

УДК 624.04

В. И. ИГНАТЮК, Ю. О. ДЕМЯНИК

Брест, БрГТУ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В КРУГОВЫХ БЕСШАРНИРНЫХ АРКАХ, НАГРУЖЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Рассматриваются бесшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости (рисунок 1, а), нагруженные вертикальной, распределенной по параболической зависимости нагрузкой. Получим для рассматриваемых арок зависимости для определения внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в произвольном сечении системы, позволяющие построить эпюры усилий и выполнить анализ их изменения.

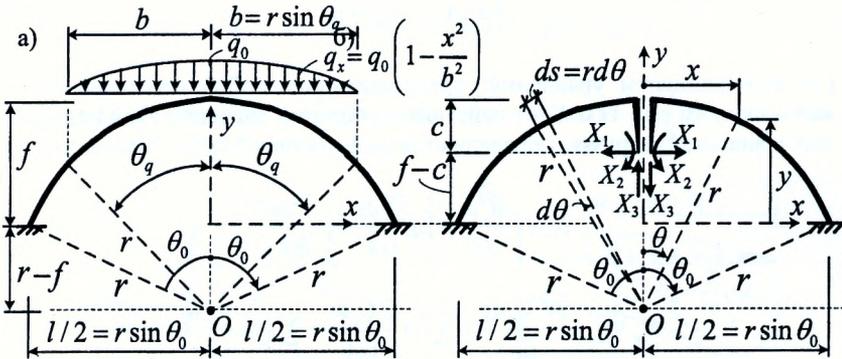


Рисунок 1 – Расчетная схема арки (а) и основная система метода сил (б)

Учитывая изменение оси арки по окружности, интегрирование зависимостей удобно выполнять в полярной системе координат (рисунок 1, а) с полюсом в центре окружности (точка O) и с отсчетом угла (θ) от вертикальной оси (оси y) по часовой стрелке. Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами координат имеет вид:

$$x = r \sin \theta; y = r(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (1)$$

Бесшарнирные арки являются статически неопределимыми системами, имеющими три лишние связи, и их расчет будем выполнять методом сил [1].

Основную систему метода сил получим разрезанием арки посередине (рисунок 1, б) с перенесением неизвестных в упругий центр арки с помощью абсолютно жестких консолей ($EI_k = \infty$), положение которого здесь определится выражением:

$$c = f - r \left(\frac{\sin \theta_0}{\theta_0} - \cos \theta_0 \right), \quad (2)$$

и учтем, что ввиду симметричности системы и нагрузки третье неизвестное (кососимметричные вертикальные силы X_3) будет равно нулю. В результате система уравнений метода сил будет представлена двумя независимыми уравнениями относительно симметричных неизвестных X_1 и X_2 [1]:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1q} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2q} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициенты уравнений, представляющие собой перемещения по направлениям сил X_1 и X_2 от действия единичных значений этих неизвестных и внешней нагрузки, определяются по формулам Мора – Максвелла [1]:

$$\delta_{ii} = \int_0^s \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EI} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_i^2 ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_i^2 ds}{EA}, \quad (4)$$

$$\Delta_{iq} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_q ds}{EI} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_q ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_q ds}{EA}, \quad (5)$$

где EI , GA , EA – жесткости сечений арки соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений при изгибе; \bar{M}_{ix} , \bar{Q}_{ix} , \bar{N}_{ix} – зависимости изменения внутренних сил в произвольном сечении x основной системы метода сил (рисунок 1, б) от действия единичных значений неизвестных, имеющие вид:

$$\bar{M}_{1x} = r \left[\cos \theta_x + \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \right]; \quad \bar{Q}_{1x} = \sin \theta_x; \quad \bar{N}_{1x} = -\cos \theta_x; \quad (6)$$

$$\bar{M}_{2x} = 1; \quad \bar{Q}_{2x} = 0; \quad \bar{N}_{2x} = 0; \quad (7)$$

M_q, Q_q, N_q – зависимости изменения внутренних сил в произвольном сечении x основной системы метода сил от действия внешней нагрузки (рисунок 2), которые имеют вид:

а) на участке I (CD) (рисунок 2, а) на котором действует внешняя нагрузка:

$$M_{q\theta I} = \frac{q_0 r^2}{2} \sin^2 \theta_x \left(1 - \frac{r^2}{6b^2} \sin^2 \theta_x \right); \quad (8)$$

$$Q_{q\theta I} = -q_0 r \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^3 \theta_x \cos \theta_x \right); \quad N_{q\theta I} = -q_0 r \left(\sin^2 \theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^4 \theta_x \right). \quad (9)$$

б) на участке II (DB) (рисунок 2, б), на котором внешней нагрузки нет:

$$M_{q\theta II} = R_q (x - x_C) = \frac{2q_0 b}{3} (x - x_C) = \frac{2}{3} q_0 b r \left(\sin \theta_x - \frac{3b}{8r} \right); \quad (10)$$

$$Q_{q\theta II} = -R_q \cos \theta_x = -\frac{2}{3} q_0 b \cos \theta_x; \quad N_{q\theta II} = -R_q \sin \theta_x = -\frac{2}{3} q_0 b \sin \theta_x. \quad (11)$$

