемое *универсальным отношением*. Если мощность множества $|A \times B| = m$, то существует 2^m различных подмножеств множества $A \times B$ и, следовательно, существует 2^m различных отношений на множестве $A \times B$.
2. Отношения $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, определенные на соответствующих числовых множествах, являются примерами бинарных отношений. Например, зададим отношение на множестве целых чисел Z следующим образом: $R = \{(a,b) \in Z^2 \mid a^2 + b^2 = 25\}$ и пара $(3,4)$ принадлежит данному отношению R.
3. Отношения *«быть сыном»*, *«быть братом»*, *«быть соседом»* и т.д., определенные на множестве людей. Если A – множество людей, то $R = \{(a,b) \in A^2 \mid a \ -\text{сын}\ b\}$ есть бинарное отношение на множестве A.
4. Пусть A – множество товаров в магазине, а N – множество натуральных чисел. Тогда $R = \{(a,b) \in A \times B \mid a \ - \ \text{цена}\ b\}$ - отношение множеств A и B.
5. Отношения параллельности и перпендикулярности прямых, отношения подобия и равенства треугольников и т.п. отношения, используемые в геометрии.

Отношение между *конечными* множествами может задаваться различными способами:

1) с помощью подходящего предиката;
2) как матрица (или таблица);
3) как орграф;
4) как множество упорядоченных пар (перечислением).

Рассмотрим пример.

Пусть на множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ задано отношение $aR_1b : a > b$. Зададим его различными способами.

1. С помощью предиката: $R_1 = \{(a,b) \in A \times A \mid a > b\}$.

2. Построим матрицу отношения. Перенумеруем элементы множества A в соответствии с порядком, в котором они записаны, тогда отношение можно представить матрицей R, элементы которой определяются условием:

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j \\ 0, & \text{если } \neg(a_i R a_j) \end{cases}.$$

Другими словами, на пересечении i - *й* строки и j - *го* столбца стоит *1*, если i – *ый* элемент множества A находится в отношении R с j – *м* элементом множества и *0* в противном случае. Таким образом, матрица отношений состоит из *0* и *1* и является *булевой матрицей.*

При табличном представлении в первой строке и первом столбце указаны элементы множества A в порядке их следования. Заполнение ячеек таблицы аналогично матричному заполнению. Построим матрицу:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Перечислением пар: $R_1 = \{(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(4,3),(5,3),(6,3),(5,4),(6,4),(6,5)\}$.

4. Построим орграф. Вершинам ориентированного графа соответствуют элементы множества A, дуга имеет направление от a к b, если элемент a находится в отношении с элементом b: aRb. Если a не находится в отношении с b, дуга отсутствует, если в отношении имеется пара (a,a), то ей соответствует петля. На рисунке *1* приведен орграф нашего отношения R_1.

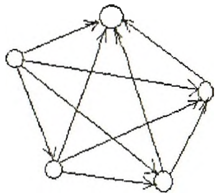

Рисунок 1 – Орграф отношения R_1

Введем несколько понятий, связанных с отношениями.

Пусть R есть отношение на $A \times B$: $R \subseteq A \times B$, $(a,b) \in R$ и $a \in A$, $b \in B$.

Область определения отношения:

$D(R) = \{a \mid (a,b) \in R\}$ - множество всех *первых элементов a* упорядоченных пар из R. Для нашего отношения $R_1 \subseteq A \times A$, $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$:

$D(R_1) = \{3,4,5,6\}$

Множество значений отношения:

$E(R) = \{b \mid (a,b) \in R\}$ - множество всех вторых элементов b упорядоченных пар из R.

$E(R_1) = \{2,3,4,5\}$.

Обратное отношение:

Обратное отношение R^{-1} на множестве $B \times A$ определяется следующим образом:

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.

Таким образом, $(b,a) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in R$, другими словами R^{-1} связывает те же элементы, но в обратном порядке.

Можно записать R^{-1} в другом виде:

$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$.

Если задано отношение на двух множествах: $R \subseteq A \times B$, то тогда $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Если мы рассматриваем отношение на множестве A: $R \subseteq A \times A$, то $R^{-1} \subseteq A \times A$.

Для нашего отношения R_1 обратным отношением будет:

$R_1^{-1} = \{(b,a) \mid a,b \in A \wedge a > b\}$, или в иной записи:

$R_1^{-1} = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge b > a\}$

Найдем обратное отношение для нашего отношения R_1.

$R_1^{-1} = \{(2,3),(2,4).(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$.

Мы уже определяли *универсальное отношение* для множеств A и B как множество их прямого произведения:

$U = A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Если отношение задано на множестве A, то $U_A = A \times A = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A\}$.

Матрица универсального отношения состоит из одних единиц.

Определим *тождественное отношение*, называемое также *диагональным отношением* на множестве A:

$I = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

Для нашего множества $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$:

$I_1 = \{(2,2),(3,3),(4,4)(5,5),(6,6)\}$.

Операции над отношениями

Поскольку R - это *множество* упорядоченных пар, то над отношениями можно выполнять операции объединения, пересечения, разности, дополнения.

Зададим на нашем множестве $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ еще одно отношение R_2:

$R_2 = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a = b\}$. Отношению R_2 принадлежат пары:

$R_2 = \{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

Тогда:

$R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a \geq b\}$

$R_1 \cap R_2 = \emptyset$

$R_1 \setminus R_2 = R_1$

$R_2 \setminus R_1 = R_2$

Введем дополнение отношения:

$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R \wedge (a,b) \in U\}$. Здесь U – универсальное отношение. Тогда:

$\overline{R_1} = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a \leq b\}$.

$\overline{R_2} = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a \neq b\}$.

Для бинарных отношений определена специальная операция, называемая *композицией.*

Пусть R - отношение между множествами A и B, $R \subseteq A \times B$ и S - отношение между множествами B и C, $S \subseteq B \times C$. *Композицией отношений* S и R называется бинарное отношение между A и C, которое обозначается $S \circ R$ и определяется следующим образом:

$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C \wedge \exists\ b \in B\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$.

Расшифруем нашу запись:

Композицией отношений S и R называется множество упорядоченных пар (a,c), таких, что $a \in A$ и $c \in C$, и существует такой элемент $b \in B$, что упорядоченная пара $(a,b) \in R$ и упорядоченная пара $(b,c) \in S$.

Новое отношение устанавливает связь между элементами множеств A и C следующим образом: оно действует из A в B посредством R, а затем из B в C посредством S, используя элементы из множества B в качестве посредников.

Для двух бинарных отношений R и S, заданных на множестве A, их композиция является бинарным отношением на том же множестве.

Композицию $R \circ R$ бинарного отношения R на некотором множестве с самим собой называют *квадратом бинарного отношения* R и обозначают R^2, соответственно, композицию отношения R на себя n раз называют *n-степенью* бинарного отношения.

Обратите внимание на запись определения $S \circ R$. Из записи следует, что отношения применяются справа налево: вначале применяется R, затем S, т. е. справедливо соотношение:

$(S \circ R)(a) = S(R(a))$.

Данная терминология является международной.

Например, для отношений $R = \{(3,1),(6,2)\}$ и $S = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, их композиции соответственно равны: $S \circ R = \{(3,3),(6,2)\}$, $R \circ S = \{(1,1)\}$.

Если два отношения, R и S заданы перечислением пар, их композицию $S \circ R$ можно построить по следующему правилу:

В отношении R рассматриваем второй элемент каждой пары, ищем в отношении S равный ему первый элемент пары. Если находим совпадение, записываем новую пару, состоящую из первого элемента R и второго элемента S. Одинаковый элемент обеих пар выступает посредником в построении нового отношения.

Как видим из нашего примера, в общем случае:

$R \circ S \neq S \circ R$,

т. е. операция композиции не обладает *свойством коммутативности.*

Рассмотрим еще примеры.

