МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С Б О Р Н И К
Н А У Ч Н Ы Х С Т А Т Е Й
кафедры
"Сопротивление материалов и теоретическая механика"

Брест 1994

Научное издание

"Сборник научных статей". Кафедра "Сопротивление материалов и теоретическая механика".

На русском языке.

Печатается по решению Ученого Совета Брестского политехнического института.

Ответственный за выпуск Хвисевич В.М.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 28.12.93 г. Формат 60x84/16. Усл.п.л.7,9. Уч.изд.л. 8,5. Заказ № 353. Тираж 60 экз. Отпечатано в Брестском политехническом институте. 224017, Брест, ул.Московская, 267.

"Сборник научных статей" предназначен для студентов, аспирантов, работников научных и проектных организаций, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела, теплофизики, строительных конструкций. Изложены новые методы численного решения краевых задач теплопроводности и термоупругости при воздействии на тело высоких температурных полей; данные исследований напряженно-деформированного состояния пластин переменной толщины, гофрированных труб, клинообразных тел, пружин; результаты исследования тепловых процессов плазменных технологий; экспериментально-теоретические данные о характере сопротивления железобетонных элементов при изгибе с поперечной силой, предложения по расчетной модели; другие вопросы.

Научно-исследовательская работа кафедры "Сопротивление материалов и теоретическая механика" Брестского политехнического института проводится по нескольким научным направлениям, объединяемых в общую проблему "Снижение материалоемкости, повышение прочности и эксплуатационных качеств механических и строительных конструкций".

Материалы статей включенных в настоящий сборник, содержат:

- вопросы, связанные с разработкой новых методов численного решения краевых задач теплопроводности и термоупругости при воздействии на тело высоких температурных полей;
- данные исследований напряженно-деформирующего состояния пластин переменной толщины, гофрированных труб; клинообразных тел, цилиндрических элементов, пружин;
- соображения о процессах, протекающих в твердых телах при ударных воздействиях;
- результаты исследования тепловых процессов плазменных технологий;
- экспериментально-теоретические данные о характере сопротивления железобетонных элементов при изгибе с поперечной силой и предложения по расчетной модели;
- некоторые другие вопросы.

Наряду со статьями с изложением результатов завершенных исследований, в сборнике содержаться статьи, где, на основании обзора имеющихся литературных данных, намечаются пути дальнейших экспериментально-теоретических работ. Включение этих статей в сборник оправдано, так как их авторы - аспиранты и соискатели.

Коллектив кафедры надеется, что опубликованные работы будут полезны аспирантам, студентам, работникам научных и проектных организаций, специализирующиеся в области механики деформированного твердого тела, теплофизики, строительных конструкций.

Заведующий кафедрой В.М.Хвисевич.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

В.А.Савченко, С.В.Черненко

Пластинки являются распространенными элементами всевозможных конструкций и машин и находят широкое применение в конструкциях новой техники.

Теория поперечного изгиба прямоугольных пластин постоянной толщины и толщины, изменяющейся вдоль какой-либо координатной оси достаточно подробно изучена. Однако, в силу ряда конструктивных соображений и технологических особенностей, а также при проектировании конструкций минимального веса необходимо осуществлять прочностной расчет пластин, толщина которых h является функцией поверхностных координат. Возникающие при этом трудности связаны с невозможностью получения точного решения разрешающего уравнения пластинки произвольной жесткости, представляющей собой дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами.

В настоящей работе рассмотрен численный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольных свободно опертых пластин произвольной жесткости, основанный на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений. Все основные операции метода представлены в матричной записи. Алгоритм апробирован на решении ряда конкретных задач.

Разрешающее уравнение прямоугольной пластинки переменной толщины

Рассматривается прямоугольная пластинка (рис. I) со сторонами a и b. Толщина пластинки $h(x,y)$ является произвольной функцией декартовых координат x, y. Предполагается, что во всей прямоугольной области G толщина пластинки $h(x,y)$ изменяется плавно, без резких скачков. Тогда выражения для изгибающих M_x, M_y и крутящего M_{xy} моментов, выведенные для пластинки постоянной толщины, остаются применимыми с достаточной точностью и в этом случае:

$$M_x = -D(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \qquad (I)$$

$$M_y = -D(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right);$$

$$\mathcal{M}_{xy}=\mathcal{M}_{yx}=\mathcal{D}(x,y)(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{D}(x,y)$ – цилиндрическая жесткость как функция координат

$$\mathcal{D}(x,y)=\frac{E h^3(x,y)}{12(1-\nu^2)}, \tag{3}$$

E – модуль упругости первого рода; W – нормальный прогиб; ν – коэффициент Пуассона.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \mathcal{M}_y}{\partial y^2}=-q(x,y), \tag{4}$$

где $q(x,y)$ – интенсивность внешней нагрузки.

Подставляя выражения для изгибающих моментов (I), (2) в уравнение (4), получим

$$\mathcal{D}\Delta\Delta W+2\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial x}\frac{\partial\Delta W}{\partial x}+2\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial y}\frac{\partial\Delta W}{\partial y}+\Delta\mathcal{D}\Delta W-$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)=q. \tag{5}$$

Здесь символом Δ обозначен оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Вводя обозначения

$$L(\mathcal{D},W)=\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{7}$$

и учитывая (6), разрешающее дифференциальное уравнение пластинки переменной толщины (5) запишем в виде

$$\Delta(\mathcal{D}\Delta W)-(1-\nu)L(\mathcal{D},W)=q. \tag{8}$$

Сведение разрешающего уравнения четвертого порядка к системе уравнений четвертого порядка. Векторная формулировка краевой задачи.

Изгибающие моменты в пластинке определяются выражениями (I). Найдем сумму этих моментов

$$\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y = (1+\nu)\mathcal{D}(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

и введем, аналогично [I], М - приведенный изгибающий момент

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{M}_y}{1+\nu} = \mathcal{D}(x,y)\Delta W. \tag{10}$$

Тогда, относительно двух переменных - нормального прогиба W и приведенного момента М из ур нений (8) и (I0) получим следующую систему

$$\begin{aligned} &\Delta\mathcal{M} - (1-\nu)L(\mathcal{D}, W) = q, \\ &\mathcal{M} - \mathcal{D}\Delta W = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где каждое из уравнений не выше второго порядка. В уравнениях (II) перейдем к безразмерным величинам, для чего введем обозначения

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{x}{a}; \quad \beta = \frac{y}{b}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \\ &\overline{W} = \frac{W}{h_0}; \quad \overline{\mathcal{D}}(\alpha,\beta) = \frac{\mathcal{D}(\alpha,\beta)}{\mathcal{D}_0}; \\ &\overline{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}}{Eh_0^2}; \quad \overline{q} = \frac{q}{E}; \\ &\mu = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h_0^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь a и b - размеры сторон прямоугольной пластинки;
D_0, h_0 - соответственно некоторая характерная жесткость и толщина пластинки.

С учетом соотношений (I2) система уравнений (II) примет вид

$$\frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial \beta^2} + \lambda^{-2} \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\nu}{\mu} L(\overline{D}, W) = \frac{\bar{q} b^2}{h_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\overline{M}}{\overline{D}} = 0. \qquad (I3)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец, компонентами которого являются искомые величины W и M.

$$\vec{Z} = (\overline{W}, \overline{M}). \qquad (I4)$$

Тогда, переходя к матричной записи, уравнения (I3) представим в следующей форме

$$[A]\vec{Z}_{\alpha\alpha} + [B]\vec{Z}_{\beta\beta} + [C]\vec{Z}_{\alpha\beta} + [G]\vec{Z} = \vec{R} \qquad (I5)$$

Здесь индекс при вектор-функции $\vec{Z}$ означает дифференцирование по соответствующей безразмерной координате.

В уравнении (I5) ненулевые элементы квадратных матриц $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[G]$, имеющих порядок $[2 \times 2]$, а также вектор $R_{[1\times 2]}$, определяются следующими выражениями

$$a_{11} = \frac{\nu-1}{\mu} \overline{D}_{\beta\beta}; \quad a_{12} = \lambda^{-2}; \quad a_{21} = 1;$$

$$b_{11} = \frac{\nu-1}{\mu} \overline{D}_{\alpha\alpha}; \quad b_{12} = 1; \quad b_{21} = \lambda^2; \qquad (I6)$$

$$c_{11} = -\frac{2(\nu-1)}{\mu} \overline{D}_{\alpha\beta}; \; q_{22} = -\frac{\mu}{\overline{D}}; \; r_1 = \frac{\bar{q} b^2}{h_0^2}.$$

Выразим граничные условия свободного опирания краев прямоугольной пластинки в компонентах вектора $\vec{Z}$.

При $x = 0, a$ имеем $W = 0$ и $M_x = 0$; (I7)

При $y = 0, b$ имеем $W = 0$ и $M_y = 0$. (I8)

Учитывая зависимость (I0) и переходя к безразмерным величинам, запишем условия (I7) и (I8) в векторной форме

$$\vec{z}\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \alpha=1}} = 0; \qquad \vec{z}\Big|_{\substack{\beta=0\\ \beta=1}} = 0. \tag{19}$$

Метод блочной итерации

В безразмерных переменных α, β прямоугольная область G с любым отношением сторон λ отображается в квадратную со стороной, равной единице (рис. I). Разделим каждую из сторон на N равных частей и покроем область G квадратной сеткой. Шаг сетки будет $\delta = 1/N$. Представим векторное уравнение (I5) в конечных разностях, для чего применим центральные операторы, имеющие погрешность квадрата шага $O(h^2)$.

$$\vec{z}_{\alpha\alpha} = \frac{\vec{z}_{i+1,j} - 2\vec{z}_{i,j} + \vec{z}_{i-1,j}}{\delta^2};$$

$$\vec{z}_{\beta\beta} = \frac{\vec{z}_{i,j+1} - 2\vec{z}_{i,j} + \vec{z}_{i,j-1}}{\delta^2}; \tag{20}$$

$$\vec{z}_{\alpha\beta} = \frac{\vec{z}_{i+1,j+1} + \vec{z}_{i-1,j-1} - \vec{z}_{i-1,j-1} - \vec{z}_{i+1,j-1}}{4\delta^2}$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$$

Подставляя разностные операторы (20) в уравнение (I5) для каждой внутренней точки (i, j) сеточной области G_h получим

$$[A_{ij}]\vec{z}_{i+1,j} + [Q_{ij}]\vec{z}_{i,j} + [A_{ij}]\vec{z}_{i-1,j} + [B_{ij}]\vec{z}_{i,j-1} +$$
$$+ \frac{1}{4}[C_{ij}]\left(\vec{z}_{i-1,j-1} - \vec{z}_{i+1,j-1}\right) + [B_{ij}]\vec{z}_{i,j+1} + \tag{21}$$
$$+ \frac{1}{4}[C_{ij}]\left(\vec{z}_{i+1,j+1} - \vec{z}_{i-1,j+1}\right) = \frac{R_{ij}}{N^2}.$$

Здесь элементы квадратной $[2 \times 2]$ матрицы Q_{ij} определяются следующими выражениями

$$q^{11}_{i,j} = -\frac{2(\nu-1)}{\mu}\left(\Delta\overline{\mathcal{D}}\right)_{i,j}; \quad q^{12}_{i,j} = -2(1+\lambda^{-2});$$

$$q^{21}_{i,j} = -2\left(1+\lambda^2\right); \qquad q^{22}_{i,j} = -\frac{\mu}{N^2\overline{\mathcal{D}}}. \tag{22}$$

Узлы сетки, оказавшиеся на границе области G_h, будем называть граничными узлами или границей Γ_h области G_h. Для этих узлов граничные условия (15) запишем в виде

$$\mathcal{Z}\Big|_{\substack{0,j\\N,j}} = 0; \qquad \mathcal{Z}\Big|_{\substack{i,0\\i,N}} = 0 \tag{23}$$

Множество узлов области $G_h + \Gamma_h$, которые расположены на одной и той же горизонтальной прямой $j = const$, назовем строкой сеточной области.

Для решения краевой задачи (21)-(23) применим "однострочечный" метод блочной итерации. Обозначим индекс итерационного процесса через К (К$\gg$ I). Перенося подчеркнутые члены в уравнении (21) в правую часть, получим

$$[A_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i+1,j} + [Q_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i,j} + [A_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}_{i-1,j} = \frac{R_{i,j}}{N^2} -$$

$$-[B_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i,j-1} - \frac{1}{4}[C_{i,j}]\left(\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i-1,j-1} - \mathcal{Z}^{(k)}_{i+1,j-1}\right) - \tag{24}$$

$$-[B_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i,j+1} - \frac{1}{4}[C_{i,j}]\left(\vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i+1,j+1} - \vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i-1,j+1}\right).$$

Решение системы уравнений (24) при заданных граничных условиях (23) будем искать в виде (матричные скобки для удобства записи опускаем)

$$\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j} = P_{i,j}\,\mathcal{Z}^{(k)}_{i+1,j} + q^{(k)}_{i,j} \quad \begin{pmatrix} j>0=const \\ i=1,2,\dots,N-1 \end{pmatrix} \tag{25}.$$

Здесь $P_{i,j}$ - неизвестные матрицы [2 x 2] не зависящие от порядкового номера итерационного процесса;

$q_{ij}^{(k)}$ - векторы размерности 2, которые подлежат определению.

Используя формулу (25) как рекуррентную зависимость, найдем

$$Z_{i-1,j}^{(k)} = P_{i-1,j} Z_{i,j}^{(k)} + q_{i-1,j}^{(k)} = P_{i-1,j}\left[P_{i-1,j} Z_{i+1,j}^{(k)} + q_{i,j}^{(k)}\right] + q_{i-1,j}^{(k)} \qquad (26)$$

Подставим выражения (25) и (26) в разностное уравнение (24). Собирая коэффициент при $Z_{i+1}^{(k)}$ и приравнивая его нулю, а свободный член - правой части уравнения (24), получим

$$\left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right) P_{i,j} + A_{i,j} = 0,$$

$$\left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right) q_{i,j}^{(k)} + A_{i,j}\, q_{i-1,j}^{(k)} = F_{i,j}^{(k-1)}, \qquad (27)$$

где вектор правой части

$$F_{i,j}^{(k-1)} = \frac{R_{i,j}}{N^2} - B_{i,j} Z_{i,j-1}^{(k)} - \frac{1}{4} C_{i,j}\left[Z_{i-1,j-1}^{(k)} - Z_{i+1,j-1}^{(k)}\right] -$$

$$- B_{i,j} Z_{i,j+1}^{(k-1)} - \frac{1}{4} C_{i,j}\left[Z_{i+1,j+1}^{(k-1)} - Z_{i+1,j-1}^{(k-1)}\right]. \qquad (28)$$

Выполнение условий (27) гарантирует возможность представления решения уравнения (24) в виде (25).

Из выражений (27) получаем рекуррентные соотношения для определения матриц $P_{i,j}$ и векторов $q_{i,j}^{(k)}$

$$P_{i,j} = -\left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right)^{-1} A_{i,j};$$

$$q_{i,j}^{(k)} = \left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right)^{-1}\left[F_{i,j}^{(k-1)} - A_{i,j}\, q_{i-1,j}^{(k)}\right]. \qquad (29)$$

Начальные значения прогоночных коэффициентов $P_{0,j}$ и $q_{0,j}$ можно определить, сравнив первые граничные условия (i = 0) с формулой (25), записанной для i = 0:

$$P_{0,j} = q_{0,j} = 0 \qquad (30)$$

Тогда из (29) для i = I получим

$$P_{1,j} = -Q_{1,j}^{-1} A_{1,j}; \qquad q_{1,j}^{(k)} = Q_{1,j}^{-1} F_{1,j}^{(k-1)} \qquad (31)$$

При решении системы уравнений приходится обращать матрицы всего второго порядка. Элементы обратных матриц можно получить в явном виде, а именно, для матрицы

$$H_{i-1,j} = \left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right)^{-1} \tag{32}$$

имеем

$$h^{11} = h^{*}_{22}\Delta^{-1};\quad h^{12} = h^{*}_{12}\Delta^{-1};\quad h^{21} = h^{*}_{21}\Delta^{-1};\quad h^{22} = h^{*}_{11}\Delta^{-1},$$

где h^{*}_{mn} - элементы необращенной матрицы

$$h^{*}_{mn} = \sum_{k=1}^{2} a_{mk} p_{kn} + q_{mn};$$

$$\Delta h^{*}_{11} h^{*}_{22} - h^{*}_{21} h^{*}_{12} \qquad (m, n = 1, 2)$$

Для обратной матрицы

$$G_{1,j} = Q^{-1}_{1,j} \tag{33}$$

элементами будут выражения

$$q_{11} = q_{22}\Delta_1^{-1};\quad q_{12} = -q_{21}\Delta_1^{-1};\quad -q_{21} = q_{12}\Delta_1^{-1};\quad q_{11} = \Delta_1^{-1},$$

где

$$\Delta_1 = q_{11} q_{22} - q_{21} q_{12}$$

Теперь формулы (29) и (31) позволяют определить все неизвестные коэффициенты $P_{1,j}$, $P_{2,j}$, ... , $P_{N-1,j}$ и $q^{(k)}_{1,j}, q^{(k)}_{2,j}, \ldots, q^{(k)}_{N-1,j}$ (прямой ход матричной прогонки).

Значения дискретной вектор-функции $Z_{i,j}$ определяются в обратной последовательности.

Из левых граничных условий (23) имеем

$$Z^{(k)}_{N,j} = 0 \tag{34}$$

Тогда, воспользовавшись формулой 25), запишем

$$Z^{(k)}_{N-1,j} = P_{N-1,j} Z^{(k)}_{N,j} + q^{(k)}_{N-1,j}$$

откуда

$$Z^{(k)}_{N-1,j} = q^{(k)}_{N-1,j} \tag{35}$$

Наконец, по рекуррентной формуле (25) поочередно определяем

$$\mathcal{Z}^{(k)}_{N-2,j},\quad \mathcal{Z}^{(k)}_{N-3,j},\ \dots,\ \mathcal{Z}^{(k)}_{1,j}$$ (обратный ход матричной прогонки).

Определение векторов $\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j}$ на каждом шаге итерационного процесса осуществляется последовательно для всех значений $j = 2,\ 3,\ \dots,\ N-1$. Процесс заканчивается, если выполняется условие

$$\lim\left\{\|\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j}\| - \|\mathcal{Z}^{(k-1)}_{i,j}\|\right\} < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычислений.

Следует отметить, что при решении задач об изгибе пластинок методом конечных разностей для вычисления значений производных с нужной степенью точности необходимо брать сетку с более мелким шагом, чем для вычисления искомой функции прогиба.

"Двустрочечный" метод блочной итерации дает более быструю сходимость итерационного процесса по сравнению с однострочечным.

В "р-строчечном" методе первое приближение векторов находится сразу на р строках путем решения методом прогонки системы "р" уравнений. Чем больше "р", тем быстрее сходится итерационный процесс, но более трудоемким становится выполнение каждой итерации. Если р $= N-1$, то процесс состоит всего из одной итерации и совпадает с методом матричной прогонки для уравнений второго порядка в обыкновенных разностях. Заметим, что для возможности применения "р-строчечного" метода необходимо, чтобы число строк $N-1$ нацело делилось на "р".

Численный анализ прямоугольной пластинки с непараллельными образующими гранями, нагруженной гидростатическим давлением.

Рассматривается пластинка, толщина которой задана линейной функцией вида

$$h(\alpha,\beta) = t(\alpha+\beta) + c \tag{36}$$

и в угловых точках пластины $h(\alpha,\beta)$ принимает значения

$$h(A) = c\,; \qquad h(C) = 2t + c\,;$$

$$h(B)=t+C;\quad h(\mathcal{D})=t+C \tag{37}$$

Безразмерная цилиндрическая жесткость пластины $\overline{\mathcal{D}}$ (α, β) определяется выражением

$$\overline{\mathcal{D}}(\alpha,\beta)=\frac{h^3(\alpha,\beta)}{h_0^3}=\frac{[t(\alpha,\beta)+C]^3}{h^3} \tag{38}$$

Гидростатическое давление, действующее на пластинку представим в виде

$$\bar{q}=q_0\frac{\alpha}{\mathrm{E}} \tag{39}$$

С учетом (38) и (39) ненулевые элементы матриц коэффициентов уравнения (24) примут вид

$$a_{11}=-\frac{t^2[t(i+j)+NC]}{2(1+\nu)a^2h_0N};\quad b_{11}=a_{11};$$

$$c_{11}=-2a_{11};\quad q_{11}=-4a_{11}; \tag{40}$$

$$q_{11}=-\frac{12(1-\nu^2)a^2h_0N}{[t(i+j)+NC]^3};\quad z_1=\frac{q_{0i}\,b^2}{\mathrm{E}h_0^2N^2}.$$

Численные результаты получены для пластинок переменной толщины со следующими параметрами

$\lambda^{-1}=\dfrac{b}{a}=1{,}5;\quad h_0=1\,мм;\quad t=0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}7$ при С = I мм

а также для пластинки постоянной толщины

Во всех рассматриваемых примерах принималось q =0,023 МПа; ν = 0,3; Е = 2 · I0^5 МПа. При этом использовалась конечно-разностная сетка 8 х 8, позволяющая получить численные результаты для пластинки постоянной толщины, отличающиеся от известных справочных данных на 0,0I %.