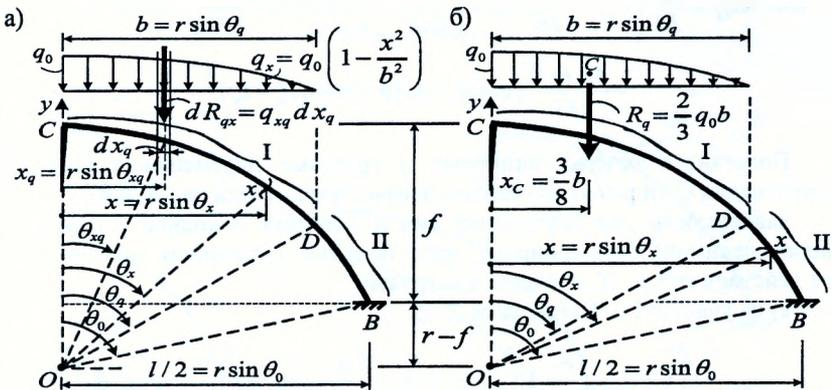


Рисунок 2 – К определению усилий в основной системе метода сил от действия внешней нагрузки на участках I (а) и II (б)

Выполняя интегрирование в соответствии с выражениями (4) (с учетом зависимостей (6)–(7)) и (5) (отдельно по участкам I и II с учетом

зависимостей (8)–(11)) и учитывая обе половины арки, получим зависимости для единичных и грузовых перемещений в виде:

$$\delta_{11} = \frac{r}{EI} \left\{ \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta_0 + 4r(c-r) \sin \theta_0 + [3r^2 + 2c^2 - 4rc] \theta_0 \right\} + \\ + \eta \frac{r}{GA} \left[\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \frac{r}{EA} \left[\theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right]; \quad \delta_{22} = \frac{2r}{EI} \theta_0. \quad (12)$$

$$\Delta_{1q} = \frac{q_0 r^4}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \sin^3 \theta_0 - \frac{r^2}{30b^2} \sin^5 \theta_0 + \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{8b^2} \right) \theta_0 - \frac{r^2}{24b^2} \sin 2\theta_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r^2}{192b^2} \sin 4\theta_0 \right] \right\} + \frac{4q_0 b r^3}{3EI} \left\{ \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q) - \frac{x_c}{r} (\sin \theta_0 - \sin \theta_q) - \right. \\ \left. - \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \left[(\cos \theta_0 - \cos \theta_q) + \frac{x_c}{r} (\theta_0 - \theta_q) \right] \right\} - \frac{2q_0 r^2}{GA} \left(\frac{1}{3} \sin^3 \theta_q - \frac{r^2}{15b^2} \sin^5 \theta_q \right) - \\ - \frac{2q_0 b r}{3GA} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q) + \frac{2q_0 r^2}{3EA} \left(\sin^3 \theta_q - \frac{r^2}{5b^2} \sin^5 \theta_q \right) - \frac{2q_0 b r}{3EA} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_q); \\ \Delta_{2q} = \frac{q_0 r^3}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{32b^2} \right) \theta_q + \left(\frac{r^2}{24b^2} - \frac{1}{4} \right) \sin 2\theta_0 - \frac{r^2}{192b^2} \sin 4\theta_0 \right] - \\ - \frac{4q_0 b r^2}{3EI} \left[(\cos \theta_0 - \cos \theta_q) + \frac{x_c}{r} (\theta_0 - \theta_q) \right]. \quad (14)$$

Подставляя теперь единичные и грузовые перемещения (12)–(14) в уравнения (3) и решая их, найдем неизвестные метода сил X_1 и X_2 .

Зависимости для внутренних сил в сечениях исходной (статически неопределимой) бесшарнирной арки получим сложением зависимостей от действия сил X_1 , X_2 и внешней нагрузки:

а) на участке I (CD) (рисунок 2, а):

$$M_{\theta_0} = r \left[\cos \theta_x + \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \right] \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + \left[\frac{q_0 r^2}{2} \sin^2 \theta_x \left(1 - \frac{r^2}{6b^2} \sin^2 \theta_x \right) \right]; \quad (15)$$

$$Q_{\theta_0} = \sin \theta_x \cdot X_1 - q_0 r \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^3 \theta_x \cos \theta_x \right); \quad (16)$$

$$N_{\theta_0} = -\cos \theta_x \cdot X_1 - q_0 r \left(\sin^2 \theta_x - \frac{r^2}{3b^2} \sin^4 \theta_x \right). \quad (17)$$

б) на участке II (DB) (рисунок 2, б):

$$M_{\theta(m)} = r \left[\cos \theta_x + \left(\frac{c}{r} - 1 \right) \right] \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + \left[\frac{2}{3} q_0 b r \left(\sin \theta_x - \frac{x_c}{r} \right) \right]; \quad (18)$$

$$Q_{\theta(m)} = \sin \theta_x \cdot X_1 - \frac{2}{3} q_0 b \cos \theta_x; \quad (19)$$

$$N_{\theta(m)} = -\cos \theta_x \cdot X_1 - \frac{2}{3} q_0 b \sin \theta_x. \quad (20)$$

На основе полученных зависимостей составлены алгоритм и MathCad-программа расчета усилий в сечениях арки, с использованием которой можно выполнять расчеты для различных параметров арки и нагрузки.