Пусть R и S – бинарные отношения, заданные на множестве натуральных чисел N:

$R = \{(a,b) \mid a,b \in N \wedge b = a^2\}$ и $S = \{(a,b \mid a,b \in N \wedge b = a+1\}$. Тогда:

$S \circ R = \{(a,b) \mid a,b \in N \wedge b = a^2 + 1\}$ и $R \circ S = \{(a,b) \mid a,b \in N \wedge b = (a+1)^2\}$.

Если отношения на числовых множествах заданы в аналитическом виде, можно также воспользоваться правилом:

Для нахождения композиции $S \circ R$ выражаем из R второй элемент через первый и подставляем его в S в качестве первого элемента.

Если отношения, R и S заданы матрицами, матрица их композиции определяется как булево (или логическое) произведение соответствующих матриц. Пусть отношение R задано матрицей M, а отношение S – матрицей N. Тогда матрица композиции отношений $S \circ R$ определяется как $M \times N$. Здесь $\times$ - операция булевого произведения матриц: в обычной операции произведения матриц, сложение заменяется логическим «или» (дизъюнкцией), а умножение - логическим «и» (конъюнкцией).

Пусть на множестве $B = \{1, 2, 3\}$ заданы отношения R и S: $R = \{(a,b) \mid a,b \in B \wedge a \cdot b - \text{четное число}\}$, $S = \{(a,b) \mid a,b \in B \wedge a > b\}$. Зададим отношения перечислением пар: $R = \{(1,2), (2,1), (2.2), (3,2), (2,3)\}$ и $S = \{(2,1), (3,1) (3,2)\}$. Найдем композицию отношений $S \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2)\}$. Теперь зададим наши отношения матрицами, матрица M для отношения R и матрица N для отношения S. Имеем:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем композицию наших отношений через булево произведение матриц: $S \circ R = M_R \times N_S$. Первым выполняется отношение R, поэтому в произведении матрица отношения R - M_R стоит также первой. В результате получим матрицу P.

$$P = M_R \times N_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поясним, каким образом мы получили элементы первой строки. Имеем:
$P_{11} = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) = 1$, $P_{12} = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$,
$P_{13} = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$.

Пусть на множестве людей A заданы отношения:
$R = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a - \textit{сестра } b\}$ и $S = \{(b,c) \mid b,c \in A \wedge b - \textit{мать } c\}$. Тогда:
$S \circ R = \{(a,c) \mid a,c \in A \wedge a - \textit{тетя } c\}$, и $S \circ S = \{(a,b) \mid a,b \in A \wedge a - \textit{бабушка } b\}$.

Для обратного отношения и операции композиции выполняются следующие свойства:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$.
2. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.
3. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

Третье свойство означает, что операция композиции *ассоциативна.*

Свойства бинарных отношений

Бинарные отношения обладают специальными свойствами. Рассмотрим их.
Бинарное отношение R на множестве A называют:

1. *Рефлексивным*, если пара (a, a) принадлежит R для ***всех*** элементов a из множества A. В символьном виде это может быть записано: $\forall a \in A: \ aRa$.

   Бинарные отношения равенства и подобия на множестве геометрических фигур рефлексивны: каждый треугольник равен самому себе и подобен самому себе. Рефлексивны все отношения равенства: равенство чисел, равенство множеств, равенство векторов. Также рефлексивным является отношение: $\leq$, $\geq$, $\subseteq$ на соответствующих множествах. На главной диагонали матрицы рефлексивного отношения стоят единицы. Для рефлексивного отношения выполняется: $I \subseteq R$.
2. *Антирефлексивным,* если оно не выполняется на паре (a,a) для любого элемента a из A. В символьном виде: $\forall a \in A: \ \neg(aRa)$. Напомним что $\neg$ зна-

чок логического отрицания, т.е. элемент a не находится в отношении с a. Отношения <, > на числовых множествах, отношение «быть родителем» на множестве людей являются антирефлексивыми. На главной диагонали матрицы антирефлексивного отношения стоят нули. Для данного отношения $R \cap I = \varnothing$.

3. *Симметричным*, если для всех a и b, принадлежащих A, из $(a,b) \in R$ следует, что $(b,a) \in R$. В символьном виде: $\forall a,b \in A$: $aRb \Rightarrow bRa$. Все бинарные отношения в геометрии типа равенства и подобия симметричны, отношения $\perp$, $\|$ прямых на множестве прямых плоскости также симметричны. Матрица симметричного бинарного отношения на A симметрична относительно главной диагонали. Для симметричного отношения $R = R^{-1}$.
4. *Антисимметричным*, если для всех a и b из A, из принадлежности (a, b) и (b,a) отношению R следует, что a = b. В символьном виде: $\forall a,b \in A$: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$. Отношения $\le$, $\ge$, определенные на числовых множествах, «a – делитель b» на множестве N, отношение нестрогого включения множеств $\subseteq$ на системе подмножеств некоторого множества A, являются примерами антисимметричных отношений.
5. *Транзитивным*, если для всех a и b из A из того, что $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$, следует, что $(a,c) \in R$. В символьном виде $\forall a,b,c \in A: aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$. Отношения $\le$, $\ge$, <, >, «a – делитель b» на числовых множествах, отношение строгого $\subset$ и нестрогого включения множеств $\subseteq$ на системе подмножеств некоторого множества A обладают свойством транзитивности.

Рассмотрим и охарактеризуем некоторые отношения.

1. Пусть на множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ перечислением пар задано отношение $R = \{(1,1), (2,2), (3.3), (4,4), (5.5), (1,2), (2,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3)\}$.
   Отношение является рефлексивным, так как пары вида (a, a) присутствуют для всех $a \in A$: *(1,1), (2,2), (3.3), (4,4), (5.5)*.
   R – симметричное отношение, т. к. из присутствия пары (a, b) следует присутствие пары (b,a): *(1,2)* и *(2,1)*; *(2,4)* и *(4,2)*; *(3,5)* и *(5,3)*. R – не обладает свойством транзитивности: в отношении присутствуют пары (4,2), (2,1), а пары (4,1) в отношении нет.
   Чтобы сказать, что отношение не обладает некоторым свойством, достаточно найти *хотя бы один* пример такого невыполнения.
   R не является антисимметричным, поскольку $(1,2) \in R$ и $(2,1) \in R$, но $2 \ne 1$. Отношение обладает указанным свойством, если это свойство выполняется для всех возможных случаев.
2. Рассмотрим отношение S, заданное на множества натуральных чисел N:, $S = \{(a,b) \mid a,b \in N \wedge a \ - \ \text{делителл } b\}$.
   S – рефлексивное отношение, поскольку a всегда делит сам себя и $(a,a) \in S$ $\forall a \in N$.

Отношение S не является симметричным, поскольку, например, 2 является делителем 8, обратное утверждение не является верным.

Отношение S является антисимметричным, поскольку из предположений: a делит b и b делит a, немедленно вытекает, что $a = b$. S - транзитивное отношение. Пусть a делит b, это означает, что $b = ma$ для некоторого $m \in N$. И пусть b делит c, что означает $c = nb$ для некоторого $n \in N$. Из этих двух посылок вытекает, что $c = (nm)a$ и, следовательно, a делит c.

3. Рассмотрим отношение T, заданное на множества целых чисел Z: $T = \{(a,b) \mid a,b \in Z \wedge a \cdot b \text{ – четное число}\}$.

   Отношение не является рефлексивным, поскольку. не для всякого $a \in Z$, a^2 (например, $5^2 = 25$) является четным числом. Из этих же соображений, отношение T не является антирефлексивным. T – симметричное , поскольку операция умножения коммутативна и $a \cdot b = b \cdot a$.

   Отношение T не является транзитивным, поскольку, например, $3 \cdot 4$ – четное число и $4 \cdot 5$ – четное число, но $3 \cdot 5$ – нечетное число.

   Отношение T не является также антисиметричным.