На рис.4 приведено распределение нормального прогиба вдоль сеточных линий α = 0,5 (сплошные кривые и β = 0,5 (штриховые

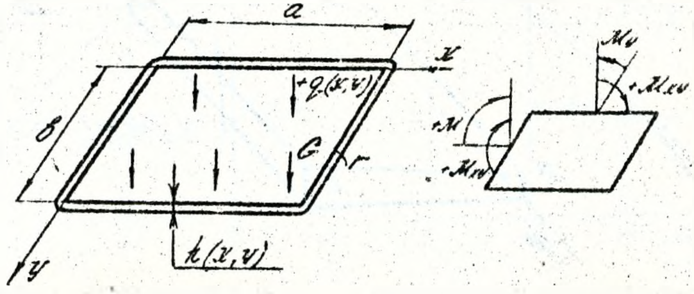


Рис. I Пластинка произвольной толщины

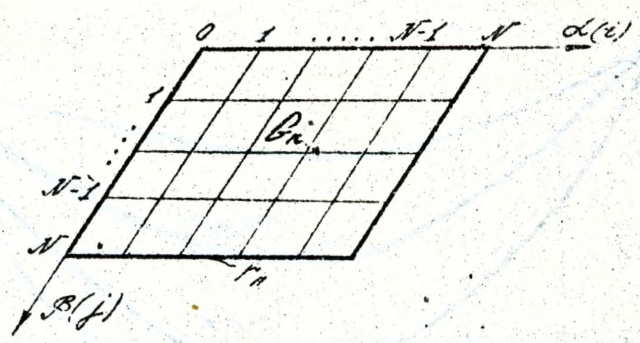


Рис. 2 Аппроксимация пластинки сеточной областью

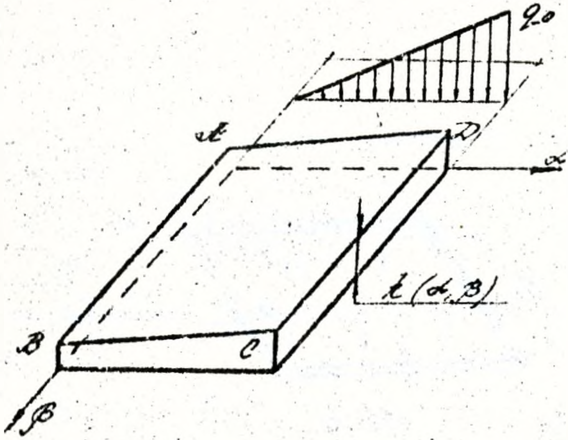


Рис. 3 Пластинка при гидростатическом нагружении

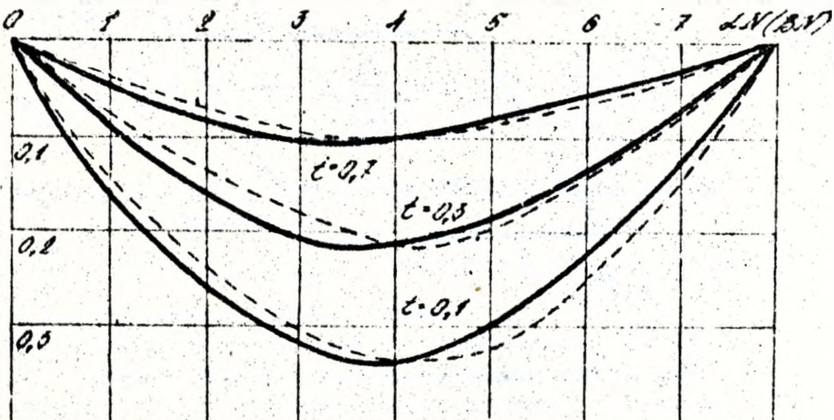


Рис. 4 Нормальный прогиб пластинки

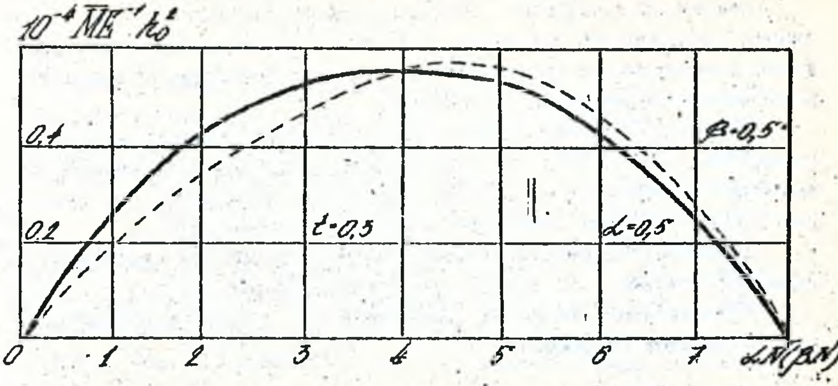


Рис. Б Изменение приведенного момента вдоль координатных осей линий

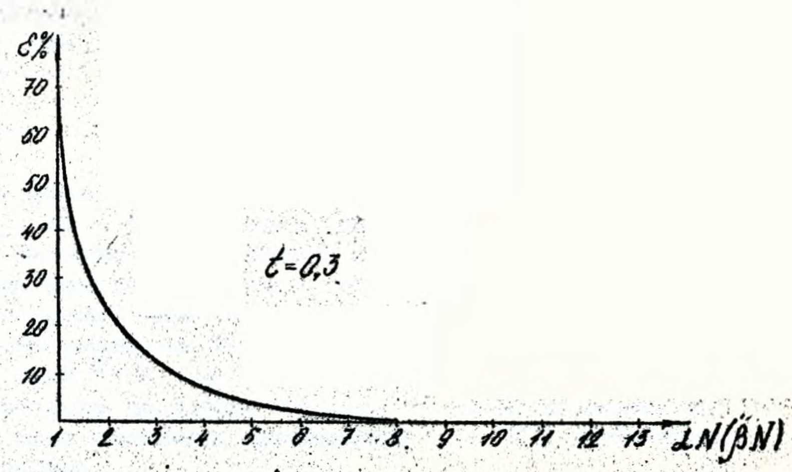


Рис. 6 График сходимости итерационного процесса

кривые).

Как видно из графика, незначительная непараллельность образующих поверхностей пластинки приводит к качественному (смещение точки максимального прогиба W_{max}) и значительному количественному изменению нормального прогиба.

На рис. 5 показано изменение приведенного момента вдоль координатных линий α , β , проходящих через центр пластинки, при значении параметра t = 0,3. Варьирование параметра t не приводит к существенному изменению приведенного момента $\overline{M}$.

Характер сходимости итерационного процесса для пластинки переменной толщины (t = 0,3) представлен на рис. 6.

Относительная точность вычислений ε = 0,00I достигается уже на восьмой итерации.

Литература

I. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. -М.: Изд-во Московского университета, I958. -5I2с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. -М.: Гостехиздат, I948. - 4I2с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах./Под ред. Н.А.Биргера и Я.Т.Пановко. - М.: Машиностроение, I968. - Том 2, 478с.

РАСЧЕТ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРУЖИН, НАВИТЫХ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

П.И.Соловей

Пружина, навитая с предварительным натягом, характеризуется усилием предварительного натяжения N_0. При приложении к пружине растягивающей силы P (рис.Iа) возникает удлинение $\Delta L \neq 0$ лишь тогда, когда $P > N_0$. Ее характеристика имеет вид, изображенный на рис. Iб. Угол наклона характеристики определяется жесткостью C. Предположим, что левый торец пружины закреплен, а к правому приложена сила $P > N_0$. Если мгновенно снять нагрузку, то витки пружины придут в движение. Из непосредственных наблюдений можно заметить, что вблизи разгруженного правого торца появляется зона посадки витков (рис. 2) длиной ℓ, которая движется влево с постоянным увеличением ее длины. К моменту, когда все витки "посажены" друг на друга, зона посадки имеет массу всей пружины M и некоторую скорость V. После чего происходит удар всей массы пружины о левую опору. С помощью варьирования параметров N_0, C, M и P можно создать значительные ударные импульсы без использования дополнительно присоединенных сосредоточенных масс.

Для приближенной оценки ударного импульса рассмотрим дискретную модель пружины [I]. Пусть имеется упругий невесомый стержень AB (рис. 3а) длиной ℓ_0, разделенный с помощью абсолютно жестких перегородок на n частей. Осевая жесткость стержня C. При растяжении стержня силами N_0 его длина увеличится на величину $\Delta \ell_0 = N_0/C$ и станет равной L_0:

$$L_0 = \ell_0 + \Delta \ell_0$$

Тогда расстояние между перегородками увеличится и станет равным L_0/n. В этом состоянии между перегородками устанавливаются абсолютно жесткие элементы длиной L_0/n и массой M/n. Правые торцы элементов жестко соединяются с соответствующими перегородками. После снятия нагрузки N_0 внутренний стержень оказывается растянутым. Если такую кассету из n элементов растянуть силой $P > N_0$ (рис. 3б), то незакрепленные торцы элементов и перегородок разойдутся. Очевидно, что данная дискретная модель имеет статическую характеристику (рис. Iб), соответствующую пружине.

На рис. 4а изображена расчетная схема в деформированном состоянии. Обозначим через W_1 и W_2 перемещения сечений, где

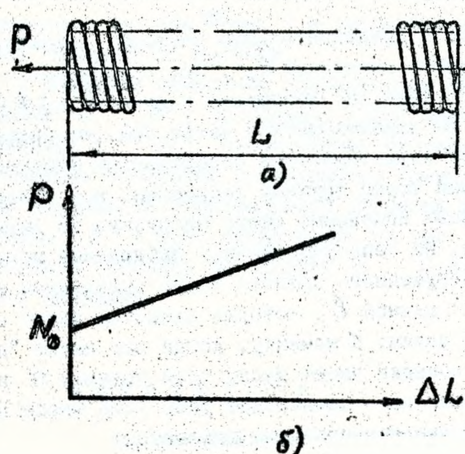
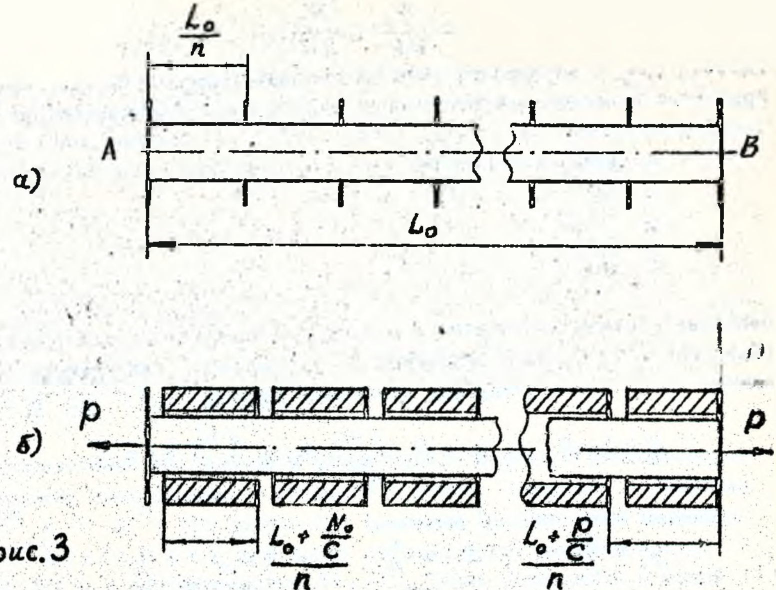


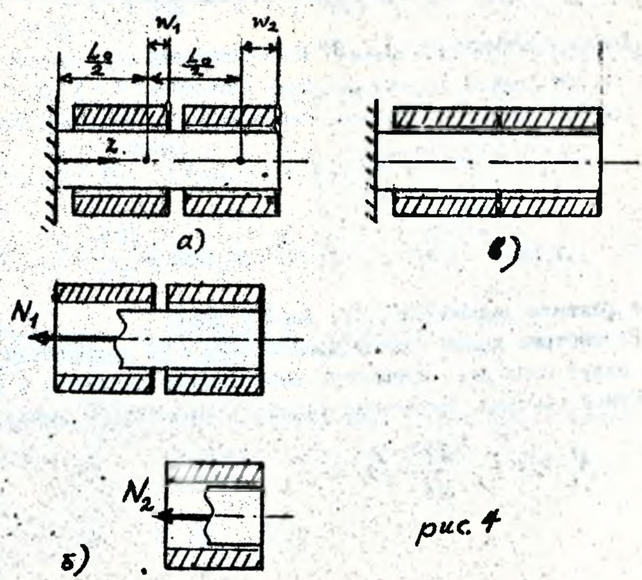
рис. 1

рис. 2



$\frac{L_o}{n}$
A
B
а)
L_o
p
б)
p
$\frac{L_o + \frac{N_o}{C}}{n}$
$\frac{L_o + \frac{p}{C}}{n}$

рис. 3



w_1
w_2
$\frac{L_o}{2}$
$\frac{L_o}{2}$
z
а)
в)
N_1
N_2
б)

рис. 4

закреплены массы. Так как $n=2$, то

$$W_1 = \frac{N_1}{2c}, \quad W_2 = \frac{N_1}{2c} + \frac{N_2}{2c} \tag{1}$$

где: N_1, N_2 - внутренние силы на соответствующих участках (рис.4б). Уравнения движения для отсеченных частей, изображенных на рис. 4б, будут иметь вид:

$$\frac{M}{2}\frac{d^2W_1}{dt^2} + \frac{M}{2}\frac{d^2W_2}{dt^2} + N_1 = 0,$$

$$\frac{M}{2}\frac{d^2W_2}{dt^2} + N_2 = 0. \tag{2}$$

Движение системы начинается в момент $t=0$ после того, как растягивающая сила $P\ (>N_0)$ была мгновенно снята. То есть, для системы уравнений (1..2) имеем следующие начальные условия:

$$N_1(0)=P, \quad N_2(0)=P, \quad \frac{dW_1}{dt}(0) = \frac{dW_2}{dt}(0) = 0. \tag{3}$$

Введем безразмерные величины

$$\left.\begin{aligned} & y_i = \frac{2c}{P}W_i, \quad x_i = \frac{N_i}{P}, \quad i=1,2, \\ & \tau = \omega t, \quad \omega = 2\sqrt{\frac{c}{M}}, \quad (\ )^{\cdot} = \frac{d}{d\tau}(\ ). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда соотношения (1...3) принимают вид

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + x_2; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + x_1 = 0, \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \tag{7}$$

Точное решение задачи (6), (7) дано в [1].

Рассмотрим далее задачу для системы с n элементами (рис.5). Здесь будут проходить процессы, аналогичные процессам в двухэлементной системе. Начальные условия в момент $t=0$ имеют вид (3)

$$N_i(0) = P, \quad \frac{dW_i}{dt}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

На интервале времени $T^{(1)}=\{t/0\le t\le t_1\}$ система будет иметь n степеней свободы и в момент $t=t_1$ происходит удар $n^{го}$ тела о $(n-1)^{ое}$. Далее на интервале $T^{(2)}=\{t/t_1\le t\le t_2\}$ система будет иметь $(n-1)$ степень свободы. Причем, $(n-1)^{ое}$ тело имеет массу двух элементов $2M/n$. Начальные условия определяются с учетом сохранения импульса системы:

$$
\begin{aligned}
&W_i^{(2)}(t_{1+})=W_i^{(1)}(t_{1-}), \quad i=1,2,\dots,n-1,\\
&\frac{dW_i^{(2)}}{dt}(t_{1+})=\frac{dW_i^{(1)}}{dt}(t_{1-}), \quad i=1,2,\dots,n-2,\\
&2\frac{M}{n}\frac{dW_{n-1}^{(2)}}{dt}(t_{1+})=\frac{M}{n}\frac{dW_{n-1}}{dt}(t_{1-})+\frac{M}{n}\frac{dW_n^{(1)}}{dt}(t_{1-}) .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Образование на свободном конце тела с массой $2M/n$ моделирует образование зоны посадки в реальной г ужине. Следующие соударения $(n-1)^{го}$ и $(n-2)^{го}$ тел происходит в момент t_2. При этом на интервале $T^{(3)}=\{t/t_2\le t\le t_3\}$ на конце стержня будет двигаться тело массой $3M/n$ и протяженностью $3L_0/n$. Таких соударений в самой системе будет $n-1$. Следующее $n^{ое}$ соударение - это удар всей системы о левую опору.

Таким образом, при движении на $k^{ом}$ интервале $T^{(k)}=\{t/t_{k-1}\le t\le t_k\}$ система имеет $(n+1-k)$ степеней свободы. Зона посадки состоит из k тел с общей массой kM/n. Начальные условия определяются как:

$$
\begin{aligned}
&W_i^{(k)}(t_{k-1+})=W_i^{(k-1)}(t_{k-1-}); \quad i=1,2,\dots,n+1-k,\\
&\frac{dW_i^{(k)}}{dt}(t_{k-1+})=\frac{dW_i}{dt}(t_{k-1-}), \quad i=1,2,\dots,n+1-k,\\
&k\frac{M}{n}\frac{dW_{n+1-k}^{(k)}}{dt}(t_{k-1+})=\frac{M}{n}\frac{dW_{n+1-k}^{(k-1)}}{dt}(t_{k-1-})+(k-1)\frac{M}{n}\frac{dW_{n+2-k}^{(k-1)}}{dt}(t_{k-1-}).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Уравнения движения здесь удобно составлять, рассматривая движение отсеченной по $j^{ому}$ элементу части. Пусть $t\in T$:

$$
\frac{M}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{d^2W_i^{(1)}}{dt^2}+N_j^{(1)}=0
\tag{11}
$$

Из (II) исключим перемещения $W_i^{(1)}$ с помощью соотношений упругости:

$$W_i = \sum_{s=1}^{i} \frac{N_s}{nC} \quad . \tag{I2}$$

Уравнение (II) принимает вид

$$\frac{M}{n^2C} \sum_{i=j}^{n} \sum_{s=1}^{i} \frac{d^2 N_s^{(1)}}{dt^2} + N_j^{(1)} = 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{I3}$$

Анологично (4) введем безразмерные обозначения

$$y_i = \frac{nC}{P} W_i \ , \ x_i = \frac{N_i}{P} \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \ ;$$
$$\tau = \omega t \ , \ \omega = n\sqrt{\frac{C}{M}} \ , \ (\ )^{\cdot} = \frac{d}{d\tau}(\ ) \ . \tag{I4}$$

Тогда уравнения (I3) записываются как

$$\sum_{i=j}^{n} \sum_{s=1}^{i} \ddot{x}_s^{(1)} + x_j^{(1)} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{I5}$$

которые удобно представить в виде

$$\sum a_{js} \ddot{x}_s^{(1)} + x_j^{(1)} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{I6}$$

$$a_{js} = n + 1 - s\eta(s - j - 1) - j\eta(j - s) \tag{I7}$$

где: $\eta(x)$ – функция Хевисайда.

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Система уравнений (I6) в матричной форме принимает вид

$$A^{(1)} \ddot{X}^{(1)} + X^{(1)} = 0,$$
$$A^{(1)} = \| a_{ij} \|, X^{(1)T} = \| x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)} \|, \ i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{I8}$$

Начальные условия

$$\tau = 0, \ x_i^{(1)} = 1, \ \dot{x}_i^{(1)} = 0, \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{I9}$$

При движении на $k^{ом}$ участке (время $-\ \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$), система уравнений движения имеет вид (18)

$$A^{(k)}\ddot{X}^{(k)} + X^{(k)} = 0,$$

$$A^{(k)} = \|a_{ij}\|, \quad i,j = 1,2,\ldots,n+1-k, \tag{20}$$

$$X^{(k)T} = \| x_1^{(k)}, x_2^{(k)},\ldots, x_{n+1-k} \|.$$

Начальные условия для системы (20) определяются при $\tau = \tau_{k-1+}$ из соотношений (10)

$$x_i^{(k)}(\tau_{k-1+}) = x_i^{(k-1)}(\tau_{k-1-}), \quad i = 1,2,\ldots,n+1-k,$$

$$\dot{x}_i^{(k)}(\tau_{k-1+}) = \dot{x}_i^{(k-1)}(\tau_{k-1-}), \quad i = 1,2,\ldots,n+1-k, \tag{21}$$

$$\dot{x}_{n+1-k}^{(k)}(\tau_{k+1+}) = x_{n+1-k}^{(k-1)}(\tau_{k-1-}) + \frac{k-1}{k}\dot{x}_{n-k}^{(k-1)}(\tau_{k-1-}).$$

Время ударов τ_k, $k = 1,2,\ldots,n$ определяется из условия, что внутренняя сила $N_{n+1-k}^{3(k)}$ становится равной силе предварительного натяга N_0, или

$$x_{n+1-k}^{(k)}(\tau_k) = \beta. \tag{22}$$

Если $k = n$, то для определения ударного импульса всей системы нет необходимости решать уравнение (22), а достаточно воспользоваться энергетическим соотношением [I]

$$\dot{x}_1^{(n)2}(\tau_{n-}) = \dot{x}_1^{(n)2}(\tau_{n-1+}) - \beta^2 + \left[\dot{x}_1^{(n-1)}(\tau_{n-1+}) + \frac{n-1}{n}\dot{x}_2^{(n-1)}(\tau_{n-1-})\right]^2 \tag{23}$$

Величина ударного импульса определяется как

$$|S(\tau_{n-1})| = N_0\sqrt{\frac{M}{C}}\, f_n(\beta), \quad f(\beta) = \frac{1}{\beta}\left|\dot{x}_1^{(n)}(\tau_{n-1})\right| \tag{24}$$

Таким образом, по уравнениям (16...23) можно произвести расчет системы с любым n и определить величину ударного импульса (24). Приближенное решение поставленной задачи приведено в [I].

Обсудим полученные результаты. Появление зоны посадки означает наложение связей на движение частиц системы. Для образования этих связей необходимо затратить некоторую энергию. Если предложить идеальный процесс, когда появление жесткой области происходит без потерь энергии, то возможно

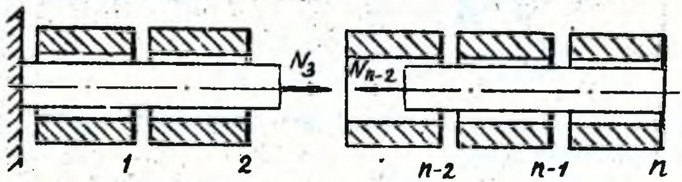


рис. 5

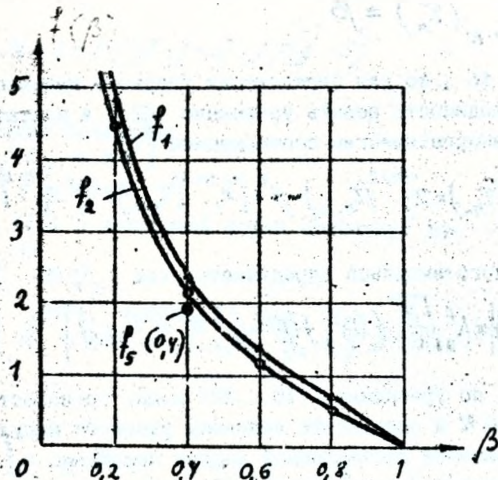


рис. 6

происходит без потерь энергии, то возможно записать уравнение баланса энергии в следующем виде

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{N_o^2}{2C} = \frac{P^2}{2C} \qquad (25)$$

где: V - скорость всей системы в момент удара

Из (25) находим

$$V = \frac{P}{\sqrt{CM}} \sqrt{1-\beta^2} \qquad (26)$$

Или, переходя к ранее принятым обозначениям

$$\dot{x}_1(\tau_{n-}) = \sqrt{1-\beta^2}$$

Тогда выражение для импульса имеет вид

$$\left|S(\tau_{n-})\right| = N_o \sqrt{\frac{M}{C}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \qquad (27)$$

Выражение (27) соответствует случаю $n-1$ - когда нет внутренних соударений. Поэтому перепишем (27) в виде

$$\left|S(\tau_{n-})\right| = N_o \sqrt{\frac{M}{C}} f_1(\beta). \qquad (28)$$

На рис. 6 приведены зависимости $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ и показана точка $f_5(0,4)$, полученная приближенно [I].

Рассмотренный выше случай абсолютно неупругого взаимодействия между элементами системы соответствует наиболее энергоемкому способу образования связей. Любое уточнение модели - введение дополнительных жесткостей, учет контактной податливости между витками и т.д.,- приведет к расчету более близкому к идеальному. В то же время рис. 6 показывает, что отличия будут не весьма существенными. Поэтому для расчета ударного импульса пружины с предварительным натягом можно пользоваться зависимостью (27). Для расчета движения отдельных точек пружины или в случае необходимости учесть силы, распределенные по длине пружины, нужно использовать многоэлементную модель.

Литература

I. Соловей П.И. Динамика пружины, навитой с предварительным натягом/ Брестский инж.-стр. ин-т. -Брест, 1981. -30с. Деп. в БелНИИНТИ №237.

УЧЕТ И ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ НА ВЕЛИЧИНУ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРУЖИНЫ РАСТЯЖЕНИЯ, НАВИТОЙ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

П.И.Соловей

Рассмотрим пружину, к подвижному правому концу которой присоединен груз массой M_0, а левый ее конец закреплен на неподвижной опоре. Жесткость пружины характеризуется некоторым коэффициентом C, значение которого можно определить по формуле Рело [I], как для обычной винтовой пружины

$$C=\frac{Gd^4}{8D^3n}=\frac{Gd^5}{8D^2L_0}, \tag{I}$$

где G - модуль сдвига; d - диаметр проволоки; D - средний диаметр; n - число витков; L_0 - длина пружины в свободном состоянии.

Для исследования введем в рассмотрение вспомогательную (базовую) пружину, все параметры которой соответствуют параметрам реальной пружины, но отсутствует предварительный натяг. Если длина базовой пружины в естественном состоянии равна $\ell_0 < L_0$, то из условия линейности ее характеристики усилие предварительного натяга

$$N_0 = C_1\frac{L_0-\ell_0}{\ell_0}; \quad C_1 = C\ell_0 \tag{2}$$

Тогда деформацию пружины от действия предварительного натяга N_0 и приложения растягивающей силы $P>N_0$ удобнее представить с помощью безразмерных параметров

$$\varkappa_0=\frac{L_0-\ell_0}{\ell_0}; \quad \varkappa=\frac{L-\ell_0}{\ell_0}; \quad \beta=\frac{\varkappa_0}{\varkappa} \tag{3}$$

где L - длина пружины после статического приложения силы $P_* > N_0$.

