СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – Москва : Мир, 1976. – С. 311.
2. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – Москва : Наука, 1991. – С. 256.
3. Das P.C. Czech. Math. J. / P.C. Das, R.R. Sharma. – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
4. Colombeau, J. Elementary introduction to new generalized functions. – Amsterdam, 1985.
5. Антоневич, А.Б. Докл. АН СССР / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 1991. – Т. 318. – № 2. – С. 267–270.
6. Лазакович, Н.В. Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
7. Yablonski, A. Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
8. Groh, J. Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
9. Жук, А.И. Докл. НАН Беларуси / А.И. Жук, О.Л. Яблонский. – 2015. – Т. 59. – № 2. – С. 17–22.
10. Жук, А.И. Веснік Брэсцкага універсітэта / А.И. Жук, О.Л. Яблонский. – Сер. 4: Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 2. – С. 55–62.

Материал поступил в редакцию 22.01.2018

ZHUK A.I. Autonomic systems of differential equations with generalized coefficients

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of mnemofunctions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.

УДК 517.927

Геселева К.Г.

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. При исследовании различных задач теоретического и прикладного характера широкое применение имеют интегральные и интегро-функциональные уравнения. Поскольку построение точных решений таких уравнений возможно только в отдельных случаях, то большое значение приобретают методы построения приближенных решений этих уравнений. Одним из эффективных методов является коллокационный метод и одно из его обобщений – коллокационно-итеративный метод.

В этой статье рассматриваются вопросы возможности применения этих методов к некоторым типам интегро-функциональных уравнений.

Рассмотрим некоторые классы интегро-функциональных уравнений, приближенные решения которых можно построить коллокационным и коллокационно-итеративными методами.

Линейные интегро-функциональные уравнения.

В пространстве $L_2(a;b)$ – действительных и измеримых на промежутке $(a;b)$ функций, суммируемых с квадратом, рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt, x\in(a;b), \quad (1)$$

$$y(x)=0, x\notin(a;b),$$

где $f(x)$ – известная, а $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$. Относительно функций $h(x), p(x), K(x;t)$ предполагаем, что они, соответственно, на промежутке $[a;b]$ и в квадрате $[a;b]^2=[a;b]\times[a;b]$ удовлетворяют условиям:

$$|p(x)|\le\bar{p}<\infty, \quad (2)$$

$h(x)$ – дифференцируема на $[a;b]$ и

$$h'(x)\ge l>0, x-h(x)\ge\sigma>0, \quad (3)$$

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)dxdt=B^2<\infty. \quad (4)$$

Покажем, что уравнение (1) при выполнении условий (2)–(4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3, 5]. Рядом с интегральным вполне непрерывным оператором K, который имеет вид

$$(Kv)(x)=\int_a^b K(x;t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2(a;b),$$

будем рассматривать оператор S такой, что

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right], \\ v(x)-p(x)v(h(x)), x\in\left[h^{-1}(a),b\right], \end{cases} \quad (5)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из $L_2(a;b)$.

Отметим, что этот оператор, как и оператор K, действует с $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показать, что оператор S линейный. Условия (2), (3) гарантируют его ограниченность. Действительно,

$$S=sup\frac{(Sv)(x)}{v(x)}\le 1+\left|\frac{p^2(x)}{h'(x)}\right|^{1/2}\le 1+\frac{\bar{p}}{\sqrt{l}}<\infty,$$

где sup береться по $v(x)\in L_2(a;b), v(x)\ne 0$.

Эти же условия говорят о том, что оператор S обратимый. Обратный к нему оператор имеет вид

$$(S^{-1}v)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right], \\ v(x)+\sum_{i=1}^{S}v(h^i(x))\prod_{k=0}^{i-1}p(h^k(x)), \end{cases} \quad (6)$$

$$x\in\Delta s, s=\overline{1,m}.$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\Delta s=\left[c_{s-1},c_s\right], c_0=a, c_s=h^{-1}(c_{s-1}),$$

$$c_m=b, h^k(x)=h(h^{k-1}(x)), s=\overline{1,m}.$$

Иными словами, выражение (6) – это решение функционального уравнения

$$y(x)-p(x)y(h(x))=u(x), x\in[a;b];$$

Геселева Катерина Григорьевна, *аспирант Каменец-Подольского национального университета имени Ивана Огиенка. Украина, Хмельницкая область, г. Каменец-Подольский, улица Огиенко, 61.*

$$y(x)=0, x\notin[a;b],$$

где $u(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции с помощью пошагового метода. Условие (3) гарантирует тот факт, что количество шагов m конечно и $m\le\dfrac{b-a}{\sigma}$.