Замыкание отношений

Если отношение R на множестве A не обладает тем или иным свойством P, то его можно попытаться продолжить до отношения R^*, которое будет иметь нужное свойство. Под «продолжением» мы понимаем присоединение некоторых упорядоченных пар к подмножеству $R \subset A \times A$ так, что новое полученное множество уже будет обладать требуемым свойством. Ясно, что исходное множество R будет подмножеством R^*. В том случае, если вновь построенное множество R^* будет минимальным среди всех расширений R с выделенным свойством, то говорят, что R^* является замыканием относительно данного свойства P.

Таким образом, *рефлексивное замыкание* R есть наименьшее рефлексивное отношение на A, содержащее R как подмножество. Очевидно, $R \cup I$ - есть рефлексивное замыкание R.

Симметричное замыкание есть наименьшее симметричное отношение на A, содержащее R как подмножество, И $R \cup R^{-1}$ есть симметричное замыкание R.

Транзитивное замыкание есть наименьшее транзитивное отношение на A, содержащее R как подмножество. Если A – конечное множество, содержащее n элементов, то отношение $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ есть транзитивное замыкание R.

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{a, b, d, l\}$ на котором задано отношение $R = \{(a,b), (b,d), (d,l)\}$. Отношение не рефлексивно, не симметрично и не транзитивно.

Рефлексивным замыканием будет отношение:

$R' = \{(a,b),(b,d),(d,l),(a,a),(b,b),(d,d),(l,l)\}$.

Симметричным замыканием будет отношение:

$R^{s} = \{(a,b),(b,d),(d,l),(b,a),(d,b),(l,d)\}$.

Транзитивным замыканием будет отношение:

$R^{*} = \{(a,b),(b,d),(d,l),(a,d),(b,l),(a,l)\}$.

Отношение эквивалентности

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве A называется *отношением эквивалентности.*

Отношениями эквивалентности, определенными на соответствующих множествах, являются: отношения равенства чисел и множеств, отношение равномощности множеств, отношение подобия треугольников, || прямых на множестве прямых плоскости, отношение *«иметь одинаковый возраст»*, *«быть на одном курсе»* на множестве всех людей и т.д.

Зададим отношение R на множестве $A = \{2,3,4,5.6\}$:

$R = \{(a,b) \mid a,b \in A \ \wedge\ a + b - \text{четное число}\}$.

Это отношение эквивалентности.

1. Оно рефлексивно, поскольку $a + a = 2a$ – всегда четное число для $\forall\ a \in A$.
2. Симметрично, поскольку $a + b = b + a$ и, если в отношении присутствует пара (a,b), то, следовательно, присутствует и пара (b,a).
3. И наконец, транзитивно, поскольку из того, что $(a + b)$ – четное число и $(b + c)$ – четное число, следует, что и $(a + c)$ также является четным числом. Как мы знаем, сумма двух чисел является четной, если оба числа четны, либо оба не четны.

Пусть R - эквивалентность на множестве A и $a \in A$. Множество всех элементов множества A, эквивалентных a, называется *классом эквивалентности для a* по отношению R и обозначается:

$[a] = \{b \in A \mid bRa\}$ или $[a] = \{b \in A \mid (b,a) \in R\}$.

Это разбиение множества на классы эквивалентности можно представить себе следующим образом. Пусть A – это множество разноцветных шаров, на котором задано отношение R:

$R = \{(a,b) \mid a,b \in A \ \wedge\ a \text{ и } b \text{ имеют одинаковый цвет}\}$.

Поскольку R - отношение эквивалентности, то каждый класс эквивалентности будет состоять из шаров, имеющих одинаковый цвет, например, первый класс состоит из шаров красного цвета, второй – синего и т.д.

Построим классы эквивалентности для нашего отношения R:

$[2] = [4] = [6] = \{2, 4, 6\}$.

$[1] = [5] = \{3, 5\}$.

Фактически, мы имеем 2 класса эквивалентности: {четные числа} и {нечетные числа}.

Как мы видим, любой элемент класса эквивалентности порождает класс эквивалентности, т.е. если $b \in [a]$, *то* $[a] = [b]$.

Отметим, что в силу свойства рефлексивности, класс эквивалентности не пуст, т.к. $a \in [a]$ для любого элемента $a \in A$. С другой стороны, никакой элемент не может принадлежать двум различным классам эквивалентности.

Множество всех классов эквивалентности называется *фактор множеством множества A по эквивалентности R* и обозначается $[A]_R$.

Построим фактор множество для нашего отношения эквивалентности.

$[A]_R = \{\{2,4.6\},(3,5\}\}$.

Фактор множество, является *разбиением* множества A и является также подмножеством булеана: $[A]_R \subset 2^A$.

Основная роль отношения эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет некоторый *признак,* позволяющий разделить множество на непересекающиеся классы, называемые классами эквивалентности. Получается система классов, обладающая следующими свойствами:

1) она образует разбиение, т.е. классы попарно не пересекаются;
2) любые два элемента из одного класса эквивалентны;
3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны.

Приведем еще один важный пример отношения эквивалентности.

Рассмотрим множество целых чисел Z и зададим на нем *отношение сравнимости по модулю числа n*, где *n* натуральное число и $n > 1$. Целое число a сравнимо с целым числом b по модулю n, что обозначается, $a \equiv b \pmod{n}$, если разность $(a - b)$ делится на n без остатка. Отношение сравнимости по модулю числа n на множестве Z является отношением эквивалентности и разбивает множество Z на n классов эквивалентности. В каждом классе находятся числа, дающие одинаковый остаток от деления на n.

Например, пусть $n = 3$, отношению R сравнимости по модулю 3 будут принадлежать пары:

$R = \{\dots, (-5, -2), (-4, -1), (-2, -2), (-1, -4), (0, 3), (3, 0), (3, 3), (3, 6)\dots\}$.

Имеем 3 класса эквивалентности, к первому относятся числа, дающие остаток 0 при делении на 3 (кратные 3), ко второму – остаток 1 и к третьему - остаток 2.

Имеем:

$[0] = \{\dots -6, -3, 0, 3, 6,\dots\}$;

$[1] = \{\dots -5, -2, 1, 4, 7,\dots\}$;

$[2] = \{\dots -4, -1, 2, 5, 8,\dots\}$;

Эти классы эквивалентности по отношению сравнимости по модулю n на множестве Z называются *классами вычетов по модулю n*. Классы вычетов вместе с операцией сложения образуют алгебраическую систему – *группу*.

Отношение порядка

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется отношением частичного (нестрогого) порядка.

Отношение частичного порядка принято обозначать знаком $\leq$, это обозначение является условным.

Если отношение R на множестве A является отношением частичного порядка, то $(A, \leq)$ называют *частично-упорядоченным множеством или ЧУ-множеством*.

Рассматриваемое нами ранее отношение $S = \{(a,b) \mid a,b \in N \wedge a - \text{делитель } b\}$, определенное на множестве натуральных чисел N, является отношением частичного порядка, а $(N, \leq)$ - *ЧУ-множеством*.

Пусть $A=\{1, 2, 3\}$, его булеан $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, (2,3)\{1,2,3\}\}$. Определим отношение S между элементами булеана (подмножествами A) как отношение нестрогого включения $\subseteq$: первый элемент пары является подмножеством второго элемента. Таким образом, пара $(\{1\},\{1,2\}) \in S$, т.к. $\{1\} \subset \{1,2\}$, но $(\{1.3\},\{3\}) \notin S$, поскольку $\{1.3\} \not\subset \{3\}$. Отношение S является отношением частичного порядка, а $(P(A), \leq)$ - *ЧУ-множеством*. Здесь знаком $\leq$ обозначено $\subseteq$.

Два элемента a и b *ЧУ-множества* $(A, \leq)$ называются *сравнимыми* по отношению порядка R, если выполняется $a \leq b$ или $b \leq a$.

Множество A, на котором задано отношение *частичного порядка*, называется *полностью упорядоченным* (линейно упорядоченным, цепью), если каждые два элемента *ЧУ-множества* $(A, \leq)$ сравнимы.

Рассмотрим примеры.