Представим отношение масс в виде параметра $\mu = M_0/M$. Рассмотрим движение реальной пружины при следующей постановке задачи: в начальный момент пружина растянута силой P и о ее правый конец ударяется со скоростью V_0 груз массой M_0. В дальнейшем система предоставлена самой себе, и груз неразрывно связан с пружиной [2].

В течение некоторого промежутка времени t_1 до образования зоны посадки движение реальной пружины не отличается от движения базовой пружины. Для описания этого этапа заменим базовую пружину эквивалентным стержнем той же длины, плотности и жесткости и введем лагранжеву систему координат с началом на правом конце пружины и осью z, направленной влево (рис. I). Движение пружины описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0, \qquad (4)$$

$$0 \le z \le \ell_0, \quad a = \sqrt{c_1 \ell_0 / M},$$

при этом деформация $W = W(z,t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$W(z,0) = W_0(z) = \varkappa (z - \ell_0);$$

$$W(\ell,t) = 0; \quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{\substack{z=0\\ t=0}} = V_0; \qquad (5)$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{a^2}{\mu \ell_0}\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=0} = 0.$$

Здесь a - является скоростью распространения упругих возмущений.

Используя хорошо известные методы [3, 4], находим решение волнового уравнения (4), при дополнительных условиях (5) в виде

$$W(z,t) = W_0(z) \quad при \ t < z/a;$$

$$W(z,t) = \varkappa(\ell_0 - at) - \mu\ell_0\left(\varkappa - \frac{V_0}{a}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{at-z}{\mu\ell_0}\right)\right] \qquad (6)$$

$$при \ \frac{z}{a} \le t \le \frac{\ell_0}{a}.$$

Зона посадки образуется в тот момент, когда градиент деформации в некоторой точке пружины достигает значения $\varkappa_0$. В соответствии с (6), градиент деформации

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\varkappa - \frac{V_0}{a}\right) \exp\left(-\frac{at - z}{\mu \ell_0}\right) \tag{7}$$

минимален на правом конце пружины ($z = 0$), поэтому момент начала образования зоны посадки

$$t_1 = \frac{\mu \ell_0}{a} \ln \frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}, \quad \varkappa_1 = \varkappa - \frac{V_0}{a}. \tag{8}$$

Если $\varkappa_1 \leq \varkappa_0$ зона посадки образуется в начальный момент ($t_1 = 0$).

В приведенных рассуждениях нигде не накладывались ограничения на знак V_0, однако следует иметь в виду, что при $V_0 < 0$ градиент деформаций на правом конце минимален лишь для части пружины, пришедшей в движение вследствие распространения упругих возмущений. Поскольку зона посадки может образоваться только в этой части пружины, данное обстоятельство не ограничивает справедливости полученного результата (8) при $V_0 < 0$.

Проанализируем движение реальной пружины при $t > t_1$. Начиная с момента времени t_1 фронт посадки движется влево. Уравнение движения фронта посадки можно получить на основании теоремы об изменении импульса. Запишем соотношение между скоростью $\dot{z}_\varphi$ перемещения фронта посадки и скоростью V движения сомкнутой части пружины и груза M_0. Для этого воспользуемся условием совместимости Адамара, записанным для деформаций W [5],

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right] + \dot{z}_\varphi \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0. \tag{9}$$

Квадратные скобки здесь имеют следующий смысл

$$\begin{aligned} [f] &= f_+ - f_- ; \\ f_+ &= f(z_\varphi + 0); \\ f_- &= f(z_\varphi - 0). \end{aligned} \tag{10}$$

В рассматриваемом случае

$$\left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=z_\varphi-0}=\varkappa_0\,;\quad \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{z=z_\varphi-0}=V\,, \tag{11}$$

так что искомое соотношение принимает вид

$$V=\left(\left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=z_\varphi}-\varkappa_0\right)\dot{z}_\varphi+\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{z=z_\varphi} \tag{12}$$

Здесь производные следует вычислять, используя решение (6) волнового уравнения.

Предположим (а в дальнейшем докажем), что с момента образования зоны посадки $\dot{z}_\varphi \geqslant a$. В этом случае фронт посадки движется быстрее распространения упругих возмущений, поэтому образование фронта посадки не влияет на часть пружины, которая находится левее фронта посадки, и для деформаций W при $z>z_\varphi$ справедливо решение (6) волнового уравнения.

Сила, действующая на часть пружины, расположенную правее некоторой точки $z=z_\varphi$

$$N(t')=N \quad \text{при} \quad t'<\frac{z_\varphi}{a}\,;$$

$$N(t')=C_1\left.\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{z=z_\varphi}=C_1\varkappa_1\exp\left(-\frac{at'-z_\varphi}{\mu l_0}\right) \tag{13}$$

$$\text{при} \quad \frac{z_\varphi}{a}\leq t'\leq t$$

Применяя теорему об изменении импульса к части пружины, находящейся правее точки $z=z_\varphi$ на протяжении промежутка времени от начала движения и до момента t, когда фронт посадки приходит в точку $z=z_\varphi$, запишем

$$\left(M_0+\frac{z_\varphi}{l_0}M\right)\left\{\left[\varkappa_1\exp\left(-\frac{at-z_\varphi}{\mu l_0}\right)-\varkappa_0\right]\frac{dz_\varphi}{dt}+\varkappa a-\right.$$

$$\left.-\varkappa_1 a\exp\left(-\frac{at-z_\varphi}{\mu l_0}\right)\right\}-M_0V_0=N\frac{z_\varphi}{a}+$$

$$+\int_{z_\varphi/a}^{t}C_1\varkappa_1\exp\left(-\frac{at'-z_\varphi}{\mu l_0}\right)dt'\,,\quad z_\varphi=0 \text{ при } t=0. \tag{14}$$

Для V использовано соотношение (I2) совместно с выражениями (6) и (7).

Введем далее характерные единицы длины $\mu \ell_0$, времени $\mu \ell_0 / a$ и скорости a и перейдем к безразмерным переменным

$$x = \frac{z_{\varphi}}{\mu \ell_0}\ ; \quad s = \frac{a(t-t_1)}{\mu \ell_0}\ ; \quad u = \frac{V}{a} \tag{I5}$$

Поскольку z_{φ} в уравнении (I4) определено в момент времени t, интеграл в правой части по t' можно вычислить в явном виде. Кроме того, с учетом соотношения (8) получаем

$$\exp\left(-\frac{at - z_{\varphi}}{\mu \ell_0}\right) = \frac{\varkappa_0}{\varkappa_1}\, e^{(x-s)}.$$

Используя равенство $N = C\varkappa$, преобразуем выражение (I4)

$$(1-x)\left(e^{x-s}-1\right)\frac{dx}{ds} - x e^{x-s} = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \tag{I6}$$

Отметим, что величина $(x - s)$ в безразмерной форме определяет разность расстояний, проходимых фронтами посадки и упругих возмущений за время, прошедшее с момента t_1. Так как к моменту времени t_1 фронт упругих возмущений прошел расстояние

$$z_1 = a t_1 = \mu \ell_0 \ln\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\right), \tag{I7}$$

встреча фронтов упругих возмущений и зоны посадки произойдет в тот момент, когда разность расстояний $x - s$ достигнет значения $z_1 / \mu \ell_0$. Для определения момента s_1 встречи фронтов перейдем к переменной

$$y = x - s, \tag{I8}$$

представим выражение (I6) в виде

$$\frac{ds}{dy} = \frac{e^{y}-1}{1 - e^{y}/(1+s+y)}\ ; \qquad s = 0 \ \text{при}\ y = 0 \tag{I9}$$

и перейдем к интегральному уравнению

$$s_1 = \int_0^{\ln \varkappa_1/\varkappa_0} \frac{(e^{y}-1)\,dy}{1 - \dfrac{e^{y}}{1+s(y)+y}} \tag{20}$$

Решение (20) можно найти численными методами. Предварительно обсудим некоторые свойства уравнения (I9). Раскрывая по правилу Лопиталя неопределенность в правой части уравнения (I9) при $S \to 0$ и $y \to 0$, можно показать, что

$$\left.\frac{dS}{dy}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 1 . \tag{21}$$

С учетом соотношений (I5) и (I8) производная dy/dS определяет скорость сближения фронтов упругих возмущений и зоны посадки в единицах a. В момент образования зоны посадки эта скорость сближения согласно (2I) равна a, а затем несколько убывает со временем, оставаясь положительной. Для изменения знака dy/dS правая часть уравнения (I9), а так же dS/dy должна в некоторый момент времени обратиться в бесконечность, что недопустимо вследствие структуры уравнения (I9). Поэтому скорость фронта зоны посадки всегда превышает скорость распространения упругих возмущений, что и предполагалось ранее.

Другой важной особенностью уравнения (I9) является то, что оно не содержит каких-либо коэффициентов, характеризующих систему или ее начальное состояние. Поэтому процесс сближения фронтов упругих возмущений и зоны посадки для всех навитых с предварительным натягом пружин с линейными характеристиками и присоединенной массой происходит подобным образом – в момент зарождения зоны посадки скорость ее фронта в 2 раза превышает скорость a распространения упругих возмущений и с течением времени монотонно убывает по некоторому универсальному закону, определяемому уравнениями (I6) и (I9), оставаясь всегда больше a. Время встречи фронтав зависит, согласно (20), от отношения параметров $\varkappa_1/\varkappa_0$.

В таблице I приведены результаты численного решения уравнения (I9), а также значения производной dy/dS, определяющей разность скоростей фронтов зоны посадки и упругих возмущений в единицах a. При увеличении y эта разность достаточно быстро убывает, так что при больших значениях отношения $\varkappa_1/\varkappa_0$ потребуется достаточно большой промежуток времени, чтобы фронт зоны посадки смог догнать фронт упругих возмущений. Этот промежуток времени S_1 можно определить по таблице при $y_1 = \ln \varkappa_1/\varkappa_0$. Учитывая промежуток времени (8), прошедший до зарождения зоны посадки, определим (в единицах $\mu \ell_0 / a$) момент встречи фронтов.

Таблица I

Результаты численного решения уравнения (I9)

y	0,0	0,02	0,04	0,06	0.08	0,I0	0,I2	0,I4	0,I6	0,I8	0,20	0,22
s	0,0	0,02I	0,042	0,064	0,087	0,II0	0,I35	0,I6I	0,I87	0,2I5	0,243	0,272
dy/ds	I,0	0,97	0,93	0,89	0,86	0,83	0,80	0,77	0,74	0,72	0,69	0,67
y	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
s	0,303	0,334	0,366	0,400	0,434	0,470	0,507	0,545	0,584	0,642	0,666	0,708
dy/ds	0,65	0,63	0,6I	0,59	0,57	0,55	0,54	0,52	0,50	0,49	0,47	0,46
y	0,48	0,50	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,68	0,70
s	0,752	0,798	0,844	0,892	0,94I	0,992	I,04	I,I0	I,I5	I,2I	I,27	I,33
dy/ds	0,45	0,44	0,42	0,4I	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,33

Таблица 1(продолжение)

y	0,72	0,74	0,76	0,78	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	0,96
s	1,39	1,45	1,52	1,56	1,65	1,72	1,79	1,87	1,94	2,02	2,10	2,18	2,26
dy/ds	0,32	0,31	0,30	0,30	0,29	0,28	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25	0,24	0,24

y	0,98	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20
s	2,35	2,44	2,53	2,62	2,71	2,81	2,91	3,01	3,11	3,22	3,33	3,44
dy/ds	0,23	0,23	0,22	0,21	0,20	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19	0,18	0,18

y	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44
s	3,55	3,67	3,79	3,91	4,04	4,17	4,30	4,43	4,57	4,71	4,85	5,00
dy/ds	0,17	0,17	0,165	0,161	0,160	0,154	0,151	0,147	0,144	0,140	0,137	0,134

y	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,80	1,90	2,00
s	5,15	5,31	5,46	5,62	5,79	5,96	6,14	6,31	7,28	8,30	9,47	10,80
dy/ds	0,131	0,128	0,126	0,123	0,120	0,117	0,115	0,112	0,101	0,090	0,079	0,073

$$S_2 = S_1 \ln\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\right) + \ln\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\right) \tag{22}$$

Место встречи фронтов ввиду выбранной единицы скорости характеризуется координатой, в безразмерных переменных численно равной $S_2 (x_2 = S_2)$, что после перехода к обычным переменным дает

$$z_2 = \mu \ell_0 S_2 = \mu \ell_0 \left[S_1 \ln\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\right) + \ln\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0}\right)\right] \tag{23}$$

Эти рассуждения правомерны, если $z_2 \leq \ell_0$. В противном случае в решении (6) волнового уравнения при $t > \ell_0/a$ необходимо учитывать волну, отраженную от левой опоры. Полагаем, что $z_2 \leq \ell_0$ $(S_2 \leq \mu^{-1})$.

Дальнейшее движение устройства рассматриваем как в работе [6]. С момента времени, когда фронт посадки настиг фронт упругих возмущений, пружину следует считать состоящей из двух участков - неподвижного с градиентом деформации $\varkappa$ левее фронта посадки и движущегося со скоростью V сомкнутого правого участка.

Необходимо иметь в виду, что при достаточно большой начальной скорости присоединенной массы

$$V_0 \geq a(\varkappa - \varkappa_0), \tag{24}$$

как следует из (6...8), зона посадки образуется в момент удара груза M_0 о пружину и уже с начального момента пружину следует рассматривать состоящей только из двух участков, т.е. в этом случае $t_2 = 0$; $S_2 = 0$. Применим теорему об изменении импульса в интегральной форме для части пружины, образующей к моменту t зону посадки. Учитывая, что соотношение (12) в рассматриваемом случае принимает вид

$$V = (\varkappa - \varkappa_0)\, \dot{z}_\varphi, \tag{25}$$

запишем

$$\left(M_0+\frac{z_{\varphi}}{l_0}M\right)(\varkappa-\varkappa_0)\frac{dz_{\varphi}}{dt}-M_0V_0=C_1\varkappa t;$$

$$\frac{\mu l_0}{a}\leq t\leq\frac{l_0}{a} \qquad (26)$$

После перехода к безразмерным переменным уравнение движения фронта посадки витков принимает вид

$$(1-\beta)(1+x)\frac{dx}{ds}=\frac{u_0}{\varkappa}+S;\quad S_2\leq S\leq\frac{1}{\mu} \qquad (27)$$

Проинтегрировав уравнение (27) с учетом того, что верхний предел переменный, а на нижнем пределе $x_0=x_2=S_2$, находим закон движения фронта посадки

$$(1-\beta)\left[(1+x)^2-(1+S_2)^2\right]=\left(\frac{u_0}{\varkappa}+S\right)^2-\left(\frac{u_0}{\varkappa}+S_2\right)^2 \qquad (28)$$

Приняв здесь $x=\mu^{-1}$ (длина пружины в безразмерных переменных), получим время, прошедшее с начала движения до удара зоны посадки витков о левую опору

$$S^*=\frac{1}{\mu}\left\{(1-\beta)\left[(1+\mu)^2-\mu^2(1+S_2)^2\right]+\mu^2\left(S_2+\frac{u_0}{\varkappa}\right)^2\right\}^{1/2}-\frac{u_0}{\varkappa}, \qquad (29)$$

$$t^*=\frac{\mu l_0}{a}S^*.$$

При известном значении t^* также по теореме об изменении импульса определяем скорость груза в момент удара о левую опору:

$$V^*=\frac{Nt^*}{M(1+\mu)}=a\frac{\mu\varkappa}{1+\mu}S^*, \qquad (30)$$

что в свою очередь позволяет найти импульс системы в момент удара и потери механической энергии на образование связей между витками.

При $V_0=0, \mu=0$ и $S_2=0$ приходим к результату, полученному в [3],

$$t^*=\ell_0(1-\beta)^{1/2}/a . \qquad (31)$$

Время движения устройства до удара о левую опору, определяемое соотношением (29), зависит от трех параметров (кроме масштаба времени) – μ, $\varkappa/\varkappa_0$, $V_0/\varkappa$. Рассмотрим в качестве примера устройство с $\mu=0{,}2$ при $V_0=0$ и $\varkappa/\varkappa_0=3$. В соответствии с данными таблицы $S_1=2{,}91$. Тогда $S_2=2{,}91+1{,}1=4{,}01<\mu^{-1}$, и, следовательно, фронт зоны посадки настигнет фронт упругих возмущений примерно на расстоянии $0{,}2\,\ell_0$ от левой опоры. Время движения до удара о левую опору согласно (29) $t^*_\mu=0{,}97\,\ell_0/a$, тогда как при $\mu=0$ согласно (31) получим $t^*=0{,}82\,\ell_0/a$. Поскольку импульс, приобретенный системой к моменту удара о левую опору, пропорционален времени t^*, приведенный пример свидетельствует о том, что присоединенная масса позволяет существенно увеличить ударный импульс при незначительном увеличении размеров системы. Аналогичные вычисления для $\varkappa/\varkappa_0=2$ и $\mu=0{,}2$ приводят к результатам $S_2=0$, $t_\mu=0{,}84\ell_0/a$ и $t_0=0{,}71\ell_0/a$, а для $\varkappa/\varkappa_0=2$ и $\mu=0{,}5$ находим $S_2=2{,}0$, $t_\mu=\ell_0/a$ и $t_0=0{,}71\ell_0/a$.

При принятых ограничениях (свтреча фронтов должна произойти не позже, чем упругая волна достигнет левой опоры) максимальный ударный импульс, равный Ma, реализуется в том случае, если встреча фронтов происходит на левой опоре. Выбрав из каких-либо соображений, например конструктивных, отношение $\varkappa/\varkappa_0$, с помощью таблицы определяем значение S_2. Для обеспечения максимального ударного импульса теперь необходимо выбрать приведенную массу, соответствующую параметру $\mu=S_2^{-1}$. Этот случай реализуется в последнем из рассмотренных примеров.

Таким образом, приведенные результаты позволяют решать вопросы конструирования ударных устройств с учетом создания требуемого ударного импульса, их быстродействия, габаритов и т.д.

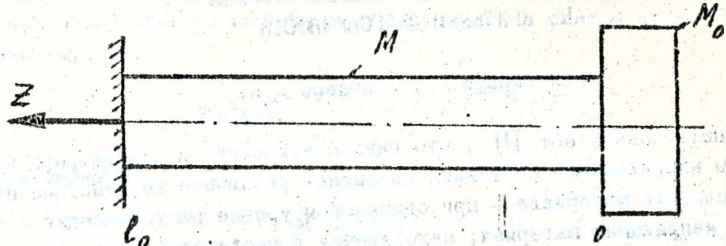


рис. 1

Литература

1. Пономарев С.Д. Расчет и конструкция витых пружин. -Л. :ОНТИ, 1938, -351 с.
2. Вихренко В.С., Соловей П.И. Динамика навитой с предварительным натягом пружины с присоединенной массой// Расчеты на прочность. -М.: Машиностроение, 1983 -Вып. 24 -с.112-120.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. -М.: Высшая школа, 1980, -408 с.
4. Бидерман В.Л. О распространении волн продольной деформации при нелинейной и "жесткой" зависимости между напряжениями и деформациями// Расчеты на прочность. -М.: Машгиз, 1960-Вып.6 -С.53-59.
5. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. -183 с.
6. Вихренко В.С., Гуськов А.М., Соловей П.И. Удар пружиной, навитой с предварительным натягом// Известия вузов. Сер. Машиностроение. -1981. - №8, -С.28-32.

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПО КРИТЕРИЮ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Холодарь Б.Г., Холодарь Д.Б.

Опыты показывают [I], что гидростатическая и девиаторная компоненты напряженного состояния оказывают различное воздействие на долговечность материала - при одинаковом уровне растягивающих и сжимающих напряжений материал, находящийся в растянутой зоне, будет менее долговечен, чем в сжатой зоне.

Для одноосного напряженного состояния долговечность материала (время до разрушения $t_{разр}$) можно найти по формуле

$$t_{разр} = \frac{1}{\nu} Ei(-x),$$

где $Ei(x)$ - интегральная экспоненциальная функция, ν - константа для данного физического состояния материала, $x = \alpha\sigma$, σ - напряжение, $\alpha > 0$ - структурный коэффициент, или по приближенной формуле

$$t_{разр} = \frac{1}{\nu} x e^{-x},$$

которой можно пользоваться с достаточной точностью при $x > 2$.

Поскольку при одноосном напряженном состоянии интенсивность напряжений и среднее напряжение пропорциональны действующему напряжению, то можно записать:

$$x = (\alpha_г + \alpha_д)\sigma = \alpha_р \sigma \qquad \text{(растяжение)}$$

$$x = (-\alpha_г + \alpha_д)\sigma = \alpha_с \sigma \qquad \text{(сжатие)}$$

где под σ понимается теперь абсолютная величина напряжения, а $\alpha_г$ и $\alpha_д$ - гидростатическая и девиаторная составляющие структурного коэффициента.

Обозначим

$$\varkappa = \frac{\alpha_с}{\alpha_р} \qquad (I)$$

причем, очевидно, $\varkappa \leqslant 1$.

Для каждого материала значения коэффициентов $\alpha_р$ и $\alpha_с$ могут быть определены экспериментально.

В качестве примера, когда при одноосном напряженном состоянии имеются зоны растягивающих и сжимающих напряжений, рассмотрим нагружение прямого стержня изгибающим моментом M и продольной силой N.

С точки зрения долговечности сечения такого стержня оптимальным будет такое соотношение растягивающих и сжимающих напряжений, при котором долговечности материала в растянутой и сжатой зонах будут одинаковы, т.е.

$$\alpha_p \sigma_p e^{-\alpha_p \sigma_p} = \alpha_c \sigma_c e^{-\alpha_c \sigma_c} ,$$

откуда имеем

$$\varkappa \frac{\sigma_c}{\sigma_p} = 1 . \qquad (2)$$

Отметим, что долговечность сечения здесь рассматривается без учета времени распространения трещины по поперечному сечению, а только по времени разрушения наружного слоя материала. Такой подход является оправданным как с точки зрения поставленной в настоящей работе задачи, так и с точки зрения вклада обоих этих процессов в суммарную долговечность сечения.

Очевидно, что нужно рассмотреть только случай, когда в сечении имеются области напряжений разных знаков, так как в противном случае (действие большой продольной силы) вопрос об оптимизации данного сечения решается тривиально – для повышения долговечности необходимо уменьшить наибольшие напряжения.

Оптимизацию сечения будем понимать как подбор такой формы сечения, при которой произойдет повышение долговечности по отношению к исходной, в частности, без изменения высоты и площади сечения.

Конкретно рассмотрим два сечения, имеющих широкое распространение – прямоугольное и идеальный двутавр (две одинаковых полки, разнесенные на некоторое расстояние друг от друга), и покажем, что переход соответственно от прямоугольной формы к трапецеидальной или от одинаковых полок к неравным может повысить долговечность сечения.

Назовем для удобства коэффициентом формы сечения отношение верхнего и нижнего оснований $\varphi = \frac{a}{b}$ (рис.I). Так как $\varkappa < 1$, то ясно, что в зоне сжатия материала сечение должно быть более узким, чем в зоне растяжения, т.е. $\varphi < 1$.

Изгибная компонента напряжений в наружных слоях растянутой и сжатой зон составляет

$$\sigma_{\text{нр}} = \frac{M}{J} h_p , \quad \sigma_{\text{нс}} = \frac{M}{J} h_c ,$$

напряжения от продольной силы $\sigma_N = \frac{N}{F}$, где J, F – момент инерции и площадь сечения, h_p, h_c – расстояния от нейтральной линии сечения до крайних волокон растянутой и сжатой зон при изгибе стержня.