Нетрудно убедиться в том, что оператор S^{-1}, как и оператор S, линейный и ограниченный. Таким образом, учитывая вышесказанное, мы можем рассматривать уравнение (1) как операторное уравнение

$$(Sy)(x)=f(x)+(Ky)(x), \qquad (7)$$

где $f(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$.

Пусть $(Sy)(x)=u(x)$, тогда $y(x)=(S^{-1}u)(x)$ и мы от уравнения (7) приходим к уравнению

$$u(x)=f(x)+(Tu)(x). \qquad (8)$$

Оператор $T=KS^{-1}$ Фредгольмов как суперпозиция Фредгольмового и линейного ограниченного операторов. Иными словами, применив упомянутую выше замену, мы превращаем интегро-функциональное уравнение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x)=f(x)+\int_a^b T(x;t)u(t)\,dt \qquad (9)$$

с вполне непрерывным интегральным оператором T, ядро какого

$$T(x;t)=\begin{cases}K(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{m-s}K\left(x;\left(h^{-1}\right)^k(t)\right)\prod\limits_{k=1}^{i}p\left[\left(h^{-1}\right)^k(t)\right], t\in\Delta s,\\ K(x;t), t\in(c_{m-1};b), s=\overline{1,m-1}, x\in(a;b),\end{cases}$$

где $\left(h^{-1}\right)^k(t)=h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right)$.

Метод коллокации решения интегро-функционального уравнения.

Рассмотрим уравнения

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)\,dt,$$
$$x\in(a;b); y(x)=0, x\notin(a;b) \qquad (10)$$

Идея метода относительно уравнения (10) заключается в том, что приближенное решение $y_m(x)$ ищем в виде

$$y_m(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j\varphi_j(x)$$

и определяем из функционального уравнения

$$y_m(x)-p(x)y_m(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_m(t)\,dt,$$
$$y_m(x)=0, x\notin[a;b], \qquad (11)$$

$\{\varphi_j(x)\}$ – система линейно независимых на $[a;b]$ функций, $j=\overline{1,m}$, а неизвестные параметры $a_j=a_j(n)$ находим из условия

$$\gamma_m(x_i)=0,\ x_i=a+i\frac{b-a}{n}, i=\overline{0,n} \qquad (12)$$

$$\gamma_m(x)=y_m(x)-p(x)y_m(h(x))-f(x)-\int_a^b K(x;t)y_m(t)\,dt. \qquad (13)$$

Для нахождения параметров a_j получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j=b_i, i=\overline{1,n}, \qquad (14)$$

в какой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-T_j(x_i), b_i=f(x_i), i=\overline{1,n}. \qquad (15)$$

Систему уравнений (14) целесообразно записать в векторном виде $\Lambda a_k=b_k$.

Коллокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения.

Применим коллокационно-итеративный метод к уравнению (10). Приближенное решение $y_k(x)$ определяем согласно формулам

$$y_k(x)-p(x)y_k(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)z_k(t)\,dt, x\in(a;b); \qquad (16)$$
$$y_k(x)=0, x\notin[a;b];$$
$$z_k(x)=y_{k-1}(x)+\omega_k(x); \qquad (17)$$
$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\eta_j(x);$$
$$\eta_j(x)=\left(S^{-1}\varphi_j\right)(x).$$

Неизвестные параметры $a_j^k=a_j^k(n)$ находим из условия $\gamma_k(x_i)=0$, где $x_i\in[a;b]$, $i=\overline{1,n}$ узлы коллокации и

$$\gamma_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)z_k(t)\,dt-y_k(x)+p(x)y_k(h(x)), x\in(a;b). \qquad (18)$$

Введя обозначения $\varepsilon_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)\,dt-$ $-y_{k-1}(x)+p(x)y_{k-1}(h(x))$ и подставляя функцию $z_k(x)$, определенную формулой (17), в выражение (18) для поиска параметров a_j^k, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j^k=b_i^k, i=\overline{1,n}, \qquad (19)$$

где

$$\beta_{ij}=\varphi_j(x_i)-K_j(x_i), b_i^k=\mathcal{E}_k(x_i);$$
$$K_j(x)=\int_a^b K(x;t)\eta_j(t)\,dt, j=\overline{1,n};$$
$$\eta_j(x)=\left(S^{-1}\varphi_j\right)(x);$$
$$b_i^k=\mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему уравнений (19) можно записать в виде $\Lambda a_k=b_k$, где b_k, a_k – записаны в векторном виде и Λ – матрица, составленная из элементов β_{ij}.

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно взять как функцию $y_k(x)$, так и функцию $z_k(x)$. Следует обратить внимание на тот факт, что на основе анализа формул (16)–

(18) при $\omega_k(x)=0, k=1,2,3,\ldots$, приближения $y_k(x)$ находятся методом последовательных приближений.