Элементы $\{1\},\{1,2\}$ в *ЧУ–множестве* $(P(A), \subseteq)$, где $A=\{1, 2, 3\}$, сравнимы между собой, а $\{3\}$, $\{1, 2\}$ нет.

Пусть на множестве $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ задано отношение частичного порядка T: $a - \text{делитель } b$. Числа 3 и 15 сравнимы между собой, а 6 и 15 – нет.

На этом же множестве отношение R: $a \leq b$ (обычное меньше или равно) задает линейный порядок, полностью упорядочивает множество B. Отношения $\leq$, $\geq$, полностью упорядочивают множества N, Z, Q, R.

Отношения частичного порядка на множестве удобно задавать *диаграммами Хассе*. Диаграмма Хассе представляет собой граф (иногда орграф), в котором петли не указываются. Вершины графа изображают элементы частично упорядоченного множества A, и если $a \leq c$, для элементов a и c множества A, то вершина a помещается ниже вершины c и соединяется с ней ребром, если не существует такое $b \neq a, c$ что $a \leq b \leq c$. Если же такое b существует и $a \leq b \leq c$, то линия от a к c не указывается.

Заметим, что диаграммы Хассе для *ЧУ-множеств* $(P(A), \subseteq)$ и $(B, \leq)$, где $\leq$ есть отношение $a - \text{делитель } b$, совпадают. Это означает, что эти частично упорядоченные множества имеют одинаковую структуру. Такие *ЧУ-множества* называются *изоморфными*. Ниже, на рисунках *2а, 2б* приведены диаграммы Хассе наших двух *ЧУ-множеств*.

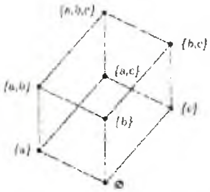

Рисунок 2а – $(P(A), \subset)$

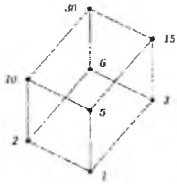

Рисунок 2б – $(B, \leq)$

Задание.

На множестве $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ заданы отношения R_1 и R_2 согласно вашему варианту. Варианты заданий указаны в таблице 2.

1. Для заданных отношений составить матрицы отношений. Для одного из отношений построить орграф отношения.
2. Определить область определения и множество значений отношений.
3. Найти обратные отношения и дополнения отношений.
4. Указать свойства отношений.
5. Для отношения, не обладающего свойством транзитивности, построить транзитивное замыкание.
6. Найти композицию $R_1 \circ R_2$ и $R_2 \circ R_1$ отношений, определить, обладает ли операция композиции отношений свойством коммутативности.
7. На множествах $B = \{1,2,3,4\}$ и $C = \{5,6,7,8\}$ задано отношение S согласно вашему варианту. Определить, является ли заданное отношение функцией и если да, определить тип функции (инъекция, сюръекция, биекция). Задание проиллюстрировать графически.

Таблица 2 – Варианты заданий

№	*Отношение* R_1	*Отношение* R_2	*Отношение* S
1.	$a \neq b$	$a - b = 3$	*S = (1,5),(2,5),(3,6),(4,8)*
2.	$a \leq b$	$a = 3b$	*S = (1,5),(2,8),(4,6),(4,7)*
3.	$a < b$	$b = a + 1$	*S = (1,5),(2,5),(3,6),(3,7)(4,8)*
4.	$a > b$	$b = a + 3$	*S = (1,8),(2,6),(3,5),(4,7)*
5.	$a \equiv b(\mathrm{mod}3)$	$a = 2b$	*S = (1,5),(2,5),(3,5),(4,7)*
6.	$ab = 8$	$a + b = 9$	*S = (1,7),(2,6),(4,5)*
7.	$(a - b)$ *- четное число*	$b = a^2$	*S = (1,8),(2,6),(3,8),(4,6)*
8.	a *- делитель* b	$a + b = 10$	*S = (1,5),(2,5),(3,6),(4,8)*
9.	$(a + b)$ *- четное число*	$(a + b) < 7$	*S = (1,5),(2,7),(3,6),(4,8)*
10.	$a \equiv b(\mathrm{mod}4)$	$a + b = 8$	*S = (1,8),(2,7),(3,5),(4,6)*
11.	$(a + b)$ *- нечетное число*	$a - b = 4$	*S = (1,5),(2,5),(3,6),(4,8),(3,8)*
12.	b*- делитель* a	$b = 3a$	*S = (1,5),(2,5),(3,6),(4,8)*
13.	$(a \cdot b)$ *- нечетное число*	$b = a + 4$	*S = (1,6),(2,8),(3,5),(4,7)*
14.	$a \geq b$	$a = b^2$	*S = (1,5),(2,6),(3,7),(4,6)*

ТЕМА №3. *БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ*

Пусть задано множество $B = \{0, 1\}$. Тогда отображение $f : B^n \to B$ множества B^n на множество B называется *булевой функцией n* переменных, и ее можно записать в виде $f(x_1,...,x_n)$. Булеву функцию называют также *переключательной функцией*. Переменные булевой функции, как и сама булева функция, могут принимать только *два значения*: *0* или *1*. Таким образом, булева функция определена на множестве всех упорядоченных наборов, состоящих из нулей и единиц, и сама принимает два возможных значения: *0* или *1*.

Каждый набор значений *n* переменных $(a_1,...,a_i,...,a_n)$ может быть представлен *n- разрядным двоичным числом*. Количество двоичных *n*- разрядных чисел равно 2^n. Поэтому любая булева функция *n* переменных может быть определена на 2^n наборах. И, таким образом, мы имеем набор 2^n значений функции *n* переменных. Каждому такому набору значений булевой функции мы можем поставить в соответствие 2^n- разрядное двоичное число. Количество 2^n- разрядных двоичных чисел равно 2^{2^n} и, следовательно, число различных булевых функций *n* переменных равно 2^{2^n}.

Например, булева функция двух переменных определена на *4* наборах: *(00, 01, 10, 11)*. Количество таких функций – *16*.

Булева функция может быть задана *таблицей истинности*, где каждому набору значений переменных булевой функции ставится в соответствие значение функции. Каждому набору переменных можно поставить в соответствие номер, равный десятичной записи двоичного числа. Например, (*0, 0, 0*) – *нулевой набор*, (*0, 1, 1*) - третий набор и т.д. Набор *n* переменных, содержащий все единицы (*1, 1,...,1*), называют *единичным* набором. Наборы расположены сверху вниз по возрастанию двоичного числа. Рассмотрим булевы функции одной и двух переменных.

Имеем четыре булевых функций *одной переменной*.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функция $f_0(x)$ тождественно равна *0*. Она называется *константой нуль* и обозначается $f_0(x) = 0$.

Функция $f_1(x)$ тождественно равна значению переменной x и называется *тождественной функцией* и обозначается $f_1(x) = x$.

Номер булевой функции соответствует десятичной записи двоичного числа, составленного из значений булевой функции. Двоичное число записывается слева направо, начиная со значения булевой функции на нулевом наборе. В данном случае это $01_2 = 1_{10}$.

Функция $f_2(x)$ принимает значения, противоположные значениям переменной x. Эта функция называется *инверсией* или *отрицанием* и обозначается

$f_2(x) = \overline{x}$. Для обозначения инверсии будем также использовать символ логического отрицания, $\neg$.

Функция $f_3(x)$ тождественно равна *1*. Она называется *константой единица* и обозначается $f_3(x) = 1$.

Константы нуль и единицу принято считать *нуль – местной* булевой функцией.

Функций двух переменных – *16*.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рассмотрим основные булевы функции.

Функция $f_1(x,y)$ - это известная нам *конъюнкция* или «*логическое и* » (*логическое умножение*). Обозначение: $x \wedge y$, $x \,\&\, y$, $x \cdot y$, xy.

Конъюнкция равна единице тогда и только тогда, когда значения *всех* ее переменных *равны единице*. Для конъюнкции справедливы следующие соотношения:

$x \wedge 1 = x$,

$x \wedge 0 = 0$,

$x \wedge \overline{x} = 0$.