Как изгибные, так и напряжения от продольной силы составляют некоторую часть от предела текучести материала:

$$\sigma_{ис} = \beta \sigma_T \ , \quad \sigma_{ир} = \beta \sigma_T \frac{h_p}{h_c} \ , \quad \sigma_N = \gamma \sigma_T \ ,$$

причем нетрудно видеть, что при положительных β и γ должно также выполняться условие

$$\beta + \gamma \leq 1 . \qquad (3)$$

Тогда из (2) получим

$$\frac{h_p}{h_c} = \varkappa + \frac{\gamma}{\beta}(1+\varkappa) \qquad (4)$$

Используя коэффициент формы φ из (4) можно получить:

$$\frac{NH}{M} = \frac{6}{1+\varkappa}\left(\frac{1+2\varphi}{2+\varphi} - \varkappa\right)\frac{(1+\varphi)(2+\varphi)}{1+4\varphi+\varphi^2} \quad \text{(трапециевидное сечение)} \qquad (5)$$

$$\frac{NH}{M} = \frac{6}{1+\varkappa}\left(\frac{2\varphi-(1+\varphi)\bar{h}}{2-(1-\varphi)\bar{h}} - \varkappa\right)\times$$

$$\times\frac{(1+\varphi)(2\varphi-(1-\varphi)\bar{h})}{(1+\varphi)^2\bar{h}^2+12\varphi(1-2\bar{h}(1+\varphi)+\bar{h}^2)} \quad \text{(идеальный двутавр)} \qquad (6)$$

где $\bar{h} = \frac{h}{H}$.

Графики этих зависимостей приведены на рис.2.* Там же построена зависимость

$$\frac{2F}{bH} = 1+\varphi \quad \text{(трапециевидное сечение)} \qquad (7)$$

$$\frac{F}{bH} = 1+\varphi \quad \text{(идеальный двутавр)} \qquad (8)$$

---

* При значениях $\bar{h}$, отличных от $\bar{h} = 0.2$, кривые имеют форму, аналогичную показанной на рисунке.

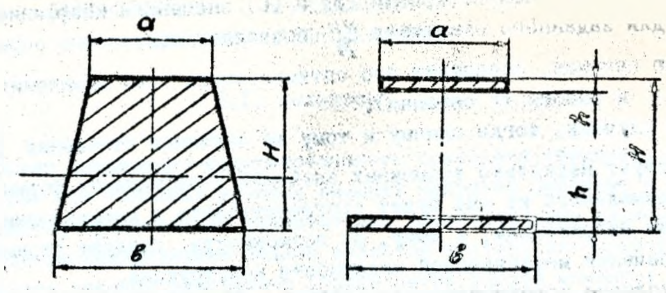


Рис. I Геометрия сечений

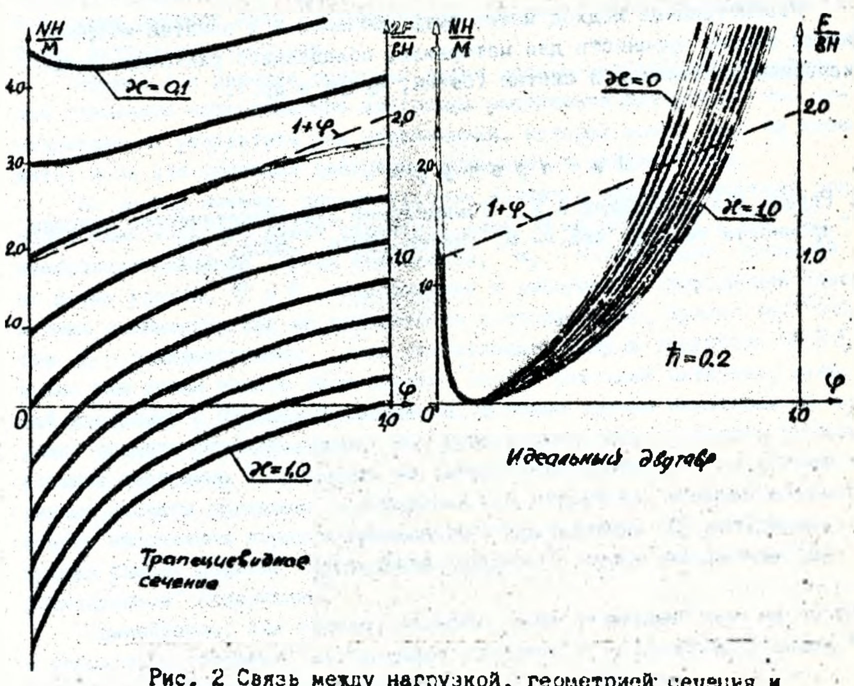


Рис. 2 Связь между нагрузкой, геометрией сечения и структурным параметром материала.

которая при выбранном по кривым (5) и (6) значениям коэффициента формы φ для заданного отношения $\frac{NH}{M}$ позволяет однозначно определить геометрию сечения, обеспечив его оптимальность (без изменения площади F и высоты H сечения).

Для случаев, когда одному и тому же значению отношения $\frac{NH}{M}$ соответствует несколько возможных значений коэффициента формы φ, выбор минимального из них будет соответствовать и минимальным растягивающим напряжениям, к чему, по возможности, следует стремиться для обеспечения механической надежности конструкции.

Из условия положительности коэффициентов $\varkappa, \beta, \gamma$ и условия (4) вытекает общее ограничение, накладываемое на сечения любой формы (не только для двух конкретно рассмотренных) - сечения могут быть оптимизированы в указанном выше смысле только в случае, если в их первоначальных очертаниях выполнялось $\frac{h_p}{h_c} > \varkappa$.

Рассмотренный подход может быть применен и к понятию коэффициента запаса прочности для материала, обладающего различным сопротивлением растяжению и сжатию (бетон, чугун и др.).

Литература

I. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. - М. :Наука, 1974, -560с.

ИЗГИБ СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИАГРАММОЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Б.Г. Холодарь

Расчет напряженно-деформированного состояния стержней, материал которых при заданных уровнях внешней нагрузки работает в нелинейной области, представляет значительные вычислительные сложности.

Если рассматриваемая задача является статически-определимой, то кривизна стержня однозначно определяется эпюрой моментов от внешней нагрузки, в случае статической неопределимости задачи наиболее удобной процедурой решения её для неразрезных балок остается уравнение трех моментов, в которое входит компонента деформации от внешней нагрузки как составляющая наряду с компонентами деформаций от опорных моментов. С этой точки зрения построение удобной вычислительной схемы решения даже статически опр делимой задачи является достаточно актуальным вопросом.

Обычно при решении подобных задач используют кусочно-линейную или степенную аппроксимацию диаграммы растяжения материала, что накладывает на результаты ряд ограничений, которых можно было бы избежать, если для описания диаграммы применить подходящий ряд.

По нашему мнению, весьма удобным является аппроксимирующий ряд, общий член которого имеет структуру вида $\sigma_j = \sigma_{bj}(1-e^{-\alpha_j \varepsilon})$, где σ_{bj} - наибольшее значение j-ой компоненты, α_j - коэффициент, влияющий на форму кривой, σ и ε - напряжение и деформация (деформация здесь и ниже понимается как её девиаторная составляющая). Приняв $\alpha_j = E_j/\sigma_{bj}$ где E_j - соответственно j-ая составляющая модуля упругости $(E=\sum_j E_j)$, можно уже одним членом ряда описать вполне реальный материал, имеющий диаграмму с площадкой текучести. В общем случае некоторые из α_j можно принять отрицательными, что дает возможность описывать весьма сложные диаграммы и проводить не только качественные, но и количественные расчеты поведения конструкции при нагрузках, которым соответствуют напряжения порядка временного сопротивления σ_b материала, придав самому понятию "предельная нагрузка" вполне конкретное "деформационное" содержание.

Пренебрежем, как обычно, влиянием перерезывающей силы на прогиб и рассмотрим стержень, нагруженный моментом M и продольной силой N, считая их известными функциями продольной координаты .

Для определения положения нейтральной линии сечения при любом X имеем соотношения:

$$\int\limits_{(F)}\sigma(y)\,y\,dF=M$$
$$\int\limits_{(F)}\sigma(y)\,dF=N \qquad (1)$$

где y - координата точек сечения по перпендикуляру к нейтральной линии, F - площадь сечения.

Подставив в (I) выражение для $\sigma(\varepsilon)$ в виде:

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases}\sum\limits_j \sigma_{Bj}(1-e^{-\alpha_j\varepsilon}), & \varepsilon\geq 0\\ -\sum\limits_j \sigma_{Bj}(1-e^{-\alpha_j|\varepsilon|}), & \varepsilon<0\end{cases} \qquad (2)$$

и учитывая, что гипотеза плоских сечений дает зависимость между кривизной нейтральной линии $\varkappa$ и деформацией ε любой точки сечения в виде $\varepsilon=\varkappa y$ [1], имеем возможность численно или аналитически найти зависимости $M=M(\varkappa)$ и $N=N(\varkappa)$.

Например, в наиболее простом случае прямоугольного сечения (b - ширина, h - высота) получим

$$m=\frac{4M}{\sigma_B b h^2}=1+4\delta^2-8\sum_j\frac{\sigma_{Bj}/\sigma_B}{\alpha_j^2\varkappa^2h^2}\left[1-\left(1+\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}\right)\times e^{-\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}}ch(\alpha_j|\varkappa|h\delta)+\alpha_j|\varkappa|h\delta e^{-\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}}sh(\alpha_j|\varkappa|h\delta)\right] \qquad (3)$$

$$n=\frac{N}{\sigma_B b h}=1-2\sum_j\frac{\sigma_{Bj}/\sigma_B}{\alpha_j|\varkappa|h}\left[1-e^{-\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}}\cdot ch(\alpha_j|\varkappa|h\delta)\right],$$

где введен дополнительно безразмерный параметр $\delta=\frac{h_p}{h}-\frac{1}{2}$, показывающий отклонение положения нейтральной линии от середины сечения (h_p - высота растянутой зоны сечения).

Таким образом, $m=m(\varkappa,\delta)$, $n=n(\varkappa,\delta)$, откуда численно можно получить и обратные зависимости $\varkappa=\varkappa(m,n)$, $\delta=\delta(m,n)$.

В большинстве задач влияние продольной силы N на прогиб несущественно, и в этой ситуации при $\delta=0$ имеем

$$m=1-8\sum_j\frac{\sigma_{Bj}/\sigma_B}{\alpha_j^2\varkappa^2h^2}\left[1-\left(1+\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}\right)e^{-\frac{\alpha_j|\varkappa|h}{2}}\right] \qquad (4)$$

Качественно зависимости величины изгибающего момента в сечении от деформации наружного слоя $\varepsilon_н$ изображены на рис. 1 для степенной (I), идеально-пластической (2) и произвольной (3) диаграмм растяжения материала.

Построив из (4) при известном $m(X)$ зависимость $\varkappa(X)$, можно найти и деформационные характеристики стержня (прогибы и углы поворотов сечений).

Зависимость $\varkappa(X)$ в дальнейшем удобно представить в виде ряда по полиномам Чебышева $\varkappa(x)=\sum\limits_k a_k T_k(x)$, который легко затем интегрируется, используя известные соотношения [2]

$$\int T_k dx = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{k+1}}{k+1} - \frac{T_{k-1}}{k-1}\right] + Const \quad , k>1 \qquad (5)$$

$$2 T_m T_n = T_{m+n} + T_{|m-n|} \, .$$

В качестве конкретного примера рассмотрена задача об изгибе шарнирно-опертого стержня длиной ℓ = 100 см с квадратным сечением со стороной $b=h$ = 1 см, нагруженного посредине поперечной силой Q. Диаграмма типа 3 описывалась пятью членами ряда с параметрами (МПа):

$$E_1 = 1\cdot10^5,\ E_2 = 1\cdot10^4,\ E_3 = 4\cdot10^3,\ E_4 = 3\cdot10^3,\ E_5 = -1\cdot10^2$$

$$\sigma_{в_1} = 3\cdot10^2,\ \sigma_{в_2} = 3\cdot10^2,\ \sigma_{в_3} = 3\cdot10^2,\ \sigma_{в_4} = 5\cdot10^1,\ \sigma_{в_5} = 2\cdot10^1,$$

причем $\varepsilon_в \approx 0{,}25$. Диаграмма типа I описана одночленной зависимостью с $E=\sum\limits_{j=1}^{5} E_j = 1{,}169\cdot10^5$ МПа, $\sigma_в = \sum\limits_{j=1}^{5}\sigma_{в_j} = 970$ МПа. Соответствующие расчеты для идеально пластического материала проделаны по данным [3], где имеется также решение и для степенной диаграммы.

Характер нарастания прогибов y стержня с ростом нагрузки Q для принятых в расчетах диаграмм показан на рис. 2.

Под $y_{упр}$ и $Q_{упр}$ на рис.2 понимаются значения прогиба под силой и величина силы, при которой в данном случае достигается предел текучести материала $\sigma_т$. Известно, что при упруго-пластическом подходе прогиб при появлении пластического шарнира составляет $y_{пк} = \frac{20}{9} y_{упр}$, причем $Q_{пк} = 1{,}5 Q_{упр}$, неограниченно увеличиваясь в дальнейшем ($\varepsilon \to \infty$) при сохранении нагрузки, что свидетельствует об исчерпании несущей способности стержня [3]. Как видим из рис.2, такое же значение прогиба при реальных диаграммах достигается намного раньше, причем о достижении предельной нагрузки свидетельствует допустимая величина деформации материала (в расчете принято $\varepsilon_{пред} = \varepsilon_в$ = 0,25). Соответствующее предельное значение прогиба и силы отмечено на рис.2 крестиком.

На рис.3 приведены эпюры кривизны и прогибов стержня при разных

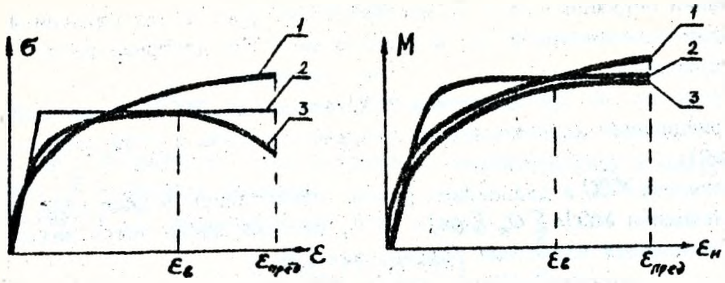


Рис. I Зависимости между напряжением и деформацией и между моментом и деформацией наружного слоя.

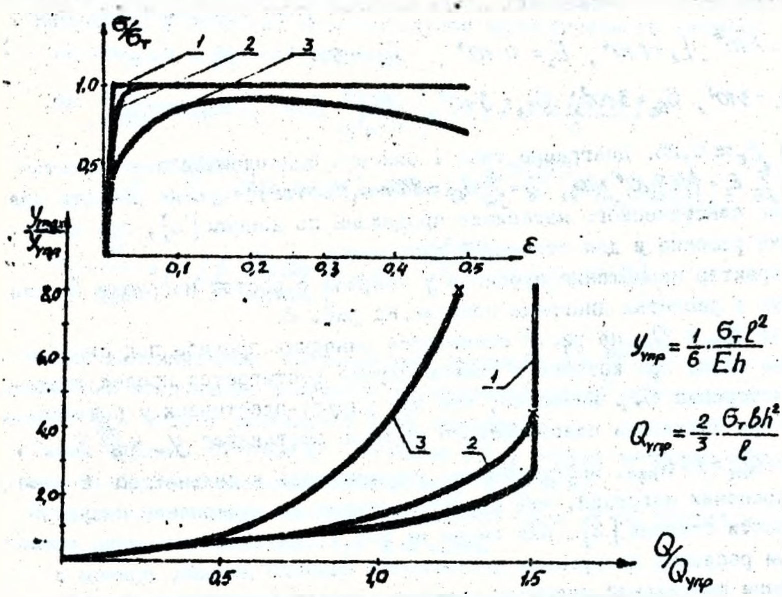


Рис.2 Расчетные кривые $\sigma(\varepsilon)$ и нагрузка-прогиб

I- идеально-пластический материал

2- аппроксимация $\sigma = \sigma_B(1-e^{-\alpha\varepsilon})$

3- зависимость $\sigma = \sum_1^4 \sigma_{Bi}(1-e^{-\alpha_i\varepsilon})$

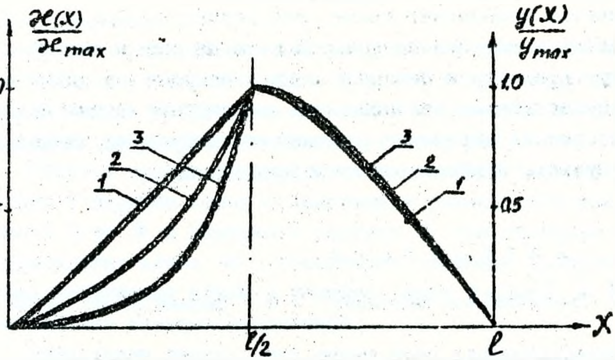


Рис.3 Эпюры кривизны и прогибов стержня при различных **уровнях** нагружения: 1 - $Q/Q_{упр} = 0.125$; 2 - $Q/Q_{упр} = 0.625$; 3 - $Q/Q_{упр} = 1.25$;

уровнях внешнего воздействия (материал общего типа). Видно, что при весьма значительном изменении формы кривой $\mathcal{K}(x)$ форма прогиба $y(x)$ практически не меняется, что может быть использовано при вариационных подходах к решению подобных задач.

Анализ расчетов показывает также, что неучет геометрической нелинейности задачи и влияния продольной силы на поперечные смещения сечений могут привести к неверной оценке несущей способности стержня в виду существенной нелинейности зависимости прогибов от максимальной деформации материала в наиболее нагруженных сечениях стержня при нагрузках, приближающихся к предельным.

Литература

1. Ржаницын А.Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1982, -400с.
2. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. -М.: Иностр.литер., 1962. -208 с.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1969, Том 2.-863с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНООБРАЗНОГО ТЕЛА С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б.Г.Холодарь

Задача о напряженно-деформированном состоянии клина относится к числу классических задач плоской теории упругости и решена как для случая нагружения его силой и моментом в вершине, так и для случая нагружения по боковым граням [I] .

Решение задачи производится в полярной системе координат с центром в вершине клина и напряжения вычисляются как функции полярного угла ϑ и полярного радиуса r при заданном значении угла полураскрытия клина α (граничного значения полярного угла). Для случая нагружения клина в вершине линии $r = Const$ и $\vartheta = Const$ являются линиями главных напряжений.

Представим теперь, что имеем тело клинообразной формы, боковая поверхность которого составлена из отдельных участков (не обязательно одинаковой длины), а функции, описывающие форму границ участков, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно во всех точках границ, в том числе в точках сопряжения участков. Кроме того, выполняется некоторое дополнительное условие однозначности функции, которое будет пояснено ниже. При этих условиях выполняются требования теоремы единственности решения задач теории упругости, а задачу о нагружении такого тела можно привести к решению задачи о клине.

Действительно, пусть конкретно имеем тело, граница которого составлена из участков, описываемых уравнениями синусоиды (рис.I):

$$y_r = y_{or} + h_{or} \cdot Sin \frac{\pi s}{l} , \qquad -l \le s \le l , \quad l \le \frac{L}{2} \tag{I}$$

Введя обозначение $z = Sin \frac{\pi s}{l}$, придем к уравнению границы на данном участке в виде отрезка прямой

$$y_r = y_1 (2k-1) + h_r z \tag{2}$$

где $k = 1,2,3...$ - порядковый номер участка; y_1 - значение y_{or} для первого участка; z - локальная координата для каждого участка, меняющаяся в диапазоне $\pm Sin \frac{\pi \ell_k}{l}$.

Если теперь через точки $z_k = 0$ провести прямую, то она составит как раз границу изображающего клина. При этом угол полураствора клина α определяется как $\alpha = arctg \frac{h_1 \sin \frac{\pi\ell}{2\ell}}{\ell} = arctg \frac{y_1}{\ell}$ и будет одинаковым для всех участков. Если участки границы имеют разную длину, то необходимо также выполнение условия $\left(h_{rk} \cdot \sin \frac{\pi\ell_k}{2\ell}\right)/L_k = Const$ для всех k. Упомянутое условие однозначности заключается в данном примере в условии $\ell_k \leq \frac{L_k}{2}$, так как в противном случае некоторым точкам границы изображающего клина соответствовало бы более одной точки границы исходного тела.

Соответствие между точкой изображающего клина с координатами r, ϑ и точкой исходного тела с координатами x, y устанавливается по рис. 2 соотношениями (для простоты взят случай тела с участками одинаковой длины):

$$y = r \sin\vartheta ,$$
$$x = OA + S = \ell(2k-1) + \frac{\ell}{\pi} \arcsin \frac{y - y_0}{\ell} = \tag{3}$$
$$= \ell\left(2k - 1 + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y - \ell(2k-1)tg\vartheta}{\ell}\right)$$

Обратные зависимости имеют вид .

$$\vartheta = arctg \frac{y}{\ell\left(2k - 1 + \sin \frac{\pi S}{\ell}\right)} ,$$
$$r = \frac{\ell\left(2k - 1 + \sin \frac{\pi S}{\ell}\right)}{\cos\vartheta} = \sqrt{y^2 + \ell^2\left(2k - 1 + \sin \frac{\pi S}{\ell}\right)^2} \tag{4}$$

Имея решения для клина [I], можно с помощью (4) записать выражения для функции напряжений, а также для перемещений и напряжений в рассматриваемом теле, построить траектории главных напряжений.

При нагружении клина в вершине окружные напряжения σ_ϑ отсутствуют, поэтому компоненты напряжений в декартовых осях $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ удобно выражать через радиальные напряжения σ_r по известным формулам [I]. Для σ_r имеем

$$\sigma_r^x = P_\alpha^x \frac{\cos\vartheta}{r} ; \quad \sigma_r^y = P_\alpha^y \frac{\sin\vartheta}{r} ; \quad \sigma_r^m = P_\alpha^m \frac{\sin 2\vartheta}{r^2} \tag{5}$$

где .

$$P_\alpha^x = \frac{P_x}{\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha} ; \quad P_\alpha^y = \frac{P_y}{\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha} ; \quad P_\alpha^m = \frac{M}{\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha} \tag{6}$$

P_x, P_y, M — продольная, поперечная сила и момент в вершине клина, отнесенные к единице толщины клина.

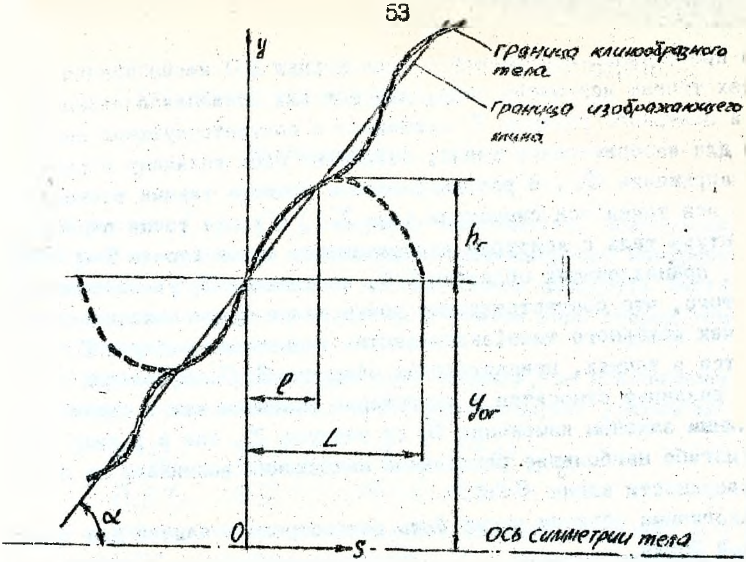


Рис. I Граница исходного и изображающего тел.