Алгоритмы (11)–(13) и (16)–(18) сводят рассматриваемую задачу к коллокационному и коллокационно-итеративному методу решения интегрального уравнения с Фредгольма второго рода, для которых получены условия сходимости [2]. В частности имеет место теорема.

Теорема 1. Пусть соблюдается условие

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b \left|T(x,t)-T(x_0,t)\right|dt=0, \forall x_0\in[a,b]$$

и единица – регулярное значение интегрального уравнения (9). Пусть система функций $\{\varphi_i(x)\}$ и узлы $\{x_i\}, i=\overline{1,n}$ выбраны таким образом, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|T(x,t)-H_n(x,t)\right|dt=0,$$

где функция H_n выражается формулой $H_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x)T(x_i,t)$.

Тогда $q_n\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. существует такой номер n_0, что для всех фиксированных $n\ge n_0$ последовательность $\{y_k(x)\}$ согласно методу (17)–(19) строится однозначно и равномерно сходится к решению $y^*(x)$ уравнения (9).

Нестационарный коллокационно-итеративный метод.

Пусть, как и раньше, $\{\varphi_i(x)\}$ – заданная ортогональная и полная в $L_2(a;b)$ система, а $\{P_k\}$ – последовательность проектирующих операторов, определяемых посредством формулы

$$(P_k v)(x)=\int_a^b P_k(x,t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2(a,b), \tag{20}$$

в которой

$$P_k(x,t)=\sum_{i=1}^{n_k}\mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(t), \mu_i^{-1}=\int_a^b\varphi_i^2(x)dx, \tag{21}$$

где $k=1,2,3,\ldots,n_k>n_0=n\ge 1, n_{k_1}\le n_{k_2}$ при $k_1<k_2$.

Очевидно, проекционные операторы (20) ортогонально проектируют пространство $L_2(a;b)$ на его подпространство $L_2^{\,k}(a;b)$, причем $L_2^{\,k-1}(a;b)\subset L_2^{\,k}(a;b), k=1,2,3,\ldots$.

Суть предлагаемого метода применительно к уравнению (10) состоит в следующем. Пусть, исходя из начального приближения $y_0(x)\in L_2(a,b)$ и функции $s_0(x)$ такой, что

$$y_0(x)-p(x)y_0(h(x))=s_0(x), x\in(a,b) \tag{22}$$
$$y_0(x)=0, x\notin(a,b),$$

мы нашли приближение $y_{k-1}(x)$ и функцию $s_{k-1}(x)$.

Вычисляем функцию

$$\tilde{s}_{k-1}(x)=\int_a^b P_{k-1}(x,t)s_{k-1}(t)dt,$$

где $P_{k-1}(x,t)$ имеет вид (21). Решаем уравнения

$$\begin{gathered}\tilde{y}_{k-1}(x)-p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))=s_{k-1}(x), x\in(a,b);\\ \tilde{y}_{k-1}(x)=0, x\notin(a,b).\end{gathered} \tag{23}$$

Приближение $y_k(x)$ определяем как решение уравнения

$$\begin{gathered}y_k(x)-p(x)y_k(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)\tilde{z}_k(t)dt, x\in(a,b),\\ y_k(x)=0, x\notin(a,b),\end{gathered} \tag{24}$$

в котором

$$\tilde{z}_k(x)=\tilde{y}_{k-1}(x)+\omega_k(x),$$
$$\omega_k(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j^k\eta_j(x), x\notin(a,b), \tag{25}$$

неизвестные параметры a_j^k находим из условия

$$\tilde{r}_k(x_i)=0, i=\overline{1,n}, \tag{26}$$

где

$$\tilde{r}_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)\tilde{z}_k(t)dt-\tilde{z}_k(x)+p(x)\tilde{z}_k(h(x)), \tag{27}$$

система функций $\{\eta_i(x)\}$ в выражениях (25), (26) определяются из уравнений, которые в нашем случае принимают вид

$$\begin{gathered}\eta_i(x)-p(x)\eta_i(h(x))=\varphi_i(x), x\in(a,b),\\ \eta_i(x)=0, x\notin(a,b),\end{gathered} \tag{28}$$

где система функций $\{\varphi_i(x)\}$, как уже отмечалось, ортогональная и полная в пространстве $L_2(a;b)$.

Вводя обозначение

$$\varepsilon_k(x)=f(x)+\int_a^b K(x;t)\tilde{y}_k(t)dt-\tilde{y}_{k-1}(x)+p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))$$

и подставляя функцию $\tilde{z}_k(x)$, определяемую формулой (25), в выражение (27), а затем полученный результат – в условие (26) для нахождения параметров a_j^k, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j^k=b_i^k, i=\overline{1,n}, \tag{29}$$

в которой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij}=\int_a^b\left\{\varphi_j(x)-K_j(x)\right\}\psi_i(x)dx, i,j=\overline{1,n} \tag{30}$$

и

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), i = \overline{1,n}. \quad (31)$$

Как и раньше, систему уравнений (29) будем записывать в векторном виде $\Lambda a_k = b_k$.