Функция $f_6(x,y)$ называется *сложением по модулю два* (*исключающее или*). Значение функции равно *1*, если число переменных, значение которых равно *1*, нечетно, и равно нулю, если число таких переменных четно. Обозначение: $x \oplus y$.

Функция $f_7(x,y)$ - *дизъюнкция* или «*логическое или*» (*логическое сложение*). Обозначение: $x \vee y$, $x + y$. Функция равна нулю тогда и только тогда, когда *все* ее переменные *равны нулю*. Для дизъюнкции справедливы следующие соотношения:

$x \vee 1 = 1$,

$x \vee 0 = x$,

$x \vee \overline{x} = 1$.

Функция $f_8(x,y)$ называется *операцией Пирса* или *стрелкой Пирса*. Обозначение: $x \downarrow y$. Ее можно выразить через операции отрицания и дизъюнкции двух переменных: $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Функция $f_9(x,y)$ – это *эквивалентность* (*логическая равнозначность*). Обозначение: $x \sim y$.

Функция $f_{11}(x,y)$ - это *импликация* от y к x. Обозначение: $y \to x$.

Функция $f_{13}(x,y)$ - это *импликация* от x к y. Обозначение: $x \to y$.

Функция $f_{14}(x,y)$ называется *операцией Шеффера* или *штрих Шеффера*.

Обозначение: $x|y$. Ее можно выразить через операции отрицания и конъюнкции двух переменных: $x|y = \overline{x \wedge y}$.

Рассмотренные нами шестнадцать функций двух переменных, назовем их *элементарными*, позволяют строить новые булевы функции следующим образом:

- путем перенумерации переменных;
- путем подстановки в функцию новых функций вместо переменных.

Функцию, полученную из функций $f_1, f_2, ..., f_k$ путем применения, возможно многократного, этих двух правил, будем называть *суперпозицией функций* $f_1, f_2, ..., f_k$.

Например, функция $f(x,y,z) = (x \oplus y) \wedge z$ получена суперпозицией элементарных функций: сложения по модулю два и конъюнкции. Наша функция задана в *аналитическом виде*, составим для нее таблицу истинности.

x	*y*	*z*	*f(x, y, z)*
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*0*

Для булевых функций устанавливается приоритет логических операций и они выполняются в таком порядке: отрицание $\neg$, конъюнкция $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, импликация $\rightarrow$, эквивалентность $\sim$. Если же нам необходимо выделить первоочередность некоторой операции, *расставляем скобки*, как в нашем примере: сначала выполняется $\oplus$, затем $\wedge$.

СДНФ, СКНФ булевой функции. Полином Жегалкина

Мы рассмотрели представление булевой функции через таблицу истинности. Решим обратную задачу: представим булеву функцию, заданную таблицей истинности, через элементарные функции.

Введем некоторые понятия, связанные с булевыми функциями.

Пусть имеется некоторый конечный набор переменных булевой функции: x_1, x_2, ..., x_n Всякую конъюнкцию переменных функции, взятых с отрицанием или без отрицания, при этом каждая переменная встречается не более одного раза, называют *элементарной*. Например, $U = x_1\, x_2\, \overline{x_3}\, x_4$ - элементарная конъюнкция, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\, x_2\, \overline{x_3\, x_4}$ - нет.

Число r переменных в элементарной конъюнкции U называется ее *рангом*. Наша конъюнкция имеет ранг: $r = 4$. Константа единица считается элементарной конъюнкцией ранга *0*.

Дизъюнкцию элементарных конъюнкций называют *дизъюнктивной нормальной формой*, сокращенно *ДНФ*.

Пусть булева функция задана через *ДНФ*: $f(x_1,...,x_n) = U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_s$, где U_i, $i = \overline{1,s}$ - элементарные конъюнкции. Число s называют *длиной ДНФ*.

ДНФ можно охарактеризовать также числом $R = r_1 + r_2 + ... + r_s$, которое называют *суммарным рангом* этой ДНФ. Здесь r_i *- ранг i – й* элементарной конъюнкции.

Например, для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3$, суммарный ранг ее *ДНФ*, $R = 5$.

Пусть имеется элементарная конъюнкция $U = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$. *Собственной частью* конъюнкции U называют конъюнкцию, полученную из U, удалением из U некоторых переменных.

Например, если $U = x_1 \ x_2 \ \overline{x_3} \ x_4$, то собственными частями конъюнкции U являются, например, конъюнкции: $U_1 = x_1 \ x_2 \ \overline{x_3}$, $U_2 = \overline{x_3} \ x_4$, $U_3 = x_4$ и т. д.

Аналогично вводится понятие и для *элементарной дизъюнкции*. Например, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ - элементарная дизъюнкция ранга *4*.

Конституентой единицы называют булеву функцию n переменных, которая принимает значение, равное единице *на одном единственном наборе* переменных. Обозначается конституента единицы как $K_i(x_1,...,x_n)$, где i - номер набора, на котором значение K_i равно единице. Например, $K_5(x_1, x_2, x_3)$ принимает значение *1* на единственном наборе - *101* .

Как мы знаем, конъюнкция равна единице, если значения *всех* ее переменных *равны единице*, поэтому конституенту единицы можно выразить через конъюнкцию *всех своих* переменных. Для этого необходимо взять набор, на котором значение конституенты равно единице и из переменных набора и их отрицаний составить конъюнкцию. Причем, если значение переменной в наборе равно *1*, берем ее без отрицания, если *0* - с отрицанием. Например, $K_5(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} x_3$.

Перейдем к *СДНФ*.

Дизъюнкция конституент единицы, равных единице на тех же наборах, что и заданная функция, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* булевой функции, сокращенно *СДНФ*.

Любую булеву функцию $f(x_1,...,x_n)$, *кроме константы 0, можно представить в виде СДНФ и это представление единственно.*

Как видим, любая булева функция может быть выражена через «базис» – *конъюнкцию, дизъюнкцию* и *отрицание*.

Чтобы получить *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (*СДНФ*), надо взять все наборы, на которых значение функции равно *1*, и записать для каждого из них конъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной равно *0*, то переменную надо взять с отрицанием, если *1* – без отрицания. Из получившихся конъюнкций надо построить дизъюнкцию.

Рассмотрим пример. Построим *СДНФ* функции $f_1(x, y, z)$, заданной таблицей истинности.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

СДНФ нашей функции имеет вид:

$f_{СДНФ}(x,y,z) = \overline{xyz} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Перейдем к *СКНФ*.

Конституентой нуля называют булеву функцию n переменных, которая принимает значение, равное нулю, на *одном единственном наборе* переменных.

Будем обозначать конституенту нуля как $M_i(x_1,\dots,x_n)$, где i - номер набора, на котором значение M_i равно нулю. Например, значение $M_5(x_1, x_2, x_3)$ равно 0 на единственном наборе - 101 .

Как мы знаем, дизъюнкция переменных равна нулю, если значения *всех* переменных *равны нулю*, поэтому конституенту нуля можно выразить через дизъюнкцию *всех* своих переменных следующим образом. Для этого необходимо взять набор, на котором значение конституенты M_i равно нулю, и из переменных набора и их отрицаний составить дизъюнкцию. Причем, если значение переменной в наборе равно 0, берем ее без отрицания, если 1 – с отрицанием. Например, $M_5(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$.

Коньюнкция конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и заданная функция, называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой, сокращенно СКНФ.*

Любую булеву функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, кроме константы 1, можно представить в виде СКНФ, и это представление единственно.

СКНФ строится по следующему правилу:

Чтобы получить *совершенную конъюнктивную нормальную форму*, надо взять все наборы, на которых значение функции равно 0 и записать для каждого из них дизъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной равно 0, то переменную надо взять без отрицания, если 1 – с отрицанием. Из получившихся дизъюнкций надо построить конъюнкцию.

Построим *СКНФ* функции $f_1(x, y, z)$ из предыдущего примера.

Имеем:

$f_{СКНФ}(x,y,z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)$.