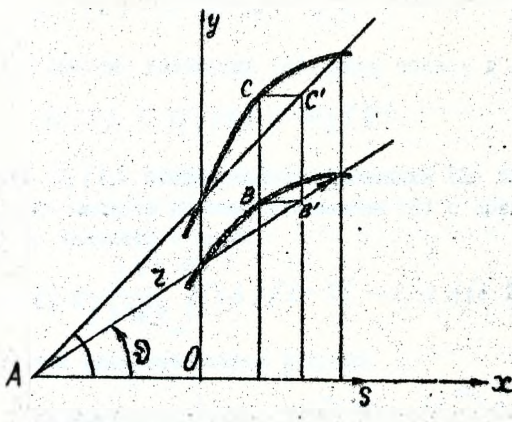


Рис. 2 Соответствие между точками исходного (B,C) и изображающего тел (B',C')

Из проведенных построений и вида формул (5) можно заключить, что в тех точках исходного тела, для которых значения полярного угла ϑ и полярного радиуса r совпадают с соответствующими значениями для изображающего клина, сохраняют свою величину и радиальные напряжения σ_r. В рассматриваемом примере такими точками являются все точки оси симметрии (ось x), а также точки пересечения контура тела с контуром изображающего клина (точки $S=0, S=\pm l_0$). В точках, принадлежащих областям $S<0$, напряжения σ_r увеличиваются за счет того, что соответствующие точки клина будут находиться левее точек исходного тела (эквивалентно уменьшению радиуса r), и уменьшаются в точках, принадлежащих областям $S>0$. В большей степени это различие относится к нагружению моментом как в связи с квадратичным законом изменения σ_r от радиуса r, так и в силу того, что при изгибе наибольшие радиальные напряжения возникают на боковой поверхности клина $\vartheta=\alpha$.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и задачи для тела конической формы.

Литература

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. -М.: Наука, 1979. - 560с.

ВЛИЯНИЕ МАСС КРОНБЛОКА И ПОЛАТЕЙ НА ЧАСТОТНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ПОДНИМАЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ

Малащенко В.А.

В работах [I], [2] получены зависимости, описывающие изменения частот колебаний поднимаемого длинномерного сооружения, как стержня с распределенной массой. Здесь выводится частотное уравнение аналогичного устройства с учетом явно сосредоточенных масс кронблока и полатей.

В этом случае прогиб для всех сечений, за исключением точек закрепления сосредоточенных масс, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\mu F}{EJ}\left(1-\frac{q}{\mu F}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad (I)$$

где q - интенсивность распределения внешней нагрузки; μ - погонная масса; EJ - изгибная жесткость; F - площадь поперечного сечения.

Решение уравнения (I), известным методом, можно свести к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с правой частью

$$U^{IV}(\varepsilon)-\lambda^4 U(\varepsilon)=\frac{L^4}{EJ}f(\varepsilon);\quad \varepsilon=\frac{x}{L}. \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (2) будем искать в виде

$$U(\varepsilon)=U_1(\varepsilon)+U_2(\varepsilon), \qquad (3)$$

здесь $U_1(\varepsilon)$ - общее решение уравнения (2) без правой части; $U_2(\varepsilon)$ - частное решение уравнения (2) с правой частью, которое удобно записать в виде

$$U_2(\varepsilon)=\frac{L^4}{2\lambda^3 EJ}\int_0^{\varepsilon}[sh\lambda(\varepsilon-\tau)-\sin\lambda(\varepsilon-\tau)]f(\tau)\,d\tau. \qquad (4)$$

При этом удовлетворяется условие

$$U_2(0)=U_2'(0)=U_2''(0)=U_2'''(0). \qquad (5)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$U(\varepsilon)=A_1\cos\lambda\varepsilon+A_2\sin\lambda\varepsilon+A_3 ch\lambda\varepsilon+A_4 sh\lambda\varepsilon+ \\ +\frac{L^4}{2\lambda^3 EJ}\int_0^{\varepsilon}[sh\lambda(\varepsilon-\tau)-\sin\lambda(\varepsilon-\tau)]f(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Для получения уравнения частот рассматриваем колебания отдельных участков стержня.

Удовлетворяя граничным условиям на левой опоре $x=0$, $u(0)=0$, $u''(0)=0$ уравнение изогнутой оси в интервале $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$ можно записать в виде

$$u(\varepsilon)=A_1 sh\lambda l\varepsilon + A_2 \sin\lambda l\varepsilon. \tag{7}$$

Уравнение изогнутой оси в интервале $\varepsilon_1\leq\varepsilon\leq 1$, удовлетворяющее граничным условиям свободного конца $x=l$

$$u''(l)=0; \qquad EJ\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{8}$$

после некоторых преобразований (7) можно записать в виде

$$u(\varepsilon)=A_1 sh\nu + A_2\sin\nu + \alpha_1\lambda^4 l^4 u(\varepsilon_1)\,u_1(\varepsilon-\varepsilon_1)+ \\ +\left(\alpha\lambda^4 l^4-\frac{cl^3}{EJ}\right)u(\varepsilon_2)\,u_1(\varepsilon-\varepsilon_2), \tag{9}$$

где c – жесткость соединительных канатов; $\nu=\lambda l\varepsilon$;

$$u_1(\varepsilon-\varepsilon_1)=\frac{1}{2\lambda^3 l^3}\left[sh\lambda l(\varepsilon-\varepsilon_1)-\sin\lambda l(\varepsilon-\varepsilon_1)\right]; \tag{10}$$

$$u_1(\varepsilon-\varepsilon_2)=\frac{1}{2\lambda^3 l^3}\left[sh\lambda l(\varepsilon-\varepsilon_2)-\sin\lambda l(\varepsilon-\varepsilon_2)\right]. \tag{11}$$

Удовлетворяя граничным условиям, после подстановки прогибов в сечениях

$$u(\varepsilon_1)=A_1 sh\nu_1 + A_2\sin\nu_1; \quad \nu_1=\lambda l\varepsilon_1,$$

и опуская промежуточные преобразования, получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_1, A_2:

$$\begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 &= 0; \\ A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Приравняв определитель системы (12) нулю, получим уравнение частот вида

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0. \tag{13}$$

Здесь коэффициенты α_1, α_2, β_1, β_2 имеют значения:

$$\alpha_1=sh\lambda l+\frac{\delta_1\lambda l}{2}(sh\psi_1+\sin\psi_1)sh\nu_1-\frac{1}{2}\left[\frac{c}{\lambda^3 EJ}-\right. \\ \left.-\delta_2\lambda l\right](sh\psi_2+\sin\psi_2)\,X_1(\varepsilon_1); \tag{14}$$

$$\alpha_2 = ch\,\lambda L + \frac{\delta_1\lambda L}{2}(ch\,\psi_1 + \cos\psi_1)\,sh\,\nu_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\lambda^3 EJ} - \delta_2\lambda L\right)[ch\,\psi_2 + \cos\psi_2)\,X_1(\varepsilon_2) + \delta_3\lambda L\Big[sh\,\lambda L +$$

$$+ \frac{\delta_1\lambda L}{2}[sh\,\psi_1 - \sin\psi_1)\,sh\,\nu_1\Big] - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\lambda^3 EJ} - \delta_2\lambda L\right)[sh\,\psi_2 - \sin\psi_2)\,X_1(\varepsilon_2); \tag{15}$$

$$\beta_1 = -\sin\lambda L + \frac{\delta_1\lambda L}{2}(sh\,\psi_1 - \sin\psi_1)\sin\nu_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\lambda^3 EJ} - \delta_2\lambda L\right)\times$$

$$\times(sh\,\psi_2 + \sin\psi_2)\,X_2(\varepsilon_2); \tag{16}$$

$$\beta_2 = -\cos\lambda L + \frac{\delta_1\lambda L}{2}(ch\,\psi_1 + \cos\psi_1]\sin\nu_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\lambda^3 EJ} -\right.$$

$$\left.- \delta_2\lambda L\right)(ch\,\psi_2 + \cos\psi_2]\,X_2(\varepsilon_2) + \delta_3\lambda L\Big[\sin\nu_1 + \frac{\delta_1\lambda L}{2}\sin\nu_1(sh\,\psi_1 -$$

$$- \sin\psi_1)\Big] - \frac{1}{2}\left(\frac{C}{\lambda^3 EJ} - \delta_2\lambda L\right)(ch\,\psi_2 - \sin\psi_2]\,X_2(\varepsilon_2), \tag{17}$$

где

$$\delta_i = \frac{m_i}{q};\quad \varepsilon_1 = \frac{x_1}{L};\quad \varepsilon_2 = \frac{x_2}{L};\quad \psi_1 = \lambda L(1-\varepsilon_1);\quad \psi_2 = \lambda L(1-\varepsilon_2);$$

$$X_1(\varepsilon_2) = sh\,\nu_2 + \frac{\delta_1\lambda L}{2}[sh\,\lambda L(\varepsilon_2-\varepsilon_1) - \sin\lambda L(\varepsilon_2-\varepsilon_1)]\,sh\,\nu_1; \tag{18}$$

$$X_2(\varepsilon_2) = \sin\nu_2 + \frac{\delta_1\lambda L}{2}[sh\,\lambda L(\varepsilon_2-\varepsilon_1) - \sin\lambda L(\varepsilon_2-\varepsilon_1)]\sin\nu_1. \tag{19}$$

Зная для конкретного механизма величины постоянных, входящих в уравнения (I4),..., (I9), решая трансцендентное уравнение (I3), можно определить частоты колебаний высотного сооружения подвешенного соединительными канатами к подъемной стреле с учетом масс кронблока и полатей.

Из полученных в общем виде зависимостей вытекает ряд частных случаев. Например, если положить $\delta_1 = \delta_2$ и $C = 0$, то система (I2) принимает вид

$$\begin{aligned} &A_1\,sh\,\lambda L - A_2\sin\lambda L = 0; \\ &A_1\,ch\,\lambda L - A_2\cos\lambda L = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Приравнивая к нулю определитель системы (20) и разделив все члены уравнения на $ch\,\lambda L\cos\lambda L$, придем к известному уравнению частот колебаний для стержня с одним шарнирно закрепленным, а с другим свободным концами

$$th\,\lambda L - tg\,\lambda L = 0, \tag{21}$$

корни которого будут равны

$$\lambda_1 l = 3{,}93; \quad \lambda_2 l = 7{,}07; \ldots \lambda_n l = (2k+0{,}5)\pi,$$

при $k = 2, 3, \ldots, n$.

Если положить $m_1 = m_2 = 0;\ c \neq 0$, что имеет место при подъеме, например, буровой вышки без предварительного закрепления на ней кронблока и полатей, то уравнение частот имеет вид

$$\frac{sh\lambda l\, ctg\lambda l - ch\lambda l}{sh\lambda l + ch\lambda l - sin\lambda l + cos\lambda l} = \frac{c}{2\lambda^3 EJ}. \tag{22}$$

Полученное уравнение (22) описывает частоты колебаний точки закрепления соединительных канатов к поднимаемому высотному сооружению. Для получения аналогичного уравнения для свободного конца сооружения достаточно положить $c_2 = 0$ и произвести те же преобразования.

Литература

1. Малащенко В.А., Калинин С.Г. Динамика механизмов при подъеме высотных сооружений. Львов: Вища школа, 1981. -110с.
2. Малащенко В.А. О частотах собственных колебаний механизма подьема буровых вышек// Некоторые вопросы динамики машин: Вестник Львовского политехн. ин-та. -1974. -№85. -С.5-7.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

Хвисевич В.М.

При действии высоких температур становится существенной зависимость упругих свойств тел, теплофизических параметров от температуры (коэффициенты теплопроводности и линейного расширения, модуль упругости и др.).

Рассмотрим краевую задачу неоднородной термоупругости в квазистатической постановке.

Температура Т считается найденной в результате решения краевой задачи теплопроводности типа Дирихле (коэффициент теплопроводности λ (Т) является функцией температуры).

Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия краевой задачи неоднородной термоупругости без учета массовых сил запишутся

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right) = -\frac{2(1+\nu)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial x_j}\sigma_{ij}^T, \tag{I}$$

$$n_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] = \frac{1+\nu}{1-2\nu}n_i\int_0^T \alpha(T)\,dT .$$

где u_i – перемещения, δ_{ij} – символ Кроннекера, ν – коэффициент Пуассона, α (Т) – коэффициент линейного расширения, $E(T)$ – модуль упругости. Напряжения

$$\sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^T \alpha(T)\,dT\,\delta_{ij}\right] \tag{2}$$

Решение уравнений (I) разыскиваем в виде степенного ряда по малому параметру φ:

$$u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{n}\varphi^k \cdot u_i^{(k)}, \tag{3}$$

здесь φ – введенный согласно [I] малый параметр, значение которого определяется функцией E(Т).

Подставляя (3) в (I) получим последовательность краевых задач для $u_i^{(k)}$, т.е. краевая задача (I) сводится к последовательности краевых задач однородной термоупругости.

Для $U_i^{(0)}$ получим

$$\Delta u_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right). \tag{4}$$

Полное решение (4) выражено суммой частного решения U_i^T и общего решения теории упругости u_i^u

$$u_i^{(0)} = u_i^u + u_i^T. \tag{5}$$

Общее решение U_i^u представлено потенциалом простого слоя и интегральные уравнения приведены в [2]. Частное решение разыскиваем как градиент функции W.

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4) и после преобразования имеем

$$W = -a\left[c\left(\oint_S \varkappa(y)\frac{d(r/2)}{dn}dS + A_i\frac{r_{x_i}}{2}\right) - b\int_V T\frac{1}{r}dV\right] \tag{7}$$

где $a = \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}$, b и c - постоянные, x - фиксированная точка, y - точка интегрирования, n - внешняя нормаль к поверхности S, $r = |y-x|$, $\varkappa(y)$ - плотность потенциала.

Напряжения выражаются так

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^T, \tag{8}$$

где σ_{ij}^u - напряжения найденные после решения интегральных уравнений теории упругости [2], а

$$\sigma_{ij}^T = 2\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\Delta W\right). \tag{9}$$

Модуль сдвига μ аппроксимируется в зависимости от свойства материала.

После определения σ_{ij}^0 решаем краевые задачи :

$$\Delta u_i^{(n)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial(\ln E)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_j}\sigma_{ij}^{n-1},$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j}\delta_{ij}\right] n_j = 0. \qquad (\text{I0})$$

Решение задач (I0) $u_i^{(n)}$ представим суммой:

$$u_i^{(n)} = u_i^{о} + u_i^{ч}, \qquad (\text{II})$$

где $u_i^{о}$ - общее решение интегральных уравнений теории упругости, $u_i^{ч}$ - частное решение, которое мы разыскиваем в виде

$$u_i^{ч} = \int\!\!\int_V \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_p}\right)\sigma_{jp}^{(n-1)}\right] u_{ij}\, dV, \qquad (\text{I2})$$

где u_{ij} - решение Кельвина.

Напряжения определяем так

$$\sigma_{ij}^{n} = \sigma_{ij}^{о} + \sigma_{ij}^{ч} \qquad (\text{I3})$$

где $\sigma_{ij}^{ч}$ - находим подставляя (I2) в уравнения Дюгамеля-Неймана, $\sigma_{ij}^{о}$ - напряжения теории упругости [2].

Литература

I. Trostel R. Stationare Warmespannungen mit temperatur - abhangigen Stofwerten."Ingenieur-Archiv", 26, 1958.

2. Хвисевич В.М. Прямое решение пространственных краевых задач стационарной термоупругости методом потенциала// Диссертация на соискание уч.ст. к.т.н. М. 1980 -230с.

О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В.М.Хвисевич

Рассмотрим плоскую внешнюю D^- или внутреннюю D^+ многосвязную область, на границе которой L заданы значения усилий $P_i = f_i(x_L)$ и температуры $T = F(x_L)$ (т.е. для T имеем задачу Дирахле). Предполагается, что деформирование механическими усилиями не приводит к изменению температуры в области. Температура T определяется как решение независимого интегрального уравнения краевой задачи теплопроводности.

Большинство авторов решает температурную задачу Дирихле по методу ньютоновского потенциала так называемым прямым или непрямым способом. Как известно в прямом способе решение для T берется в виде формулы Грина, а в непрямом способе представляется потенциалом двойного слоя

$$T(x) = \int_L æ(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y , \tag{I}$$

здесь φ - угол между вектором $r = |y-x|$ и внешней нормалью $n_i(y)$ проведенной к L в точке интегрирования y, x - параметрическая точка, $æ(y)$ - плотность потенциала двойного слоя.

Формула Грина позволяет представить температуру в области $\mathcal{D}^-$ или $\mathcal{D}^+$, однако присутствие потенциалов простого и двойного слоев создает сложности при численном решении задачи.

Решение (I) можно применять только в случае внутренней односвязной области. Это объясняется тем, что потенциал двойного слоя представляет температуру внешней или внутренней многосвязной области лишь частично, т.е. им не учитывается влияние средней температуры (случай J по Н.М.Гюнтеру [I]).

Недостаток решения устраняем, дополнив (I) точечными источниками определенной мощности [4] .

$$T(x) = \int_L æ(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln \frac{1}{r_{A_k}} \tag{2}$$

где A_k - мощность источников, расположенных во внутренних контурах L_k, r_{A_k} - расстояние от точки x до источника.

Через L_0 обозначим охватывающий контур $k+1$ - связанной области.

Такой прием известен в теории гармонических функций, однако практического применения для решения краевых задач термоупругости практического применения для решения краевых задач термоупругости методом потенциала он не находил.

Константы A_k определяются через среднее значение температур на L_k, которое легко вычислить из граничного условия

$$T^{(m)} = \int_L F \, dl . \tag{3}$$

В граничных точках контуров L_k потребуем, чтобы было

$$T^{(m)}_{k+1} = \frac{1}{L_{k+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{L_k} \ln \frac{1}{r_{A_i}} \, dl_y + 2\pi \varkappa_e^{(m)}, \tag{4}$$

это предлагает условие Дирихле для $T^{(m)}$, т.к. потенциал двойного слоя в (2) равен нулю.

На основе (2) получается интегральное уравнение краевой задачи Дирихле для многосвязной области и для $\mathcal{D}^-$ и после его решения определяется плотность $\varkappa(y)$.

Решение дифференциальных уравнений плоской задачи квазистационарной термоупругости разыскиваем с помощью градиента некоторой бигармонической функции. Выполнив преобразования, получим формулу бигармонической функции, которая представлена контурным интегралом и алгебраической суммой

$$W = -\frac{a}{4}\left\{\int_L \varkappa(y)\, r \cos\varphi\, (1 - 2\ln r)\, dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[r_{A_k}^2 (1 - \ln r_{A_k})\right]\right\}, \tag{5}$$

где $a = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}$, α – коэффициент линейного расширения, ν – коэффициент Пуассона.

Используя (5) получаем новые интегральные представления температурных перемещений

$$u_i^T = -\frac{a}{4}\left\{\int_L \varkappa(y)\left[n_i(y)(2\ln r - 1) + 2\beta_i \cos\varphi\right] dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\beta_{A_k} r_{A_k} (2\ln r_{A_k} - 1)\right]\right\}, \tag{6}$$

(здесь β_i – направляющие косинусы вектора r) и напряжений для $x \in L$

$$\sigma_{ij}^T = a\mu \left\{ 2\pi \varkappa(x_L)\left[n_i(x_L) - \delta_{ij}\right] + \text{v.p.} \int_L \frac{\varkappa(y)}{r}\left[n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2(\beta_i\beta_j - \delta_{ij})\cos\varphi\right] dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\beta_{A_i}^{(k)} \beta_{A_j}^{(k)} - \left(\frac{1}{2} + \ln r_{A_k}\right)\delta_{ij}\right]\right\}, \tag{7}$$

где μ – модуль сдвига.

Полные перемещения и напряжения определяются как

$$u_i = u_i^o + u_i^T ; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + \sigma_{ij}^T , \tag{8}$$

здесь σ_{ij}^o – соответствуют решению u_i^o дифференциальных уравнений теории упругости их интегральные представления приведены в работе [3] .

Подставляя σ_{ij} в граничные условия второй краевой задачи получаем систему сингулярных уравнений плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости

$$\nu_i(x) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L \frac{1}{r} \Big\{ \nu_i(y)\big[(1-2\nu) - 2\beta_i^2\big]\cos\psi + \Big\{\big[n_k(y)\beta_i - n_i(y)\beta_k\big](1-2\nu) + 2\beta_i\beta_k\cos\psi\Big\}\nu_k(y)\Big\} dl_y = f_i(x_L) + f_i^T(x_L). \tag{9}$$

где $\nu_i(y)$ – плотность потенциала простого слоя,

$$f_i^T(x_L) = \sigma_{ij}^T \cdot n_j . \tag{10}$$

Последовательность решения рассматриваемой задачи следующая: сначала решается интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности относительно плотности $\varkappa(y)$, после чего вычисляются (6) и (7). Затем с учетом (10) решается система СИУ (9), в результате решения которой находим $\nu_i(y)$. Напряжения σ_{ij} и перемещения u_i определяем по формулам (8).

Проведенные выкладки относятся для области $\mathcal{D}^+$. Если рассматриваемая область $\mathcal{D}^-$, то в (4) вместо слагаемого $2\pi\varkappa_e^{(m)}$ записывается температура в бесконечности T_∞ , а в (7) добавляется напряжения σ_{ij}^∞ .

Для численного решения СИУ с учетом методик работы [2] , разработан алгоритм и программа для ЭВМ. Рассматривая область может быть кусочно-гладкой. Неизвестная плотность потенциала интегрируется полиномом Лагранжа. Сингулярные интегралы в (6), (7), (9) вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса с четным числом узлов.

Достоверность полученных формул подтверждена решением тестовых примеров: краевые задачи для СИУ – а) во внутренней кольцеобразной области (рис. I), б) во внешней односвязной области (рис.2). С учетом симметрии области и нагружения достаточно рассмотреть её I/4 часть.

Внешний контур области а) был разбит на 7 , а внутренний на 5 отрезков интегрирования. Контур области б) апроксимирован 7 отрезками. Сравнение результатов численного решения этих задач с известными аналитическими решениями показало высокую точность алгоритма (погрешность составила сотые доли процента).

Таким образом с помощью дополнения решения (I) простыми источниками определенной мощности получены новые СИУ плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости для внешней и многосвязной областей. В отличае от прямого способа полученные на основе (5) формулы проще и их легче реализовать численно.

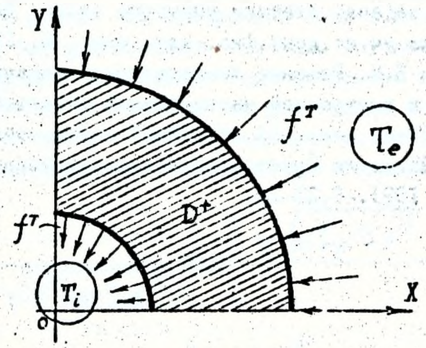


Рис.I Расчетная схема задачи "А"

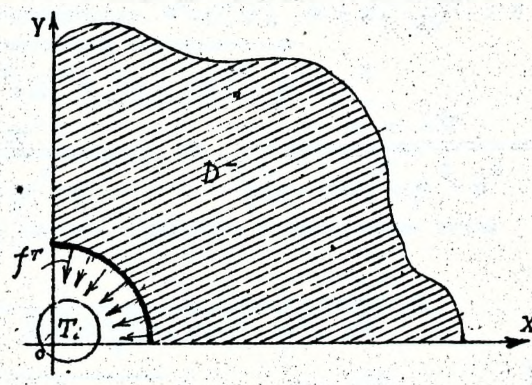


Рис.2 Расчетная схема задачи "Б"

Литература

I. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. -М.: Гос. издательство техн.-теоретической литературы, 1953, -414 с.
2. Бормот Ю.Л. Численное решение СИУ плоской задачи теории упругости// Проектирование металлических конструкций. Реферативный сборник. Сер. 7. -М.: ЦИНИС Госстроя СССР. 1974. -Вып.4.(51).-С.17-19.
3. Копейкин Ю.Д. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела// Диссертация на соискание уч.ст.докт.физ.-мат. наук. М. 1969, -280с.
4. Хвисевич В.М. Решение температурной задачи Дирихле для внешней и внутренней многосвязной областей методом потенциала. -Тез. докл. XX юбилейной научно-техн. конф., посвященной 25-летию Брестского политехнического института. -Брест, 1991.-С.23-24.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР В ПЛАСТИНЕ, СОЗДАВАЕМОГО БЫСТРО ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА С РАЗЛИЧНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Гладковский В.И., Сазонов М.И., Черненко В.П.,
Черненко Н.В., Чопчиц Н.И., Хвисевич В.М.