Ниже представлен пример расчета бесшарнирной арки прямоугольного сечения ($\eta = 1,2$) постоянной жесткости (с $EI = 1000 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$; $GA = 15000 \text{ кН}$; $EA = 40000 \text{ кН}$), показанной на рисунке 3. Учитывая сложный криволинейный характер изменения усилий по длине арки и невозможность вычисления усилий во всех сечениях (их бесконечное множество), будем выполнять расчет усилий в сечениях арки с определенным шагом.

Эпюры изгибающих моментов и поперечных и продольных сил для рассматриваемой арки, вычисленные с шагом $\Delta\theta = 10^\circ$, представлены на рисунках 3 и 4. Расчетная схема арки и эпюры M и N показаны для половины арки ввиду их полной симметричности.

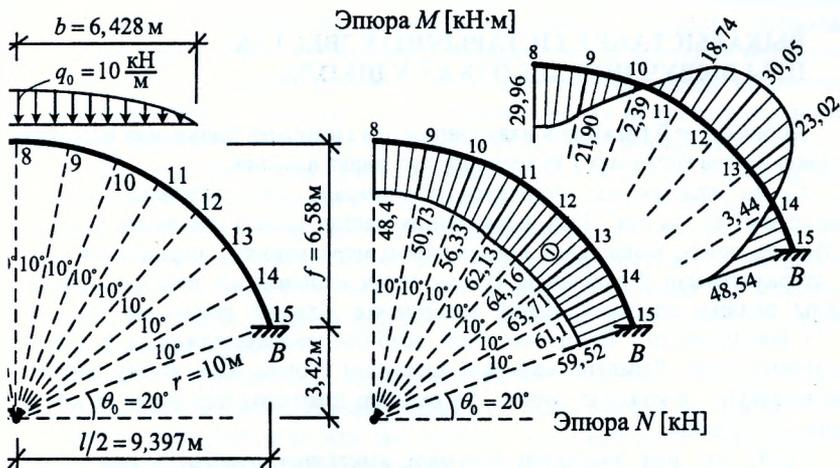
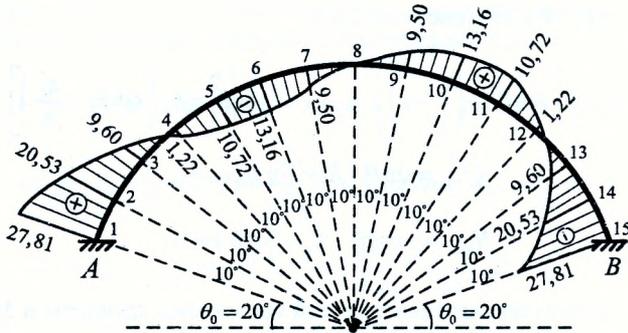


Рисунок 3 – Расчетная схема арки и эпюры внутренних сил M и N

Рисунок 4 – Эпюра поперечных сил Q

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А. В. Строительная механика : учебник / А. В. Дарков. – М. : Высш. шк., 1976. – 600 с.

УДК 371:517.0

М. А. КАЛАВУР

Брест, БрДУ імя А. С. Пушкіна

**ВЫКАРЫСТАННЕ ГІСТАРЫЧНЫХ ЗВЕСТАК
ПРЫ ВЫВУЧЭННІ АДСОТКАЎ У ШКОЛЕ**

Добра было б расказаць навучэнцам пра гісторыю ўзнікнення адсоткаў, а таксама пра гісторыю з'яўлення на свет знака адсотка.

Слова адсотак ад лацінскага *pro centum*, што літаральна азначае 'за сотню' ці 'са ста'. Ідэя выражэння частак цэлага пастаянна ў адных і тых жа долях, выкліканая практычнымі меркаваннямі, нарадзілася яшчэ ў старажытнасці ў вавіляніян. Шэраг задач клінапісных таблічак прысвечаны падліку адсоткаў, аднак вавілонскія ліхвяры лічылі не 'са ста', а 'з шасцідзсяці'. Працэнты былі асабліва распаўсюджаныя ў Старажытным Рыме. Рымляне называлі адсоткамі грошы, якія плаціў даўжнік пазыкадаўцу за кожную сотню. Ад рымлян працэнты перайшлі да іншых народаў Еўропы.

Доўгі час пад адсоткамі разумелі выключна прыбытак або страту на кожныя сто рублёў. Яны ўжываліся толькі ў гандлёвых і грашовых здзелках. Затым сфера іх прымянення пашырылася, працэнты сустракаюцца