Перейдем к *полиному Жегалкина.*

Справедлива следующая теорема Жегалкина.

Любая булева функция может быть представлена в виде полинома, т.е. записана в форме:

$$f(x_1,...,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus ... \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}x_1x_2 \oplus ... \oplus a_Nx_1...x_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_N - коэффициенты, равные нулю или единице.

Слагаемое отсутствует, если коэффициент при нем равен нулю. Как мы видим, полином Жегалкина строится с помощью операций: сложение по модулю два, конъюнкции и константы *1*. Полином Жегалкина для каждой булевой функции *единственен.*

Максимальное число сомножителей в элементарных конъюнкциях, входящих в полином, называется *степенью полинома.*

Полином Жегалкина можно построить различными способами: используя таблицу истинности (через СДНФ), методом неопределенных коэффициентов, методом треугольника.

Построим полином, используя таблицу истинности булевой функции.

Возьмем наборы, на которых значение функции равно единице. Из переменных каждого такого набора составим конъюнкцию. Если значение переменной в наборе равно *0*, заменим ее соотношением $\bar{x} = x \oplus 1$, если *1*, оставим без изменения. Между полученными таким образом выражениями возьмем сложение по модулю два. Раскроим скобки, применив дистрибутивный закон: $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$

Это может быть, например, выражение вида:

$$\bar{x}yz = (x \oplus 1)yz = xyz \oplus yz.$$

И приведем подобные члены с учетом соотношения:

$$\underbrace{x \oplus x \oplus ... \oplus x}_{n\ раз} = \begin{cases} x, & если\ n\ нечетно \\ 0, & если\ n\ четно \end{cases}$$

Построим полином Жегалкина для функции $f_1(x,y,z)$ из предыдущего примера, заданной таблицей истинности.

Имеем:

$$f(x,y,z) = (1 \oplus x)(1 \oplus y)(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus x)y(1 \oplus z)1 \oplus x(1 \oplus y)z \oplus xy(1 \oplus z) \oplus xyz =$$
$$= 1 \oplus y \oplus x \oplus xy \oplus z \oplus yz \oplus xz \oplus xyz \oplus y \oplus yz \oplus xy \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus$$
$$\oplus xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus = 1 \oplus x \oplus z \oplus xy \oplus xyz.$$

Получили полином третьей степени, поскольку максимальное число переменных в элементарных конъюнкциях в нашем случае равно *3* - *xyz*.

Можно строить полином, используя *СДНФ* функции.

Классы булевых функций. Полные системы булевых функций

Рассмотрим пять специальных классов (множеств) булевых функций, называемых также *классами Поста*. Эти классы обладаю свойством *функциональной замкнутости*: любая булева функция, полученная с помощью операций суперпозиций из функций данного класса, принадлежит этому же классу.

Это классы.

Класс (множество) булевых функций, *сохраняющих нуль*. Обозначается T_0. Булева функция называется функцией, сохраняющей нуль, если на нулевом наборе переменных значение функции равно *0*, т.е. $f(00...0) = 0$.

Класс булевых функций, *сохраняющих единицу*. Обозначается T_1. Булева функция называется функцией, *сохраняющей единицу*, если на единичном наборе переменных значение функции равно *1*, т.е. $f(11...1) = 1$.

Класс *линейных* булевых функций. Обозначается через *L*. Булева функция называется *линейной*, если она может быть представлена полиномом степени не *выше первой*, т.е. представлена в виде:

$f(x_1,...,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus,...,\oplus a_nx_n,$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n - коэффициенты, равные *0* или *1*.

Класс *монотонных* булевых функций. Обозначается через *M*.

Булева функция называется *монотонной*, если для любых двух *сравнимых* наборов *a* и *b* выполняется условие:

$(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n) \le (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n) \Rightarrow f(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n) \le f(b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n)$.

Рассмотрим множество двоичных наборов функции *n* переменных. На этом множестве введем *отношение сравнимости двоичных наборов* следующим образом. Говорят, что двоичный набор $a = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ не больше двоичного набора $b = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n)$, обозначается $a \le b$, если для *каждой пары* $(a_i,\ b_i)$ $i = \overline{1,n}$ справедливо соотношение: $a_i \le b_i$. Отношение сравнимости является отношением *частичного порядка*.

Для функции двух переменных следующие наборы сравнимы: *11 > 10*, *11 > 01*, *10 > 00* и т.д. Наборы *01* и *10* несравнимы, поскольку $a_1 < b_1$, но $a_2 > b_2$. Таким образом, условие монотонности для функции двух переменных мы можем записать в виде: $f(1,1) \ge f(1,0) \ge f(0,0) \wedge f(1,1) \ge f(0,1) \ge f(0,0)$.

Для функции трех переменных наборы *111* и *110*, *101* и *001* являются сравнимыми. Наборы *110* и *001*, *101* и *011* - несравнимы. Например, для последней пары наборов имеем: $a_1 > b_1$, $a_2 < b_2$ и $a_3 = b_3$, а отношение $a_i \le b_i$ должно выполняться по *всем переменным* наборов.

Множество двоичных наборов функции *n* переменных вместе с заданным на нем отношением сравнимости образует *ЧУ- множество*. Диаграмма *Хассе* для него при *n = 3* приведена ниже на рисунке 1.

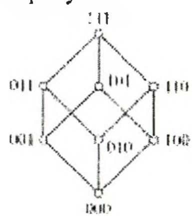

Рисунок 1

Для того, чтобы убедиться в немонотонности заданной булевой функции, достаточно найти *хотя бы одну пару* сравнимых наборов a и b, таких, что $a \le b$ и $f(a) > f(b)$.

Чтобы сказать, что заданная булева функция монотонна, следует убедиться, что на *всех сравнимых наборах* выполняется условие монотонности $a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$.

Класс *самодвойственных* булевых функций. Обозначается через S.

Булева функция называется *самодвойственной*, если на *каждой паре противоположенных наборов*, она принимает *противоположенные значения*, т.е. если выполняется условие:

$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Или, что то же самое: $\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Два набора переменных называются *противоположенными*, если все значения переменных одного набора противоположны значениям переменных другого набора. Чтобы получить противоположенный набор, инвертируем все значения переменных исходного набора.

Например, пары наборов *101* и *010*, *011* и *100* – противоположенные.

Заданная функция не является самодвойственной, если *найдется хотя бы одна* пара противоположенных наборов, такая, что выполняется условие $f(a) = f(\overline{a})$. Соответственно, функция самодвойственная, если на *всех парах* противоположенных наборов выполняется условие $f(a) = \overline{f}(\overline{a})$.

Зададим булеву функцию $f(x,y,z) = x \sim (y \to z)$ таблицей истинности и проверим ее на принадлежность пяти классам *Поста*. Для нашей функции сначала выполняется импликация $y \to z$, затем эквивалентность между значением x и результатом импликации.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*0*
1	*1*	*1*	*1*

1. Функция сохраняет нуль, $f(0,0,0) = 0$.
2. Функция сохраняет единицу, $f(1,1,1) = 1$.
3. Построим для нашей функции полином Жегалкина: $f(x,y,z) = (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xyz = xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus xyz \oplus$ $\oplus xz \oplus xy \oplus x \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = x \oplus y \oplus yz$.

   Получили полином второй степени, функция не является линейной.

4. Она не является монотонной, поскольку $f(0,1,1) < f(0,1,0)$ (набор больше, значение функции меньше).
5. Функция не самодвойственная, поскольку $f(0,0,1) = f(1,1,0)$ (на противоположенных наборах значения функции равны).

Рассмотрим вопрос полноты системы булевых функций.

Система булевых функций $\{f_1, ..., f_m\}$ называется *полной* (*функционально полной*), если любая булева функция может быть выражена через функции системы $f_1, ..., f_m$ с помощью суперпозиций (т. е. составления сложных функций).

Мы уже сталкивались с полными системами при построении *СДНФ, СКНФ, полинома Жегалкина* для булевых функций.