При механической обработке высокопрочных металлов [1] с целью повышения производительности труда для разупрочнения поверхностного слоя обрабатываемого материала целесообразно нагревать его плазменно-дуговым способом. В данной работе рассмотрена расчетно-аналитическая модель температурного поля в полуограниченном теле, создаваемого быстродвижущимся точечным источником тепла заданной мощности. Процесс нахождения температурного поля на каждом из временных интервалов разбивается на два этапа. На первом этапе определяется температурное поле, порождаемое быстродвижущимся источником, в предположении, что свободная поверхность тела адиабатична[2]

$$T(x',y',z')=\frac{}{2\pi\lambda\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\exp\left[-\frac{V\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{}\left(1-\cos\varphi'\right)\right], \quad (1)$$

где $q=const$ - тепловой поток, $\lambda=const$ - коэффициент теплопроводности, V - скорость перемещения точечного источника тепла, a - температуропроводность, $\varphi'=(\hat{\vec{i}},\vec{z}')$, $\vec{z}'=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.
Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$x'^2+y'^2+z'^2=(x+V\tau)^2+y^2+z^2,$$

$$\cos\varphi'=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{x+V\tau}{\sqrt{(x+V\tau)^2+y^2+z^2}}$$

перейдем в систему отсчета, связанную с неподвижным телом

$$T(x,y,z,\tau)=\frac{}{2\pi\lambda\sqrt{(x+V\tau)^2+y^2+z^2}}\times \quad (2)$$

$$\times\exp\left[-\frac{V}{2a}\sqrt{(x+V\tau)^2+y^2+z^2}\left(1-\frac{x+V\tau}{\sqrt{(x+V\tau)^2+y^2+z^2}}\right)\right].$$

В дальнейшем будем рассматривать температурное поле при $y=0$, поскольку сравнение с экспериментом возможно только для этой плоскости.

Рассмотрим различные приближения. При $z=0$ температурное поле имеет вид

$$T(x,\tau)=\frac{q}{2\pi\lambda(x+V\tau)}. \tag{3}$$

При $x=0$, имеем

$$T(z,\tau)=\frac{q}{2\pi\lambda\sqrt{V^2\tau^2+z^2}}\exp\left[-\frac{V}{2a}\sqrt{V^2\tau^2+z^2}\left(1-\frac{V\tau}{\sqrt{V^2\tau^2+z^2}}\right)\right]. \tag{4}$$

При $z, x \ll V\tau$, получим

$$T(\tau)=\frac{q}{2\pi\lambda V\tau}. \tag{5}$$

и, наконец, при $z, x \gg V\tau$, имеем

$$T(z)=\frac{q}{2\pi\lambda z}\exp\left[-\frac{Vz}{2a}\left(1-\frac{V\tau}{z}\right)\right]\approx\frac{q}{2\pi\lambda z}\exp\left(-\frac{Vz}{2a}\right).$$

Из (6) легко видеть, что при $z\to\infty$, $T(z)\to 0$.

На втором этапе "включается" теплообмен [3]

$$-\lambda\left.\frac{dT}{dz}\right|_{z=0}=\alpha_{эф}\left(\Theta-T_{z=0}\right), \tag{6}$$

где $\alpha_{эф}=\alpha_e+\alpha_c$, α_c – коэффициент конвективного теплообмена, $\alpha_e=\varepsilon\sigma\frac{T_c^4-T_{z=0}^4}{T_c-T_{z=0}}\approx 4\varepsilon\sigma T_c^3$ – коэффициент лучистого теплообмена, ε – степень черноты поверхности тела, σ – постоянная Стефана-Больцмана, T_c – температура окружающей среды.

Однако даже при таких упрощающих предположениях относительно характера теплообмена, строгое решение задачи о поле температур в теле с "начальным распределением температуры вида (2) аналитическим способом не может быть получено. Из физических соображений следует, что в течение небольшого промежутка времени остыванию, в основном подвержен приповерхностный слой тела. При скоростях, применяемых на практике, условие $V\tau \gg z$ оказывается выполненным, поэтому для начального распределения температур можно применять формулу (5). Кроме того, если ограничиться рассмотрением точек, близких к началу координат, тогда в первом приближении можно считать, что распределение температуры в окрестности начала координат также описывается формулой (5) (вместо формулы (4), в которую для последующей сшивки решений вводится безразмерный параметр ξ

$$T_0 = T_0(\tau_0) = \xi q / \left(2\pi\lambda V \tau_0\right). \qquad (7)$$

Здесь через τ_0 обозначен момент времени, в который происходит "включение" теплообмена.

Вводя критерий Био: $Bi_z = \alpha_{эф} z/\lambda$ и Фурье $Fo_z = a(\tau - \tau_0)/z^2$, распределение температуры в процессе остывания можно записать в виде [2]

$$T(x,z,\tau) = \theta(T_0 - T_c) + T_c, \quad T_0 = T(x \ll V\tau_0,\ z \ll V\tau_0,\ \tau_0 \ll 1),$$

где T_c – температура среды, а θ – параметр температуры, определяемый следующим выражением

$$\theta(Bi_z, Fo_z) = 1 - erfc\left(1/2\sqrt{Fo_z}\right) + erfc\left(1/2\sqrt{Fo_z} + Bi_z\sqrt{Fo_z}\ exp\left(Bi_z + Bi_z^2 Fo_z\right)\right.$$

Применимость полученной формулы ограничена двумя обстоятельствами. Во-первых, при больших τ_0 теряет смысл раздельное рассмотрение процессов нагрева и остывания, и, во-вторых, при больших $/\tau - \tau_0/$ упрощающее предположение о характере лучистого теплообмена, выраженное формулой (6), становится неприемлемым. Характерное расстояние $x^* = V\tau_0$ определяет, в сущности, расстояние от точки наблюдения до плазмотрона, такое, что при $x < x^*$ преобладают процессы нагрева поверхности от плазмотрона, а при $x > x^*$ начинают преобладать процессы, связанные с остыванием поверхности за счет теплообмена с окружающей средой (в основном, с газовым потоком на поверхности). Суммируя результаты при $x = 0$, $y = 0$, распределение температур можно записать в следующем виде. При $\tau < \tau_0$ имеем

$$T_1(z,\tau) = \frac{q}{2\pi\lambda\sqrt{V^2\tau^2 + z^2}}\ exp\left[-\frac{V\sqrt{V^2\tau^2 + z^2}}{2a}\left(1 - \frac{V\tau}{\sqrt{V^2\tau^2 + z^2}}\right)\right]$$

С другой стороны при $\tau > \tau_0$ можно записать

$$T_2(z,\tau) = T_c + \left(\frac{mq}{2\pi\lambda V\tau_0} - T_c\right)\left[1 - erfc\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{a(\tau-\tau_0)}{z^2}}} + \right.$$

$$erfc\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{a(\tau-\tau_0)}{z^2}}} + \frac{\alpha_{эф} z}{\lambda}\sqrt{\frac{a(\tau-\tau_0)}{z^2}}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\alpha_{эф} z}{\lambda} + \frac{\alpha_{эф}^2 z^2}{\lambda^2} \cdot \frac{a(\tau-\tau_0)}{z^2} \right).$$

При этом, как указано выше, $(\tau-\tau_0)$ не должно быть слишком большим, т.е. "хвост" распределения $T(z,\tau)$ при больших τ указанными формулами достаточно точно не описывается. С целью проверки полученных соотношений рассмотрим температурное поле в чугуне марки ИЧХ, для которого

$$\lambda = 16{,}76 \text{ Вт/м·К}, \quad \rho = 7{,}2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$C_p = 0{,}54 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг·К}}, \quad a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = 4{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Скорость источника примем равной 0.38 м/с

Расчеты проведем для 3-х значений координаты z

$$z_1 = 0{,}1 \text{мм}, \quad z_2 = 0{,}5 \text{мм}, \quad z_3 = 0{,}9 \text{мм}.$$

При этом

$$P_e \sim \frac{Vz}{a} \approx 10^2,$$

так что источник быстродвижущийся. Для оценки величины теплового потока q примем мощность плазмотрона $P = 36{,}5$ кВт, к.п.д. плазмотрона $\eta = 0{,}6$. Тогда $q = 21{,}8$ кВт. Значение α примем равным

$$\alpha \approx 45 \text{ Вт/м}^2\text{К}, \quad T_c = 600°C$$

степень черноты $\varepsilon_s = 0{,}5$ (литературные данные отсутствуют).

Тогда

$$\alpha_{\text{л}} \sim 3 \text{ Вт/м}^2\text{·К}$$

Поэтому фактически лучистый теплообмен можно не учитывать. Примем

$$\alpha_{эф} = \alpha_{\text{л}} + \alpha \simeq 50 \text{ Вт/м}^2\text{·К}$$

Значение m примем из условия сшивания решений для $T(z,\tau)$ при $\tau < \tau_0$, и $\tau > \tau_0$ при $\tau = \tau_0$. Расчёты показывают, что при $z = 0{,}1 \div 1$мм m слабо меняется около значения $m \approx 1{,}02$, так что в пределах точности расчёта можно положить $m = 1$. Значение τ_0 рассчитывалось так, чтобы выполнялось условие $z \ll V\tau_0$ с точностью до величины порядка 10^{-2}. Поэтому принималось $\tau_0 = 0{,}1$с. Расчеты показывают, что распределения температур мало чувствительны к изменениям τ_0 в интервале $0 < \tau_0 < 0{,}1$с. Результаты расчетов приведены в таблице.I. Значения температур округлялись с точностью до 10°С. Результаты вычисления очень чувствительны к тому, какой принимается температура потока газов, омывающих поверхность тела (речь идет о температурном поле при $\tau > \tau_0$). Надежные экспериментальные данные на этот счет отсутствуют, поэтому была при расчетах принята сетка температур $T_c \in (300 \div 700°С)$ и выбрано окончательно значение температуры $T_c = 600°С$, при котором совпадение с

Таблица I

τ, с	0,02	0,04	0,06	,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,30
$z_1 = 0{,}1$ мм	630	1500	1100	900	730	630	560	610	490	400	340
$z_2 = 0{,}5$ мм	320	800	950	850	700	630	570	540	470	430	350
$z_3 = 0{,}9$ мм	140	320	320	430	420	380	340	330	330	310	360

λ – теплопроводность среды. Вт/(м К);
ρ – плотность, кг/м^3;
c_p – теплоемкость газа при изобарическом процессе ($p = const$);
a – температуропроводность, $\frac{м^2}{с}$;
$\alpha_л$ – 3 Вт/м^2·К;
$\alpha_{эф} = \alpha_e + \alpha$;
m – коэффициент сгибки
P_e – число Пекле;
α – коэффициент теплопередачи, Вт/(м^2·К);
p – давление газа, Па;
m_0 – масса молекулы, кг;
M – молярная масса, кг/к моль;
R – универсальная газовая постоянная, дж/моль К;
P_0 – приведенное давление;
q – поверхностная плотность теплового потока, Вт/м^2;
$c_{уд}$ – удельная теплоемкость, Дж/(кг К);
$c_{об}$ – объемная теплоемкость, Дж/м^3 К.

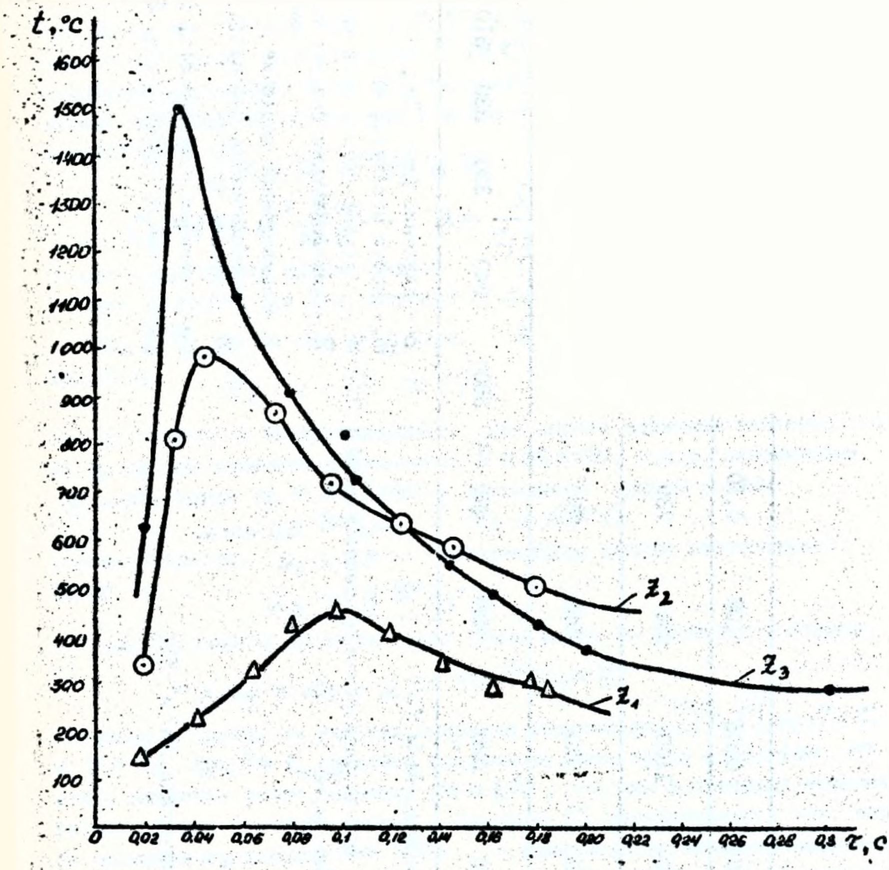


Рис. I Расчетные значения температур в зависимости от времени.

экспериментом получается наиболее хорошим.

Графики, иллюстрирующие расчетные значения распределения температур в зависимости от времени τ, приведены на рис. I. Для сравнения на этом же рисунке приведены экспериментальные графики по данным [3] . Обращает на себя внимание то обстоятельство, что фактически для всех τ имеем $T_{теор} > T_{эксп}$. Это может свидетельствовать о том, что некоторая часть тепла, не учитываемая выше, уходит реально в направлении оси Oy или о том, что температура T_c газового потока фактически несколько меньше, чем это было принято в данном случае. Возможно также, что неточны значения α и η . Здесь нужны дальнейшие исследования. Существенно, что в области $\tau > \tau_o$ как теория так и эксперимент дают "инверсное" распределение температур по глубине, т.е. при $z_1 > z_2$ имеем $T_2 < T_1$. Если не учитывать теплообмен с газовым потоком и для всех τ пользоваться выражением для T_1 (без учета теплообмена на поверхности), то значения T , полученные при этом, такие зависимости не обнаруживают.

Выводы: Рассмотрена модель для расчета температурного поля в полуограниченном теле, порождаемого быстродвижущимся точечным источником тепла заданной мощности, с учетом теплообмена на свободной поверхности. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментом, показывающее достаточно хорошее совпадение результатов (в пределах 5÷10%).

Имеющиеся расхождения указывают, возможно, на тот факт, что использование формулы (I), полученной на основе уравнения теплопроводности, содержащем бесконечную скорость теплопередачи, является не вполне оправданным и требуется модификация этого решения. Дальнейших исследований требует также учет конечных размеров источника тепла, и характера распределения теплового потока по сечению, а также теплообмена растекающейся струи с поверхностью.

Литература

I. Макаров А.Д. Оптимизация процессов резания.-М.: Машиностроение, 1986. -278с.
2. Резников А.Н. Теплообмен при резании и охлаждении инструмента. -М.: Машгиз, 1963. - 213с.
3. Пехович А.И. и др. Расчет теплового режима твердых тел. -Л.: Энергия, 1976. - 211с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПЛАЗМЕННОЙ РЕЗКЕ МЕТАЛЛОВ

Г.С.Кандилян, В.Г. Каролинский, М.И. Сазонов, В.Л. Хуснутдинова

ВВЕДЕНИЕ

Плазменная резка находит все более широкое применение в различных отраслях промышленности, что обусловливается возможностью ее использования для резки с высокой производительностью и точностью как черных, так и цветных металлов и их сплавов. В настоящее время накоплен определенный опыт применения плазменной резки. Вместе с тем в имеющейся литературе по плазменной резке ограничены работы по изучению физических и тепловых процессов, происходящих при резке металлов. При резке плазменной дугой имеется три источника тепла, а именно: подвижное пятно дуги, столб дуги и струя плазмы. Каждый из них вносит свою долю тепла по всей высоте реза.

В данной работе предложена секционированная модель реза и проведены исследования формирования плазменной дуги и распределения усредненной плотности плазменной дуги и распределения усредненной плотности тока и тепловых потоков вдоль полости реза.

I. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка состоит из серийно выпускаемого плазмотрона, систем питания электроэнергией, рабочим газом - воздухом и охлаждающей водой, секционированной модели реза и систем измерения распределения тепловых потерь и токов плазменной дуги вдоль полущели, моделирующей рез в листовом металле (рис. I).

В экспериментах использовался плазмотрон со сменными соплами с внутренним диаметром 3,5; 4,0; 5,0 мм. Расход воздуха через плазмотрон составлял I,0 - 4,0 г/с. Воздух подавался в дуговую камеру с закруткой с целью стабилизации дуги в пространстве на оси плазмотрона. Эксперименты проводились при прямой полярности подключения плазмотрона к источнику электропитания, когда внутренний электрод плазмотрона служил катодом, а секционированная модель - анодом.

В качестве модели полости реза использовался набор из медных охлаждаемых водой секций. Каждая секция диаметром I00 мм и толщиной 9,5 мм имела выфрезерованную щель от центра секции по образующей, причем ширина щели была выбрана равной 8 мм, характерной при резке металлов большой толщины. Секции при помощи

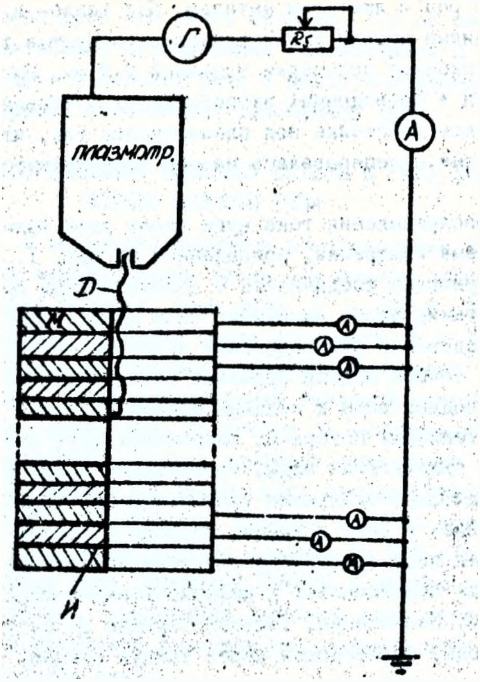


Рис. I Электрическая схема питания плазмотрона и системы электроизмерений; М - секция модели полости реза; $R_б$ - баластное сопротивление; Г - источник электропитания постоянного тока; И - тепло- и электроизоляция; D - электрическая дуга.

стяжных болтов соединялись так, что их щели образовали единую полость, моделирующую рез в листовом металле. Для тепло- и электроизоляции между секциями модели устанавливались покрытые термостойким лаком стекловолоконные прокладки толщиной 0,2 мм. Высота секционированной модели в проведенных экспериментах составляла 107мм. Модель устанавливалась на стойке под плазмотроном так, что образующая сопла плазмотрона проецировалась на оси полуокружности щели и секции.

Для изучения распределения тока дуги вдоль реза была применена электрическая схема измерений, приведенная на рис. I. Каждая секция модели электрически соединялась с положительным полюсом источника электропитания через амперметр типа Ц-4311 класса точности 0,5. Для исследования распределения тепловых потоков вдоль полости реза каждая секция модели отдельно охлаждалась потоком воды. Индивидуальный подвод воды к секциям модели позволил провести калориметрирование тепловых потерь от плазменной дуги и струи. Разность температур охлаждающей воды, протекающей через каждую секцию, измерялась дифференциальными транзисторными термодатчиками, которые погружались в воду в линиях подвода и отвода воды для каждой секции. Каждая пара транзисторов включалась в мостовую схему измерений, которая подключалась к информационно-измерительной системе типа К-200/4. Напряжения, соответствующие разности температур охлаждающей воды, протекающей через каждую секцию, последовательно подавались на цифропечатающее устройство для последующей обработки данных.

Следует отметить, что предложенная модель полости реза в некоторой степени отличается от реального реза в листовом металле, производимого при помощи плазмотрона. Отличие заключается в том, что при резке в области взаимодействия плазменной дуги с металлом происходит его расплавление и испарение, а также вынос расплавленного металла потоком плазмы из полости реза. Условия горения дуги, установления ее средней длины при резке металла могут отличаться от условий горения в полости разработанной модели. Для выявления этих особенностей были проведены исследования вольт-амперных характеристик дуги при использовании секционированной модели. Результаты экспериментов были сравнены с вольт-амперными характеристиками дуги полученными непосредственно при резке металла. Сравнение вольтамперных характеристик в исследованных диапазонах тока дуги и расходах рабочего газа показало, что их вид и величины напряжений при соответствующих токах отличаются незначительно. Это положение позволяет заключить, что условия

горения дуги в секционированной модели

горения дуги в секционированной модели приближенно те же, что и условия горения дуги при резке металла. Тем не менее необходимы дальнейшие детальные исследования газодинамики и процессов установления длины дуги в полости реза с целью изыскания способов увеличения прорезающей способности плазменной дуги.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ И ТОКА ДУГИ ВДОЛЬ МОДЕЛИ ПОЛОСТИ РЕЗА

На рис. 2 приведено типичное распределение тепловых потерь, приходящих на единицу длины вдоль оси модели полости реза при различных расходах воздуха, токе дуги I = 140 А, диаметре сопла d_c = 4 мм и расстоянии от среза сопла до модели ℓ = 12 мм. Координаты секций отнесены к их среднему сечению. Как видно из рисунка, при расходе воздуха 1 г/с максимальный тепловой поток приходится на первую секцию, далее вниз по потоку он экспоненциально уменьшается. При увеличении расхода рабочего газа через плазмотрон до 2 г/с тепловые потери на первых двух секциях стали сравнимыми, а тепловые потоки в последующих секциях вниз по потоку газа уменьшаются. При увеличении расхода воздуха до 2,5 г/с тепловые потери во вторую секцию даже превышают потери в первую секцию.

Таким образом, увеличение рабочего газа через плазмотрон позволяет перераспределить характер теплообмена плазменной дугой и металлом в полости реза.

На рис. 3 приведены распределения тепловых потерь при токах дуги 60-160 А при диаметре сопла 4 мм и расстоянии от реза сопла до модели 12,0 мм. Из полученных данных следует, что с ростом тока от 60 А до 160 А тепловые потери в среднем в первые и последние секции возрастают в 2-2,7 раза. Таким образом, увеличение тока дуги и ее мощности приводит к увеличению прорезающей способности плазмотрона.

Изучение распределения тепловых потерь вдоль полости реза при различных диаметрах сопла и расстояниях плазмотрона до модели показали, что при изменении диаметра сопла от 3,5 мм до 5 мм и расстояния ℓ от 12,0 мм до 20 мм тепловые потоки вдоль полости реза изменяются пренебрежимо мало. Тем не менее следует отметить, что уменьшение диаметра сопла и расстояния ℓ плазмотрона до модели приводит к слабому возрастанию тепловых потерь во всех сечениях реза и, следовательно, к улучшению прорезающей способности плазмотрона.