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно брать любую из функций $y_k(x), \tilde{y}_k(x), \tilde{z}_k(x)$.

Следует обратить внимание на тот факт, что на основе анализа формул (22)–(27) при $s_0(x) = 0$ приближение $\tilde{z}_1(x)$ совпадает с приближением, построенным по колокационному методу, приближение $y_1(x)$ – с приближением, построенным по улучшенному колокационному методу, а при $\omega_k(x) = 0, k = 1,2,3,...,$ приближение $y_k(x)$ находится по нестационарному методу последовательных приближений.

Алгоритм (22)–(27) можно свести к нестационарному колокационно-итеративному методу решения интегро-функционального уравнения (1). В самом деле, формулы (22), (23), (24) и (27) можно записать в виде

$$(S\tilde{y}_{k-1})(x) = (P_{k-1}s_{k-1})(x),$$

$$(Sy_k)(x) = f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x),$$

$$\tilde{r}_k = f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x) - (S\tilde{y}_{k-1})(x) - (S\omega_k)(x).$$

С помощью этих формул условие (26) легко преобразуется к виду

$$(Sy_k - S\tilde{y}_{k-1} - S\omega_k)(x_i) = 0, i = \overline{1,n}.$$

Теперь положим

$$u_k(x) = s_k(x) = (Sy_k)(x), \alpha_k(x) = (S\omega_k)(x), \quad (32)$$

откуда следует

$$y_k(x) = \left(S^{-1}u_k\right)(x), \omega_k(x) = \left(S^{-1}\alpha_k\right)(x). \quad (33)$$

На основании формул (32), (33) и соотношения (28), получаем

$$u_k(x) = f(x) + (TP_{k-1}u_{k-1})(x) + (T\alpha_k)(x); \quad (34)$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), k = 1,2,3,..., \quad (35)$$

$$\int_a^b \{u_k(x) - (P_{k-1}u_{k-1})(x) - \alpha_k(x)\}\varphi_i(x)dx = 0, i = \overline{1,n}. \quad (36)$$

Теперь видно, что соотношения (34)–(36) – это нестационарный колокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения (1). В работах [1, 3] установлены различные достаточные условия сходимости и оценки погрешности этого метода для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из изложнных там результатов, в частности, следует утверждение.

Теорема 2. Если единица не является точкой спектра интегрального оператора T, при $k \to \infty$, и система функций $\{\varphi_i(x)\}$ полна в пространстве $L_2^k(a;b)$, то существует такой номер n, при котором нестационарный колокационно-итеративный метод (22)–(27) сходится, причем быстрота сходимости увеличивается с ростом n.

Заключение. В статье рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован коллокационный и колокционно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вайникко, Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г.М. Вайникко // Диференц. уравнения. – 1965. – № 2. – С. 244–254.
2. Лучка, А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1980. – 264 с.
3. Лучка, А.Ю. Быстрота сходимости одного проекционно-итеративного метода, основанного на тригонометрической колокации, для линейных интегральных уравнений / А.Ю. Лучка, Е.М. Луцев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 10–13.

Материал поступил в редакцию 10.10.2017

GESELEVA K.G. Kolokatsionny and kolokatsionno-iterative methods solutions of the integro-functional equations

Approximate methods for solving integro-functional equations are considered in the article. Investigated collocation and colocation-iterative (stationary and nonstationary) methods for finding approximate solutions of integro-functional equations.

УДК 004.4

Мухов С.В., Муравьев Г.Л., Савицкий Ю.В., Ашаев Ю.П.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТИПИЗАЦИИ ДАННЫХ И ЭЛЕМЕНТОВ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПЕРСОНАЛА, СВЯЗАННОГО С ИХ РАЗРАБОТКОЙ И ЭКСПЛУАТАЦИЕЙ

Введение. При изучении технологий обработки данных актуальна максимальная типизация получаемых навыков в силу того, что за счет этого может быть обеспечена высокая надежность функционирования программных систем. При этом необходимо в качестве рабочего материала при обучении использовать системы с перспективой использования полученных навыков в будущем в зависимости от места и целевого предназначения в обработке данных конкретного персонала. При этом типизация существенно определяет качество

Мухов Сергей Владимирович, *к.т.н., доцент кафедры информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Муравьев Геннадий Леонидович, *к.т.н., доцент, профессор кафедры интеллектуальных информационных технологий Брестского государственного технического университета.*

Савицкий Юрий Викторович, *к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий Брестского государственного технического университета.*

Ашаев Юрий Павлович, *к.т.н., доцент кафедры информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.