СДНФ, СКНФ позволяют выразить любую булеву функцию через функции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Имеем, система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ - полная система булевых функций.

Полином Жегалкина позволяет выразить любую булеву функцию через функции: сложение по модулю два, конъюнкцию и константу *1*. Таким образом, система $\{\oplus, \wedge, 1\}$ - также является полной системой.

Рассмотрим критерий построения полной системы, который дает теорема Поста.

Теорема Поста.

Для того, чтобы система булевых функций $\{f_1, ..., f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов T_0, T_1, L, M, и S нашлась функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

Построим еще полные системы булевых функций. Для этого составим *таблицу Поста*, где в строках укажем наиболее важные элементарные функции, а в столбцах - классы. В клетках таблицы будем ставить знаки «+» или «-» в зависимости от того, принадлежит ли рассматриваемая функция данному функционально замкнутому классу или нет. В силу теоремы Поста для полноты рассматриваемой системы необходимо и достаточно, чтобы для системы в каждом столбце был *хотя бы один минус*.

Таблица Поста

Функции	*Классы*				
	T_0	T_1	L	M	S
Константа 0	+	-	+	+	-
Конъюнкция	+	+	-	+	-
Сложение по модулю два	+	-	+	-	-
Дизъюнкция	+	+	-	+	-
Стрелка Пирса	-	-	-	-	-
Эквивалентность	-	+	+	-	-
Импликация от x к y	-	+	-	-	-
Штрих Шеффера	-	-	-	-	-
Константа 1	-	+	+	+	-
Инверсия x	-	-	+	-	+

Найдем из таблицы полные системы булевых функций.

1. Одна функция, стрелка Пирса, $f(x,y) = x \downarrow y$ является полной системой.
2. Штрих Шеффера, $f(x,y) = x \mid y$ также пример полной системы.
3. Импликация от x к y, $f(x,y) = x \to y$ и инверсия x, $f(x) = \bar{x}$ - полная система.
4. Конъюнкция, $f(x,y) = x \wedge y$ и инверсия x.
5. Дизъюнкция $f(x,y) = x \vee y$ и инверсия x.

Как видим из таблицы, система функций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ является *избыточной*, нам бы хватило системы $\{\neg, \wedge\}$ или $\{\neg, \vee\}$. Полная система булевых функций называется *базисом*, если при удалении любой функции из этой системы, она перестает быть полной. Очевидно, полные системы $\{\oplus, \wedge, 1\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ являются базисами.

Полная система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ получила наибольшее практическое применение, и логическая часть *ПК* реализована, в основном, через функции этой системы. Эта система получила название *основной функционально полной системы* булевых функций, сокращенно *ОФПС*.

Минимизация булевых функций

В общем случае существует несколько способов записи одной и той же булевой функции. Сложность записи булевой функции можно оценивать *числом элементарных операций*, используемых в такой записи и образующих функционально полную систему булевых функций.

Задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют задачей минимизации. Такая задача возникает в ряде приложений. В частности, при проектировании устройств автоматики или вычислительных устройств их работа может быть описана некоторой булевой функцией или системой таких функций. Каждой элементарной функции в устройствах соответствует некоторый физический элемент (ячейка), реализующий эту функцию. И, следовательно, представлению булевой функции в минимальной форме соответствует более простое устройство автоматики или вычислительной техники по сравнению с устройством, реализующим не минимальную булеву функцию.

Наиболее распространённой формой представления булевой функции является *дизъюнктивная нормальная форма.* Поэтому задачу упрощения булевых функций обычно формулируют в *классе ДНФ.*

ДНФ булевой функции $f(x_1,...,x_n)$ называют *минимальной*, если ей соответствует наименьший суммарный ранг R по сравнению с другими *ДНФ* этой же функции. Минимальную *ДНФ* булевой функции будем обозначать как *МДНФ*.

Поскольку методы минимизации булевых функций, разработанные для *ДНФ*, достаточно легко переносятся на конъюнктивные нормальные формы (*КНФ*), ограничимся рассмотрением методов минимизации в классе *ДНФ*.

В основном эти методы в явной или в неявной форме основаны на выполнении *трех* операций. Рассмотрим их.

Две элементарных конъюнкции одинакового ранга r называются *соседними,* если они являются функциями одних и тех же переменных и отличаются только знаком отрицания одной из переменных.

Например, следующие элементарные конъюнкции являются соседними:

$U_1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ и $U_2 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$.

Первая операция, называемая *операцией склеивания*, для элементарных конъюнкций осуществляется по следующему правилу: *дизъюнкцию двух соседних конъюнкций некоторого ранга r можно заменить одной элементарной конъюнкций ранга r-1, являющейся общей частью исходных конъюнкций.*

$xA \vee \bar{x}A = (x \vee \bar{x}) \cdot A = 1 \cdot A = A$,

где A – некоторая элементарная конъюнкция. В этом случае говорят, что конъюнкции xA и $\bar{x}A$ склеиваются по переменной x. Например:

$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 x_4$.

Здесь $A = x_2 \bar{x}_3 x_4$ и две заданные конъюнкции были склеены по переменной x_1, в одной из которых эта переменная без отрицания, а в другой – с отрицанием.

Вторая из операций называется *операцией поглощения,* и она осуществляется по правилу:

Дизъюнкцию двух элементарных конъюнкций разных рангов, из которых одна является собственной частью другой, можно заменить конъюнкцией, имеющей меньший ранг.

$A \vee A \cdot B = A \cdot 1 \vee A \cdot B = A \cdot (1 \vee B) = A \cdot 1 = A$,

где A и B – некоторые элементарные конъюнкции.

Например,

$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_4 = x_2 x_4 (x_1 \bar{x}_3 \vee 1) = x_2 x_4$.

Третья операция – *операция неполного склеивания*:

$xA \vee \bar{x}A = xA \vee \bar{x}A \vee A$.

Введем некоторые понятия.

Булева функция $\varphi(x_1,...,x_n)$ называется *импликантой* функции $f(x_1,...,x_n)$, если функция φ равна нулю на *всех тех же наборах*, на которых равна нулю и функция f. Если φ есть импликанта функции f, то этот факт записывают так: $\varphi \to f$.

Рассмотрим импликанты функции $f_6(x,y)$.

x	y	f_6	f_4	f_2	f_0	f_3
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1

Как видим из таблицы, функции f_4, f_2, f_0, являются импликантами функции f_6, функция f_3 - нет. Термин *«импликанта»* возник ввиду того, что импликация $\varphi \to f$ значений функций φ и f по всем наборам тождественно равна единице.

Конституента единицы в *СДНФ* функции f всегда является её импликантой. Для функции f_6 функции f_4 и f_2 являются конституентами елиницы из ее *СДНФ*.

Из определения импликанты φ следует, что если на некотором наборе значение φ равно единице, то и значение функции f на этом же наборе также равно единице и в этом случае говорят, что импликанта φ *покрывает единицу функции f.*

Чем меньше переменных содержит импликанта функции f по сравнению с конституентой единицы, тем больше единиц функции она покрывает.

Элементарная конъюнкция $U = x_1 x_2 \dots x_k$ называется *простой импликантой* булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если U является импликантой функции f и никакая собственная часть U не является импликантой f.

Рассмотрим пример. Зададим функцию *f(x, y, z)* таблицей истинности (таблица ниже). СДНФ функции имеет вид:

$$f_{СДНФ}(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z .$$

Укажем импликанты и простые импликанты нашей функции.

x	y	z	$f(x, y, z)$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}z$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}$	$\bar{y}$
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Как видим из таблицы, конституента единицы $K_3(x,y,z) = \bar{x}yz$ является импликантой нашей функции, ее собственная часть $U_1 = \bar{x}z$ - простой импликантой, поскольку ни $U_2 = \bar{x}$, ни $U_3 = z$ не являются импликантами. Аналогично имеем, $K_4(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z}$, $U_4 = x\bar{y}$ - импликанты нашей функции, $U_5 = \bar{y}$ - простая импликанта; U_5 покрывает 4 единицы нашей функции. Простые импликанты выделены серым цветом.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.