Для изучения поведения дуги в полости реза были проведены измерения распределения тока дуги вдоль реза. На рис. 4 приведены характерные усредненные на единицу длины токи в секции в зависи-

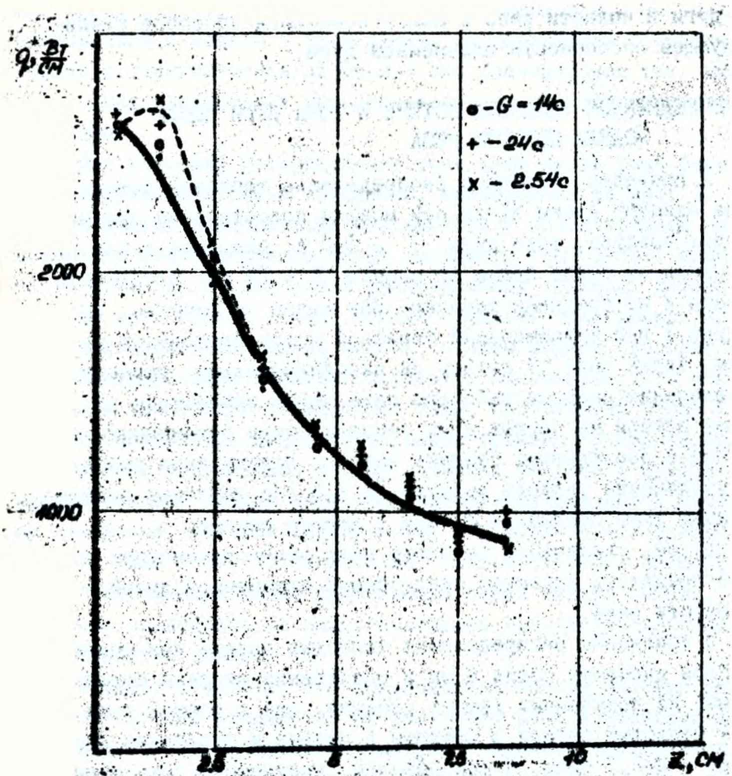


Рис. 2. Распределение тепловых потерь вдоль реза при различных расходах воздуха. I = 140 А, d_c = 4 мм, l = 12 мм.

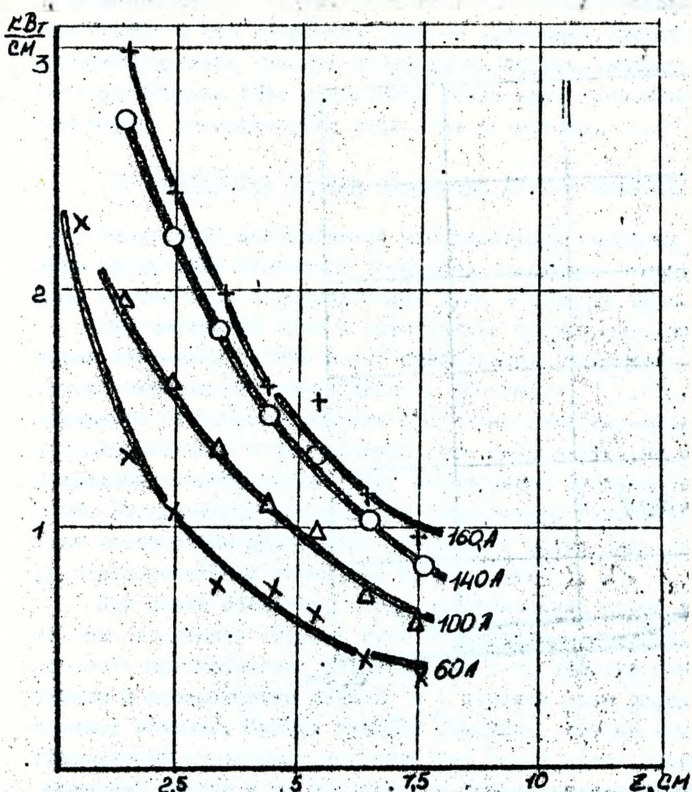


Рис. 3 Распределение тепловых потоков вдоль полости реза при различных токах.
G = 1,5 г/с, d_c = 4 мм, l = 12 мм.

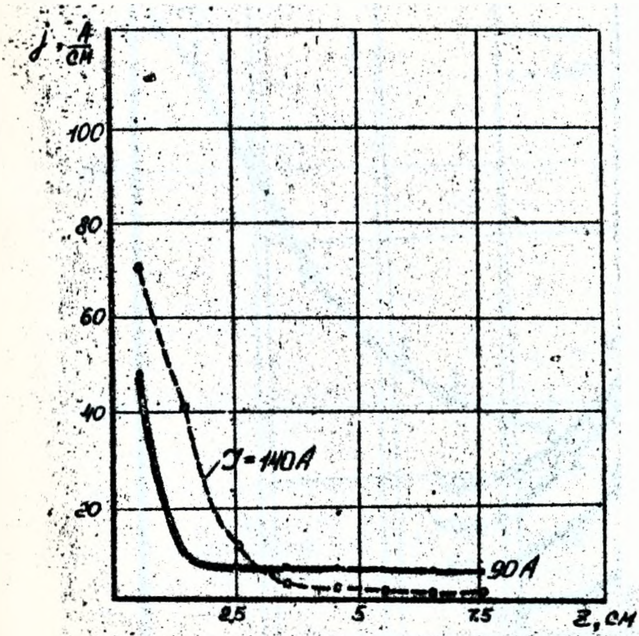


Рис. 4 Распределение усредненной плотности тока дуги вдоль реза при различных токах. G = 2 г/с, d_c = 4 мм, l = 12 мм

мости от расстояния вдоль полости реза при токе дуги 90 и 140 А, диаметре сопла 5 мм, расстоянии плазмотрона от металла 12,0 мм и расходе воздуха 1,3 г/с. Из полученных результатов следует, что распределение тока дуги вдоль реза аналогично распределению тепловых потерь и что изменение тока не позволяет существенным образом перераспределить токовую нагрузку на первую секцию. Изменение расхода воздуха даже в два раза также дает возможность сместить максимум в распределении тока вниз по потоку.

3. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ДУГИ В ПОЛОСТИ РЕЗА

Результаты исследования распределений тепловых потерь и тока дуги вдоль реза позволяют построить следующую газодинамическую модель потока газа и формирования дуги в полости реза.

При истечении газа в затопленное простанство из сопла плазмотрона плазменную струю можно представить состоящей из трех участков: начального, переходного и основного [1]. В области потенциального начального участка протяженностью семь-девять калибров скорость течения и температура газа приблизительно постоянны. За пределами потенциального ядра формируется турбулентный пограничный слой. Распределения скорости и температуры газа в основном участке исследованы достаточно подробно и могут быть рассчитаны с удовлетворительной точностью по методике [1, 2].

При резке металлов, когда электрический столб дуги горит на оси плазменной струи и дуга замыкается на металл в результате процесса шунтирования, течение газа в промежутке между плазмотроном и поверхностью металла и в полости реза определяется рядом сложных явлений. Прежде следует отметить, что на выходе сопла плазмотрона в реальных условиях уже имеет место значительная турбулизация потока и по проведенным исследованиям степень турбулентности на начальном участке составляет 11-14 %, что определяется условиями подачи газа в плазмотрон. Это приводит к тому, что в потенциальном ядре имеют место значительные пульсации и неравномерное распределение скорости потока. Кроме того, присутствие дуги на оси плазменной струи приводит к значительным градиентам температуры газа на этом начальном участке течения.

Результаты проведенных исследований распределения тепловых потерь и тока дуги вдоль реза позволяют построить следующую картину течения газа в процессе плазменной резки. При оптимальном расстоянии плазмотрона до поверхности разрезаемого металла, которое составляет 10-14 мм, начальный участок струи входит в полость реза. Это положение основывается на результатах проведенных исследований, которые показывают, что полученные распределения тепловых потерь и тока дуги вдоль реза имеют характерный максимум в зависимости усредненной плотности тока дуги вдоль реза, приходящийся на I-2 секции. Тогда, как известно [3], зона шунтирования начинается с некоторого сечения начального участка, где возможно возникновение пробоя между дугой и поверхностью полости реза, и простирается в переходном участке до основного участка течения или участка развитого турбулентного течения. Отметим, что при прямой полярности зона шунтирования должна располагаться несколько выше по потоку, чем в случае обратной полярности подключения плазмотрона, так как условия пробоя, когда дуга является для него катодом а следовательно, источником электронов, будут более благоприятны и поэтому требуются меньшие пробивные напряжения.

Таким образом, течение газа в области полости реза рекомендуется разбивать на четыре зоны. Первая зона включает часть начального участка струи от среза сопла до поверхности разрезаемого металла. В этой зоне начинается размывание струи и образование конусообразного турбулентного слоя. Во второй зоне, простирающейся от поверхности разрезаемого металла до сечения, проходящего через конец начального участка, пространственная стабильность дуги нарушается и развивается пробой между столбом дуги и поверхностью полости реза. Этот процесс определяет положение начала зоны шунтирования. Отметим, что с верхней кромки реза развивается второй пограничный слой по поверхности вдоль потока плазмы. Этот слой в конце начального участка смыкается, что определяет сечение начала третьей зоны - зоны перемежаемости, которая простирается до четвертой зоны - зоны развитого турбулентного течения. Из приведенных рисунков распределения тепловых потерь и тока дуги вдоль реза можно определить, что зона шунтирования простирается на 4-8 см.

На основе проведенных исследований можно сделать вывод, что с целью увеличения прорезующей способности плазмотрона должна быть снижена степень турбулентности потока на его начальном участке путем улучшения аэродинамического качества плазмотрона, а в полостиреза необходимо перераспределить и выровнять тепловые потоки вдоль полости реза.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. -М: Наука, 1969. -824 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. -М: Наука, 1969. -742 с.
3. Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы. - Новосибирск: Наука, 1975. -298 с.

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Гладковский В.И., Долин В.В., Сазонов М.И., Черненко В.П., Черненко Н.В.

Для предотвращения фазовых структурных изменений в хрупких металлах при ПМО необходимо обеспечивать локальный нагрев в объеме, ограниченном объемом удаляемого материала. Для определения скорости перемещения границы раздела фаз при ПМО методом АРС решалась задача о фазовом структурном переходе (задача Стефана)[1,2].

Основная трудность при решении задачи Стефана связана с появлением в результате движения межфазной границы нового, ранее принадлежавшего другой фазе узла пространственной сетки в одной из смежных фаз [1]. В [2],[3] был предложен метод устранения указанной трудности для задач теплопроводности путем замены в некоторой области вблизи межфазной границы разрывных физических характеристик "сглаженными" функциями. Размеры области сглаживания выбирались малыми по отношению к характерным размерам соседствующих фаз. Положение границы определялось по изотерме, соответствующей температуре фазового перехода. Очевидно, что сеточная функция распределения температуры, полученная в результате алгоритмической организации подобной процедуры будет непрерывна вместе, по крайней мере, со своей первой производной [4]. На самом же деле она имеет разрыв второго рода на границе между соседними фазами. Поэтому результаты, получаемые таким образом, неточны вблизи границы фазового перехода.

Методы, в которых производится так называемое "явное выделение границы раздела фаз", являются более перспективными в вычислительном отношении. Например, в методе ловли фронта фазового превращения в узел сетки [5] шаг сетки по пространственной координате принимается постоянным, а величина шага меняется так, чтобы граница раздела фаз переместилась на величину шага по пространственной координате. Этот метод применим для одномерных задач с одной подвижной границей. К недостаткам данного метода можно отнести трудности, связанные с переходом к решению многомерных задач, например при помощи локально-одномерных схем.

В [1] предложен метод вспомогательной сетки, свободный от указанных выше недостатков и не налагающий никаких дополнительных ограничений на шаги сетки по пространственным и временной координатам. Метод применим также для решения многофазных и многомерных задач с подвижными границами.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу Стефана на интервале $[0, 1]$:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{K}_n(T_n)\frac{\partial T_n}{\partial x}\right], \qquad n = 1, 2. \tag{1}$$

$$T_2(x,0) = f(x), \qquad T_1(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$\mathcal{K}_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi(t), \quad \mathcal{K}_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=1} = \Psi(t) \tag{3}$$

дополненную граничным условием и уравнением баланса энергии на границе между фазами:

$$T_1(\xi - 0, t) = T_2(\xi + 0, t) \tag{4}$$

$$\mathcal{K}_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi-0} - \mathcal{K}_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi+0} = \lambda\frac{d\xi}{dt}, \tag{5}$$

где ξ – координата границы между фазами, λ – удельная теплота фазового превращения.

Введем пространственно-временную сетку, для чего построим в плоскости (x, t) два семейства прямых, параллельных осям координат:

$$x_i = h(i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, N+1, \quad h = 1/N,$$
$$t_k = t_0 + k\tau, \quad k = 0, 1, 2 \qquad \tau = (t_f - t_0)/k \tag{6}$$

где t_0 - начальный, t_f - конечный момент времени.

Применим к системе уравнений (I) - (5) интегро-интерполяционный метод [6] . В результате получим следующие соотношения:

$$T1 - \check{T}1 = \frac{\tau}{2h}(W1_+ - W1) + \frac{\tau}{2h}(\check{W}1_+ - \check{W}1), \tag{7}$$

$$T2 - \check{T}2 = \frac{\tau}{2h}(W2_+ - W2) + \frac{\tau}{2h}(W2_+ - W2), \tag{8}$$

,

$$W1 = A1\,\frac{T1 - T1_-}{h}, \tag{9}$$

$$W2 = A2\,\frac{T2 - T2_-}{h}, \tag{10}$$

$$W1(\xi - 0, t) - W2(\xi + 0, t) = \lambda(\xi - \check{\xi})/\tau. \tag{11}$$

Здесь, как и ранее, применимы безиндексные обозначения [6]. Выразим температуру $T1$ из уравнения (7) и подставим ее значение в (9):

$$\frac{h}{A1_-}W1 = \check{T}1 + \gamma(W1_+ - W1) + \gamma(\check{W}1_+ - \check{W}1) - \tag{12}$$

$$- \check{T}1_- - \gamma(W1 - W1_-) - \gamma(\check{W}1 - \check{W}1_-),$$

где $\gamma = \tau/2h$. Кроме того, функционалы $A1$ и $A2$ аппроксимируют значения коэффициентов теплопроводности k_1 и k_2 на сетке с погрешностью $O(h^2)$.

Подставляя температуру $T2$ из уравнения (8) в уравнение (10), получим:

$$\frac{h}{A2_-}W2 = \check{T}2 + \gamma(W2_+ - W2) + \tag{13}$$

$$+ \gamma(\check{W}2_+ - \check{W}2) - \check{T}2_- - \gamma(W2 - W2_-) - \gamma(\check{W}2 - \check{W}2_-).$$

Уравнения (12) - (13) можно переписать в другом виде:

$$\gamma W1_+ - \left(\frac{h}{A1_-} - 2\gamma\right)W1 + \gamma W1_- = F1, \tag{14}$$

$$\gamma W2_+ - \left(\frac{h}{A2_-} - 2\gamma\right)W2 - \gamma W2_- = -F2, \tag{15}$$

где $F1 = \check{T}1 - \check{T}1_- + \gamma(\check{W}1_+ - 2\check{W}1 + \check{W}1_-),$

(16)

$$F2=\check{T}2-T2_-+\gamma(\check{W}2_+-2\check{W}2+\check{W}2_-). \qquad (17)$$

Разностные схемы (14) и (15) можно реализовать методом "предиктор"-"корректор" с неявным использованием дискретного аналога закона сохранения энергии. Для нечетных узлов решение находим, например, методом АРС:

$$\overleftarrow{W1}=(\gamma W1_++F1/2)/\left(\frac{h}{2A1_-}+\gamma\right), \qquad (18)$$

$$\overrightarrow{W1}=(\gamma W1_-+F1/2)/\left(\frac{h}{2A1_-}+\gamma\right), \qquad (19)$$

$$\overrightarrow{W2}=(\gamma W2_++F2/2)/\left(\frac{h}{2A2_-}+\gamma\right), \qquad (20)$$

$$\overleftarrow{W2}=(\gamma W2_-+F2/2)/\left(\frac{h}{2A2_-}+\gamma\right). \qquad (21)$$

Окончательный результат на верхнем слое по времени для нечетных узлов находим по формулам

$$W1=(\overrightarrow{W1}+\overleftarrow{W1})/2, \quad W2=(\overrightarrow{W2}+\overleftarrow{W2})/2. \qquad (22)$$

Решение для четных узлов находим явным образом по формулам, полученным из неявных разностных схем:

$$W1=(\gamma W1_++F1+\gamma W1_-)/\left(\frac{h}{2A1_-}+2\gamma\right), \qquad (23)$$

$$W2=(\gamma W2_++F2-\gamma W2_-)/\left(\frac{h}{2A2_-}+2\gamma\right). \qquad (24)$$

Используя известное распределение потоков и температур на каждом предшествующем слое по времени и положении $\check{\xi}$ границы между фазами в этот же предшествующий момент времени, из уравнения баланса энергии (11) можно было бы определить положение ξ подвижной границы в последующий момент времени:

$$\xi=\check{\xi}+\frac{\tau}{\lambda}\left(W1_\xi-W2_\xi\right). \qquad (25)$$

Однако, то обстоятельство, что потоки $W1$ и $W2$ в точке $x=\xi$, вообще говоря неизвестны, препятствует этому.

Используем методику, предложенную в работе [6]. Для этого введем вспомогательную сетку в той фазе, в которой произошло появление нового регулярного узла. В этом случае должно выполняться следующее условие:

$$x_i < \check{\xi} < x_{i+1}. \qquad (26)$$

Узлы вспомогательной сетки выбираем следующим образом: I-й узел совпадает с новым положением ξ подвижной границы, 2-й совпадает с старым ее положением $\check{\xi}$, 3-й отстоит на расстоянии $\delta=|\xi-\check{\xi}|$ от 2-го узла в сторону, противоположную движению межфазной границы.

Теперь запишем разностную аппроксимацию уравнения теплопроводности во втором узле вспомогательной сетки:

$$\gamma' W1_{-\xi} - \left(\frac{\delta}{A1_-} + 2\gamma'\right) W1_{\check{\xi}} + \gamma' W1_{\xi} = -F1, \qquad (27)$$

$$\gamma' W2_{-\delta} - \left(\frac{\delta}{A2} + 2\gamma'\right) W2_{\check{\xi}} + \gamma' W2_{\xi} = -F2, \qquad (28)$$

где $\gamma' = \frac{\tau}{2\delta}$. Таким образом, если потоки $W1$ и $W2$ в третьем и во втором узлах будут найдены, то из уравнений (27) и (28) можно будет определить потоки $W_{1\xi}$ и $W_{2\xi}$, что в свою очередь даст возможным определить новое положение ξ из уравнения (25). Очевидно, что потоки во втором и в третьем узлах можно найти используя какую-либо процедуру численного интерполирования, например, процедуру интерполяции по Лагранжу, как это и сделано в работе [6]. При этом в качестве базисных точек интерполяции были выбраны узлы основной сетки.

Очевидно, что если $k = k(T)$, то для нахождения соответсвующих величин необходимо вводить, как и ранее, какой-либо итерационный процесс. Предпочтительней других из-за быстроты сходимости выглядит ньютоновский итерационный процесс.

Для проверки работоспособности изложенного выше алгоритма с методической целью решена следующая одномерная задача, имеющая аналитическое решение в случае постоянства коэффициентов теплопроводности k_1 и k_2 в пределах каждой из фаз [7]:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k_n(T_n)\frac{\partial T_n}{\partial x}\right], \quad n = 1, 2, \qquad (29)$$

$$T_2(x, 0) = 0, \qquad (30)$$

$$T_1(0,t)=1, \qquad T_2(\infty, t)=0. \tag{31}$$

Кроме того, в общем случае:

$$T_1(\xi-0,\ t)=T_{12}, \qquad T_2(\xi+0,\ t)=T_{21} \tag{32}$$

и

$$k_1(T_{12})\frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi-0}-k_2(T_{21})\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0}=\lambda\frac{\xi}{t}. \tag{33}$$

Последнее уравнение представляет собой баланс энергии на подвижной границе T_{12} и T_{21} – равномерные значения температуры на межфазной границе в первой и во второй фазах соответсвенно.

В том случае, если коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2 постоянны в пределах каждой из фаз, система уравнений (29) – (33) имеет аналитическое решение:

$$T1(x,t)=(T_{12}-1)\,erf\left(\frac{x}{2\sqrt{k_1 t}}\right)/erf\left(\frac{\beta}{2\sqrt{k_1 t}}\right), \tag{34}$$

$$T2(x,t)=T_{21}\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right)/erfc\left(\frac{\beta}{2\sqrt{k_2 t}}\right), \tag{35}$$

$$\xi(t)=\beta(t). \tag{36}$$

Параметр является корнем трансцендентного уравнения:

$$\sqrt{k_1}(1-T_{12})\exp\left(-\frac{\beta^2}{4k_1}\right)/erf\left(\frac{\beta}{2\sqrt{k_1}}\right)-$$

$$-\sqrt{k_2}\,T_{21}\exp\left(-\frac{\beta}{4k_2}\right)/erfc\left(\frac{\beta}{2\sqrt{k_2}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\beta\,(T_{12}-T_{21}). \tag{37}$$

Решение задачи (29) – (33) производилось численно методом АРС, изложенным применительно к задаче Стефана в этом параграфе. Расхождение численного и аналитического решения оказалось небольшим – не превосходило 7–8 %. Следовательно, метод АРС в сочетании с методом сетки может быть успешно применен для решения задачи Стефана о фазовом структурном переходе при ПМО [2].

Литература

1. Таран М.Д., Фаворский А.П. Численное решение двумерного уравнения теплопроводности с сильно меняющимися коэффициентами// Вычислительная математика и математическая физика. - 1979, т. 19, №4. -С. 1069-1073.
2. Гладковский В.И., Каролинский В.Г. Применение ассиметричных разностных схем для решения задачи Стефана о фазовых структурных превращениях// Скоростные процессы при тепловом и механическом воздействии на металлические материалы: Тез. докл. науч.-тех. конф. -Минск: БелНИИНТИ, 1984. -С. 93-94.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. -М.: Высшая школа, 1978. -328 с.
4. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности -М.: Наука, 1975. - 227 с.
5. Гухман А.А. Физические основы теплопередачи. -Л. -М.: Энергоиздат, 1934. - 314 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1979. - 656 с.
7. Карслоу Г. , Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ (РАСТЯЖЕНИЯ) УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С ПРОДОЛЬНЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А.Е.Крушевский, А.З.Севенюк

В статье [I] построена структура решения задачи о растяжении (сжатии) упругого параллелепипеда с цилиндрической полостью в узком классе степенных рядов. При этом предполагалось, что поперечные перемещения зависили лишь от двух координат, от одной из поперечных в направлении перемещения и продольной. Для построения структуры решения указанной задачи в первом приближении понадобились степенные ряды до 22-й степени включительно.

В данной статье снимается предположение о зависимости поперечных перемещений от двух координат, и структура решения строится в полном классе степенных рядов:

$$u=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m+1} y^{2n} U(z),$$

$$v=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m} y^{2n+1} V(z),$$

$$w=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m} y^{2n} W(z)$$

где v, u - поперечные перемещения, w - продольные перемещения.