Всякая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть представлена как дизъюнкция всех своих простых импликант.

Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращённой ДНФ* этой функции. *Сокращённая ДНФ* булевой функции *единственна.*

Теорема 2. (теорема Квайна).

Если в совершенной дизъюнктивной нормальной форме булевой функции выполнить ***все*** *операции неполного склеивания, а затем* ***все*** *операции поглощения, то в результате будет получена сокращенная дизъюнктивная нормальная форма этой функции, или дизъюнкция всех ее простых импликант.*

Как следует из теоремы, чтобы получить все простые импликанты, мы проводим операции неполного склеивания. Это связано с тем, что одна и та же элементарная конъюнкция дизъюнктивной формы может склеиваться с несколькими конъюнкциями. При каждом таком склеивании образуются *различные импликанты,* и поэтому мы оставляем в выражении каждую элементарную конъюнкцию для использования ее при других склеиваниях.

От сокращенной *ДНФ* переходим к минимальной дизъюнктивной нормальной форме – *МДНФ.*

Рассмотрим один из методов минимизации булевых функций.

Метод Квайна

Этот метод удобен для нахождения *МДНФ* функции от любого числа переменных.

Алгоритм метода Квайна.

1. Записываем *СДНФ* булевой функции $f(x_1,...,x_n)$.
2. Проводим все возможные операции неполного склеивания конституент единицы *СДНФ* булевой функции, в результате операций получим элементарные конъюнкции ранга *(n – 1)*. Проводим, если это возможно, операции поглощения между конъюнкциями различных рангов. Затем вновь проводим операции неполного склеивания и поглощения до тех пор, пока это возможно. Элементарная конъюнкция, которая не может больше участвовать в склеивании, является *простой импликантой* булевой функции.
3. Дизъюнкция простых импликант приводит к *сокращённой* ДНФ булевой функции: $f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{k}{\vee}\varphi_k$, где φ_k – простая импликанта.
4. Строим *таблицу покрытия* (*импликантную матрицу*). *Таблица покрытия* – двумерная таблица, каждой строке которой взаимно однозначно соответствует простая импликанта, а каждому столбцу – конституента единицы из заданной СДНФ. На пересечении *i-й* строки и *j-го* столбца находится *1*(можно ставить «крестик»), если простая импликанта является собственной частью соответствующей конституенты единицы, т.е. каждая переменная, входящая в простую импликанту, входит и в конституенту.
5. Выбираем *существенные импликанты*, т.е. такое *минимальное количество* простых импликант, чтобы они *совместно* своими единицами покрывали все колонки импликантной матрицы.
6. *Дизъюнкция существенных импликант приводит к МДНФ.*

Рассмотрим пример. Найдем *МДНФ* булевой функции, заданной *СДНФ*:
$f_{СДНФ}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

1. Проведем операции неполного склеивания, их лучше выполнять последовательно, слева направо.
   1) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3$.
   2) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_3$.
   3) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2$.
   4) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_2x_3$.

   У нас *все* конституенты единицы участвовали в склеивании, поэтому операций поглощения нет. Элементарные конъюнкции больше не склеиваются между собой, следовательно, мы получили простые импликанты.
2. Из простых импликант строим сокращенную *ДНФ* функции: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$.
3. Строим таблицу покрытия.

Простые импликанты	*Конституенты единицы*				
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	x_1x_2x
$\bar{x}_2\bar{x}_3$	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
$x_1\bar{x}_3$	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*
x_1x_2	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
x_2x_3	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

Выбираем существенные импликанты.

Первая импликанта входит в *МДНФ* обязательно, она единственная, которая покрывает единицу функции на наборе *000* (единственная единица в первой колонке), затем можно выбрать *3-ю* и *4-ю* простые импликанты. Получили *МДНФ*:

$f_{МДНФ_1}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$.

У нашей функции *две МДНФ*: к первой импликанте можно выбрать *2-ю* и *4-ю*. Получим:

$f_{МДНФ_2}(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3$.

Как видим, у булевой функции может быть *несколько МДНФ*.

Ранг обеих *МДНФ*, *R = 6*.

В то же время, построив *СКНФ* заданной функции и проведя минимизацию методом Квайна в базисе *КНФ*, мы получим единственную *МКНФ* (минимальную конъюнктивную нормальную форму) меньшего ранга, *R = 5*.

$f_{СКНФ}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$

$f_{МКНФ}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Рассмотрим еще пример.

$f_{СДНФ}(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$.

Проведем операции неполного склеивания.

1. $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}\bar{y}$.
2. $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} = \bar{y}\bar{z}$.
3. $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz = \bar{x}z$.
4. $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z = \bar{y}z$.
5. $x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z = x\bar{y}$.

Все конституенты единицы участвовали в склеивании, у нас нет операции поглощения. Импликанта $\bar{x}z$ больше не участвует в склеивании, это простая импликанта. Оставшиеся импликанты могут склеиваться между собой, продолжим склеивание.

6. $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} = \bar{y}$.
7. $\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{y}$.

Операции поглощения у нас опять нет, получили *2* простые импликанты. Сокращенная ДНФ функции имеет вид:

$f(x, y, z) = \bar{x}z \vee \bar{y}$.

Построим таблицу покрытия.

Простые импликанты	*Конституенты единицы*				
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}z$	0	1	1	0	0
$\bar{y}$	1	1	0	1	1

Обратите внимание, что простая импликанта $\bar{y}$ состоит только из отрицания одной переменной и покрывает *4* единицы нашей функции.

Как видим, обе простые импликанты входят *МДНФ*:

$f_{МДНФ}(x, y, z) = \bar{x}z \vee \bar{y}$

Задание.

1. Построить таблицу истинности для заданной булевой функции. Варианты функций указаны в таблице 3.
2. Построить *СДНФ*, *СКНФ*, *полином Жегалкина* для заданной булевой функции.
3. Исследовать функцию на принадлежность пяти замкнутым классам *Поста*.
4. Построить *МДНФ* булевой функции методами *Квайна* и *Карно-Вейча*.
5. Привести примеры *3* функционально полных систем булевых функций

Таблица 3.

№	*Функция*
1.	$(X \vee Y) \wedge \overline{Z}$
2.	$X \wedge (Y \oplus Z)$
3.	$(X \sim Y) \vee \overline{Z}$
4.	$(\overline{X} \wedge Y) \oplus Z$
5.	$(X \wedge \overline{Y}) \vee \overline{Z}$
6.	$(X \oplus Y) \vee Z$
7.	$(X \vee \overline{Y}) \oplus Z$
8.	$\overline{(X \vee Y)} \vee Z$
9.	$\overline{(X \wedge Y)} \vee Z$
10.	$(\overline{X} \oplus Y) \wedge Z$
11.	$\overline{(X \wedge Y)} \wedge \overline{Z}$
12.	$X \vee (Y \wedge \overline{Z})$
13.	$X \vee (Y \sim Z)$
14.	$\overline{X} \oplus (\overline{Y} \wedge Z)$
15.	$(X \sim Y) \wedge \overline{Z}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Д. Дискретная математика и комбинаторика. – СПб: Вильямс, 2003. – 960 с.

2. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.

3. Нефедов, В.Н. Курс дискретной математики: Учеб. пособие / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

4. Белоусов, А.И. Дискретная математика: учебник для вузов / А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев; под редакцией В.С. Зарубина, А.П. Крищенко – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 744 с.

5. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: учеб. пособие – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Питер, 2003. – 364 с.

6. Кук, Д. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

7. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику. – М: Наука, 1986. – 384 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составитель:
Глущенко Татьяна Александровна

Множества. Отношения. Булевы функции

Методические указания

к выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Дискретная математика»
для студентов специальностей:
1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»,
1-40 03 01 «Искусственный интеллект»

Ответственный за выпуск: Глущенко Т.А.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 17.05.2016 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 1337. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.