В частности, для первого приближения построения структуры понадобились степенные ряды до 9-ой степени включительно. Это позволяет облегчить задачу построения структуры решения для первого приближения. Задача свелась к составлению 6-и уравнений связей, из которых 5 уравнений представляют собой равенства нулю касательных напряжений $\tau_{zz}=\frac{x}{R}\tau_{xz}+\frac{y}{R}\tau_{yz}$ на цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$ и одно уравнение - равенство нулю касательных напряжений τ_{yz} на грани $y=\pm\frac{\ell}{2}$. Например, уравнение обращения τ_{zz} в нуль при x^8 и x^4 записывается в виде:

$$\tau_{rz}\big|_{x^4}=0,$$

$$d_2 B_3\left[\frac{79R^2}{21\cdot 24}-\frac{106(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]-d_2 b^4\left[\frac{5R^2}{28}-\frac{124(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]+$$
$$+d_2 a_4\left[\frac{45R^4}{12\cdot 21}-\frac{164(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]+d_2 a_5\left[\frac{5R^2}{72}-\frac{34(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]-$$
$$-d_2 c_1\left[\frac{2R^2}{21}-\frac{96(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]+d_2 C_2\left[\frac{3R^2}{7}-\frac{336(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right]=0$$

$$\tau_{rz}\big|_{x^6}=0,$$

$$d_2 a_2\left[\frac{6(\gamma-1)}{\gamma^2 d_2^2}-\frac{R^2}{10}\right]-d_2 B_1\left[\frac{6(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2}-\frac{R^2}{10}\right]+d_2 B_3\left[-\frac{a^2R^2}{48}+\frac{27b^2R^2}{80}-\right.$$
$$-\frac{467R^4}{1260}+\frac{(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2}+\frac{2(131\gamma-126)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}-\frac{849(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2}+\left.\frac{24(\gamma-1)(\gamma-5)}{5\gamma_2 d_2^4}\right]+$$
$$+d_2 a_5\left[\frac{77a^2R^2}{240}+\frac{b^2R^2}{240}-\frac{181R^4}{630}+\frac{169(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2}-\frac{(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2}+\right.$$
$$+\left.\frac{(29\gamma-28)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}+\frac{24(7\gamma-15)(\gamma-5)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right]+d_2 b^4\left[\frac{a^2R^2}{24}-\frac{b^2R^2}{20}+\frac{24R^4}{35}-\right.$$
$$-\frac{(\gamma-1)a^2}{2\gamma_2 d_2^2}+\frac{9(\gamma-1)b^2}{5\gamma_2 d_2^2}-\frac{4(63\gamma-59)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}-\left.\frac{12\gamma(13\gamma-28)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right]+$$
$$+d_2 a_4\left[\frac{7a^2R^2}{30}+\frac{b^2R^2}{40}-\frac{11R^4}{210}-\frac{(\gamma-1)a^2}{\gamma_2 d_2^2}-\frac{3(\gamma-1)b^2}{10\gamma_2 d_2^2}+\right.$$
$$+\left.\frac{(329\gamma-328)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}-\frac{6\gamma(29\gamma-54)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right]+18d_2 A_2\left[R^2-\frac{140(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2}\right]+$$
$$+d_2 C_0\left[\frac{3R^2}{20}-\frac{21(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2}\right]+d_2 C_1\left[\frac{31a^2R^2}{240}+\frac{5b^2R^2}{12}+\frac{2R^4}{15}+\right.$$
$$+\frac{21(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2}-\frac{253(\gamma-1)b^2}{10\gamma_2 d_2^2}-\frac{(97\gamma-122)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}-\left.\frac{12(\gamma-1)(7\gamma+10)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right]+$$
$$+d_2 C_2\left[-\frac{a^2R^2}{15}+\frac{b^2R^2}{16}-\frac{4R^4}{15}-\frac{(\gamma-1)a^2}{\gamma_2 d_2^2}+\frac{81(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2}+\right.$$
$$+\left.\frac{(577\gamma-602)R^2}{5\gamma_2 d_2^2}+\frac{12(\gamma-1)(7\gamma+10)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right]=0$$

В этих уравнениях $a_2, a_4, a_5, b_1, b_3, b_4, c_0, c_1, c_2, A$ – искомые функции, зависящие от времени и продольной координаты z,

$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_1 = \gamma - 2$, ν – коэффициент Пуассона.

$d_z = \frac{d}{dz}$ – оператор производной по z.

Остальные четыре уравнения связей не выписываем вследствие их громоздкости. Что касается нормальных напряжений σ_x на гранях $x = \pm\frac{a}{2}$, нормальных напряжений σ_y на гранях $y = \pm\frac{b}{2}$, радиальных напряжений σ_r на цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, а также касательных поперечных напряжений $\tau_{xy}, \tau_{r\varphi}$ на соответствующих поверхностях, то их обращений в нуль выполнено за счет исключения обобщенных перемещений из уравнений связей.

Таким образом, имеем шесть уравнений связей с десятью неизвестными функциями. Для замкнутости следует привлечь вариационное уравнение равновесия элементарного слоя [2]:

$$\frac{d}{dz}\int_F (T\cdot\vec{e}_z)\,\delta\vec{u}\,dF - \int_F T\,\delta E\,dF + \int_F\left(\vec{K} - \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\delta\vec{u} + \oint \frac{\vec{F}_n\,\delta\vec{u}\,ds}{\sqrt{1-n_z^2}} = 0$$

где T – тензор напряжений; δE – тензор возможной деформации; $\delta\vec{u} = \vec{e}_1\delta u + \vec{e}_2\delta v + \vec{e}_z\delta w$ – вектор возможных перемещений; F – площадь поперечного сечения; ρ – плотность материала; S – контурная координата; $\vec{n} = \vec{e}_x n_x + \vec{e}_y n_y + \vec{e}_z n_z$ вектор внешней нормали к поверхности тела.

В качестве первого приближения можно оставить 7 неизвестных функций $a_2, a_4, a_5, b_1, b_3, b_4, c_0$, для определения которых имеем шесть указанных связей и одно вариационное уравнение, составленное на возможном перемещении δw.

Литература

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Построение структуры решения задачи определения спектра частот продольных колебаний консольного стержня прямоугольного сечения с круглым отверстием// Теоретическая и прикладная механика: Респ.межвед.сб./ Минск. -1981. -Вып.8. -С. 3-6.
2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. - Мн.: Наука и техника, 1967. -228 с.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

А.Е.Крушевский, А.З.Севенюк

Как известно, наиболее трудоемкой задачей в теории упругости является выполнение краевых условий на поверхности тела. Обычно вначале строят решение, удовлетворяющее уравнениям равновесия Коши внутри тела, а затем каким-нибудь приближенным способом выполняют краевые условия [1]. Другие авторы, хотя и выполняют точно равновесие внутри, но удовлетворяют лишь приближенно уравнениям неразрывности и краевым условиям [2]. В настоящей статье строится дифференциальная структура решения задачи о равновесии цилиндра при точном выполнении краевых условий на боковой поверхности цилиндра. Переменные коэффициенты структуры представляют собой функции от осевой координаты z и подлежат определению из уравнения равновесия внутри и на торцах цилиндра [3].

Запишем ряды перемещений

$$u=\sum_{m=0} r^m U_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi),$$

$$v=\sum_{m=0} r^m V_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(V_{mnc}\cos n\varphi+V_{mns}\sin n\varphi),$$

$$w=\sum_{m=0} r^m W_{m0}+\sum_{m=0}\sum_{n=1} r^m(W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi).$$

Из условия равенства нулю напряжений на боковой поверхности $\tau_r=\tau_{rz}=\tau_{r\varphi}=0$ при $r=R$ получаем следующую систему уравнений связей.

1) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{m0}+mW_{m0})=0$

2) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{mnc}+mW_{mnc})=0$

3) $\sum\limits_{m=0} R^{m-1}(RU'_{mns}+mW_{mns})=0$

4) $\sum\limits_{m=0} (m-1)R^m V_{m0}=0$

5) $\sum\limits_{m=0} \left[(m-1) R^m V_{mnc} - \frac{mnR^{m-1}}{dz} W_{mns} \right] = 0$

6) $\sum\limits_{m=0} \left[(m-1) R^m V_{mns} + \frac{mnR^{m-1}}{dz} W_{mnc} \right] = 0$

7) $\sum\limits_{m=0} \left[\gamma m R^{m-1} U_{mo} + \frac{\gamma_2}{dz} R^m \left(d_z - \frac{m}{R^2}\right) W_{mo} \right] = 0$

8) $$\sum_{m=0} \left\{ \gamma m R^{m-1} U_{mnc} - \gamma_2 \frac{mR^{m-2}}{dz} W_{mnc} + \gamma_2 \left[\frac{mnR^{m-2}}{dz} W_{mnc} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + mR^{m-1} W_{mns} \right] n + \gamma_2 R^m W_{mnc} \right\} = 0$$

9) $$\sum_{m=0} \left\{ \gamma m R^{m-1} U_{mns} + \frac{\gamma_2 mn^2}{dz} R^{m-2} W_{mns} - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma_2 mR^{m-2}}{dz} W_{mns} - \gamma_2 mnR^{m-1} V_{mnc} + \gamma_2 R^m d_z W_{mns} \right\} = 0$$

где R - радиус цилиндра,

$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2 = \gamma - 2$,

ν - коэффициент Пуассона.

U_{mo}, V_{mo}, W_{mo}, U_{mnc}, V_{mnc}, W_{mnc}, U_{mns}, V_{mns},

W_{mns} - неизвестные функции от координаты „ z " .

$d_z = \frac{d}{dz}$ - оператор производной по „ z " .

В результате исключения обобщенных перемещений
U_{oo}, U_{onc}, U_{ons}, V_{oo}, V_{ons}, V_{onc}, W_{oo}, W_{onc}, W_{ons}
получим следующие выражения упругих перемещений и напряжений.

$$u=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big[(z^m-R^m)(U_{mo}+U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi)-$$
$$-\frac{mR^{m-1}}{d_2}(W_{mo}+W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi)\Big]$$

$$v=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{[z^m+(m-1)R^m][V_{mo}+V_{mnc}\cos n\varphi+V_{mns}\sin n\varphi]-$$
$$-\frac{mnR^{m-1}}{d_2}(W_{mns}\cos n\varphi-W_{mnc}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\Big[\frac{mR^{m-2}}{d_2^2}(1-n^2)+(z^m-R^m)\Big](W_{mo}+W_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+W_{mns}\sin n\varphi)+\frac{mn^2R^{m-2}}{d_2^2}W_{mo}+\frac{mnR^{m-1}}{d_2}(V_{mnc}\sin n\varphi-$$
$$-V_{mns}\cos n\varphi)-\frac{\gamma m}{\gamma_2 d_2}R^{m-1}(U_{mo}+U_{mnc}\cos n\varphi+U_{mns}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$\tau_{rz}=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{(z^m-R^m)(U'_{mo}+U'_{mnc}\cos n\varphi+U'_{mns}\sin n\varphi)+$$
$$+m(z^{m-1}-R^{m-1})(W_{mo}+W_{mnc}\cos n\varphi+W_{mns}\sin n\varphi)\Big\}$$

$$\tau_{z\varphi}=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\frac{(m-1)}{z}(z^m-R^m)(V_{mo}+V_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+V_{mns}\sin n\varphi)-\frac{n}{z}(z^m-R^m)(U_{mnc}\sin n\varphi-U_{mns}\cos n\varphi)\Big\}$$

$$\sigma_z=G\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Big\{\gamma m(z^{m-1}-R^{m-1})(U_{mo}+U_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+U_{mns}\sin n\varphi)+\gamma_4\Big[\frac{(z^m-R^m)}{z}(U_{mo}+U_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+U_{mns}\sin n\varphi)+\frac{z^m+(m-1)R^m}{z}(V_{mns}\cos n\varphi-$$
$$-V_{mnc}\sin n\varphi)n+mnR^{m-1}(V_{mnc}\sin n\varphi-$$
$$-V_{mns}\cos n\varphi)-\frac{mR^{m-1}}{zd_2}(W_{mo}+W_{mnc}\cos n\varphi+$$
$$+W_{mns}\sin n\varphi)+\frac{mn^2R^{m-1}}{zd_2}(W_{mns}\sin n\varphi+$$

$$+ W_{mnc}\cos n\varphi) + \Big[\frac{mR^{m-2}}{d_2}(1+n^2) + d_2(z^m - P^m)\Big](W_{m0} +$$

$$+ W_{mnc}\cos n\varphi + W_{mns}\sin n\varphi)\Big] + \frac{mn^2R^{m-2}}{d_2} W_{m0}\Big\}$$

Полученные формулы для напряжений τ_{rz}, $\tau_{r\varphi}$ и τ_r показывают, что они равны нулю при $r=R$.

При этом напряженно-деформированное состояние разбивается на ряд отдельных состояний: осесимметричное сжатие (растяжение), кручение, неосесимметричное состояние при растяжении (сжатии); изгиб в двух плоскостях и др.

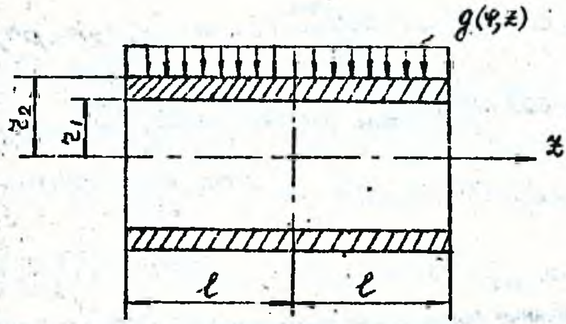
Литература

1. Лурье А.Е. Пространственные задачи теории упругости. -М.: Гостехиздат, 1955, -49с.
2. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. -М.: Машгиз, 1958, -Том 2. 974с.
3. Севенюк А.З. Определение спектра частот продольных колебаний упругого стержня с квадратным сечением при условии точного выполнения отсутствия нагрузки на боковых гранях// Теоретическая прикладная механика: Респ. межведом. сб./ Минск.-1979. -Вып.6. -С.15-21.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ "НИЖНЕЙ" ОЦЕНКИ ПО ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

В.Л.Мартиновский, Б.Ф.Власов

Рассмотрим короткий цилиндр, нагруженный по боковым поверхностям симметричной по длине (ℓ) и произвольной по угловой координате (φ) нагрузкой. Торцы цилиндра свободны.



Решение поставленной задачи будем выполнять в напряжениях. Для построения нижней оценки необходимо точно удовлетворить уравнениям равновесия и условиям на поверхности. Остальные уравнения теории упругости могут быть выполнены в вариационной форме.

Компоненты тензора напряжений принимаем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r(r,\varphi,z) = \sigma_r(r)\cos m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\sigma_\varphi(r,\varphi,z) = \sigma_\varphi(r)\cos m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\sigma_z(r,\varphi,z) = \sigma_z(r)\cos m\varphi\left(\cos\lambda_n z - \cos n\pi\right),\\
&\tau_{r\varphi}(r,\varphi,z) = \tau_{r\varphi}(r)\sin m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\tau_{\varphi z}(r,\varphi,z) = \tau_{\varphi z}(r)\sin m\varphi \sin\lambda_n z,\\
&\tau_{zr}(r,\varphi,z) = \tau_{zr}(r)\cos m\varphi \sin\lambda_n z.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$; $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Проведем разделение переменных в уравнениях равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0$$

тогда, согласно (I), получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_r'(r) + \frac{1}{r}\sigma_r(r) - \frac{1}{r}\sigma_\varphi(r) + \frac{m}{r}\tau_{r\varphi}'(r) + \lambda_n r \tau_{zr}'(r) = 0,\\
&-\frac{m}{r}\sigma_\varphi(r) + \tau_{r\varphi}''(r) - \frac{2}{r}\tau_{r\varphi}'(r) + \lambda_n r \tau_{\varphi z}'(r) = 0, \qquad (3)\\
&r\tau_{zr}''(r) + 2\tau_{zr}'(r) + m\tau_{\varphi z}'(r) - \lambda_n \sigma_z(r) = 0.
\end{aligned}$$

В формулах для перемещений в интегро-дифференциальной форме [I]:

$$U_r(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(r\int \gamma_{r\varphi} d\varphi + \iint \gamma_{r\varphi} dr\, d\varphi + \int \gamma_{zr} dz - \iint \frac{1}{r}\gamma_{zr} dr\, dz - r\iint \frac{\partial \gamma_{\varphi z}}{\partial r} d\varphi\, dz + \iiint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z}\, dr\, d\varphi\, dz\Big) + \Pi_1,$$

$$U_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(\int \gamma_{\varphi z} dz + \iint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z} dr\, dz + \int \gamma_{r\varphi} dr - \iint \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{zr}}{\partial \varphi} dr\, dz\Big) + \Pi_2, \qquad (4)$$

$$U_z(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(r\int \frac{1}{r}\gamma_{zr} dr + r\int \gamma_{\varphi z} d\varphi - r\iint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z} dr\, d\varphi - r\iint \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial z} dr\, d\varphi\Big) + \Pi_3,$$

где Π_1, Π_2, Π_3 – произвольные функции координат, выразим u_r, u_φ, u_z через напряжения по закону Гука

$$u_r(r,\varphi,z) = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\left[\lambda_n r \tau'_{r\varphi} - \lambda_n \tau_{r\varphi} - m r \tau'_{zr} + m\tau_{zr} - r^2\tau''_{\varphi z} - r\tau'_{\varphi z} + \tau_{\varphi z}\right] + \Pi_1,$$

$$u_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{\sin m\varphi \cos\lambda_n z}{2G\lambda_n}\left[-r\tau'_{\varphi z} - \tau_{\varphi z} + \lambda_n\tau_{r\varphi} - m\tau_{zr}\right] + \Pi_2, \quad (5)$$

$$u_z(r,\varphi,z) = \frac{\cos m\varphi \sin\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\left[m\lambda_n r\tau_{zr} - \lambda_n r^2\tau'_{\varphi z} + \lambda_n r\tau_{\varphi z} - \lambda_n^2 r\tau_{r\varphi}\right] + \Pi_3.$$

По формулам Коши находим линейные деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\left[-\lambda_n(r\tau''_{r\varphi} + 2\tau'_{r\varphi}) - m r\tau''_{zr} - r^2\tau'''_{\varphi z} + 3r\tau''_{\varphi z}\right] + \bar{\Pi}_1,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\left[-r\tau''_{\varphi z} - (m^2+1)\tau'_{\varphi z} - (m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{\varphi z} - \lambda_n\tau'_{r\varphi} + \lambda_n(m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{r\varphi} - m\tau'_{zr} - m(m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{zr}\right] + \bar{\Pi}_2, \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\left[m\lambda_n^2 r\tau_{zr} - \lambda_n^2 r^2\tau'_{\varphi z} + \lambda_n^2 r\tau_{\varphi z} - \lambda_n^3 r\tau_{r\varphi}\right] + \bar{\Pi}_3.$$

Вариационные уравнения закона Гука имеют вид:

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_r-(\lambda\theta+2G\varepsilon_r)\right]\delta\varepsilon_r\,d\Omega=0,$$

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_\varphi-(\lambda\theta+2G\varepsilon_\varphi)\right]\delta\varepsilon_\varphi\,d\Omega=0, \qquad (7)$$

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_z-(\lambda\theta+2G\varepsilon_z)\right]\delta\varepsilon_z\,d\Omega=0,$$

где $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$, $\theta=\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z$

Преобразовав выражения в круглых скобках (7) и состанив вариации $\delta\varepsilon_r, \delta\varepsilon_\varphi, \delta\varepsilon_z$, получим

$$\sigma_r-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\lambda_n r(1-\nu)\tau''_{r\varphi}+\lambda_n(2-\nu)\tau'_{r\varphi}+\nu\Big[\lambda_n(1-m^2)\frac{1}{r}+$$
$$+\lambda_n r^3\Big]\tau_{r\varphi}+(1-\nu)r^2\tau'''_{\varphi z}+(3-2\nu)r\tau''_{\varphi z}+\nu\big[(m^2+1)+$$
$$+\lambda_n^2 r^2\big]\tau'_{\varphi z}+\nu\Big[(m^2-1)\frac{1}{r}+\lambda_n^2 r\Big]\tau_{\varphi z}+m(1-\nu)r\tau''_{zr}+$$
$$+\nu m\tau'_{zr}+\nu\tau_{zr}\Big\}=0,$$

$$\sigma_\varphi-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\nu\lambda_n r\tau''_{r\varphi}+\lambda_n(1+\nu)\tau'_{r\varphi}+ \qquad (8)$$
$$+\Big[(3\nu-1)(m^2-1)\frac{\lambda_n}{r}+\nu\lambda_n^3 r\Big]\tau_{r\varphi}+\nu r^2\tau'''_{\varphi z}+(1+2\nu)r\tau''_{\varphi z}+$$
$$+\big[(1-\nu)(m^2+1)+\nu\lambda_n^2 r^2\big]\tau'_{\varphi z}+\Big[(1-\nu)(m^2-1)\frac{1}{r}-\nu\lambda_n^2 r\Big]\tau_{\varphi z}+$$
$$+\nu m r\tau''_{zr}+m(1-\nu)\tau'_{zr}+\Big[(1-\nu)m(m^2-1)\frac{1}{r}-\nu m\lambda_n^2 r\Big]\tau_{zr}\Big\}=0,$$

$$\sigma_z-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\nu\lambda_n r\tau''_{r\varphi}+3\lambda_n\nu\tau'_{r\varphi}+\Big[\lambda_n^3(1-\nu)r-$$

$$-\nu(m^2+1)\lambda_n\frac{1}{r}\Big]\tau_{r\varphi}+\nu r^2\tau_{\varphi z}'''+4\nu r\tau_{\varphi z}''+\Big[(1-\nu)\lambda_n^2 r^2+$$

$$+\nu(m^2+1)\Big]\tau_{\varphi z}'-\Big[(1-\nu)\lambda_n^2 r-\nu(m^2-1)\frac{1}{r}\Big]\tau_{\varphi z}+\nu m r\tau_{zr}''+$$

$$+\nu m\tau_{zr}'-\Big[(1-\nu)m\lambda_n^2 r-\nu m(m^2-1)\frac{1}{r}\Big]\tau_{zr}\Big\}=0.$$

Для отыскания напряжений необходимо интегрировать уравнения (6) совместно с уравнениями (3) при выполнении условий на поверхности.

Такая задача является достаточно сложной, так как трудно подобрать интегрируемую комбинацию, для решения поставленной задачи.

Л и т е р а т у р а

I. Власов Б.Ф., Мартиновский В.Л. Вывод интегро-дифференциальных уравнений неразрывности деформаций второго вида в цилиндрической системе координат из вариационного принципа Кастильяно/ Моск. инж.-строит. ин-т -М., 1986. -8с. Деп. в ВИНИТИ, №4407-В.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЕ ОСНОВЫ УПРУГИХ ЭНЕРГОПЕРЕХОДОВ

А.М.Трусь

Введение. Согласно закону сохранения энергии в любом свободном упругодеформированном твердом теле максимальная потенциальная энергия (работа деформации) всегда будет постоянной (если пренебречь энергопотерями на трение), что схематически показано на рисI а, б.

$$U_p = U_c = A_p = A_c = \frac{F_p X_p}{2} = \frac{F_c X_c}{2} = \frac{k_p X_p^2}{2} = \frac{k_c X_c^2}{2} = \frac{F_c^2}{2k_c} = const \quad (I)$$

где U_p, U_c - максимальная потенциальная энергия растяжения и сжатия;

A_p, A_c - работа деформации;

F_p, F_c - восстанавливающие силы;

X_p, X_c - деформации;

k_p, k_c - коэффициенты жесткости, упругости.

При этом, для исключения влияния реальной структурной неоднородности, несплошности и анизотропии материала на распределение упругой энергии, в объеме твердого тела используется упрощение Коши (I), согласно которому реальной структурой тела пренебрегают, считая его однородным, сплошным и изотропным. Кроме того полагают, что оно строго подчиняется закономерности Р.Гука (2) при растяжении и сжатии

$$F_p = -k_p X_p \quad (2)$$

$$F_c = -k_c X_c \quad (3)$$

Приведенная естественно-научная картина упругодеформированного твердого тела является господствующей в современной науке и технике, но она не объясняет механики сброса упругой энергии при аномально малых напряжениях, а также природы возникновения и развития усталостных трещин. Для этого используется явление концентрации напряжений Инглиса (3) на естественных и искусственных дефектах структуры, которое также не разрешает имеющихся противоречий, особенно для пластичных материалов. Кроме того существует нерешенная проблема прямого использования упругой энергии твердого тела для производства полезной работы требуемой мощности.

Уместно заметить, что создание боевого лука в доисторические времена (4), явилось блестящим интуитивным решением подобной задачи, а именно, прямого твердотельного преобразования упругой энергии в полезную работу большой мощности. Однако, судьбе было угодно переориентировать научно-технический прогресс с использования упругих твердотельных энергопреобразователей на использование жестких многозвенных механических систем, соединенных упругими, жесткими и шарнирными связями между собой. Это направление стало господствующим, что, в конечном итоге, привело к чрезмерному усложнению статики, кинематики и динамики современных технических устройств, повышенной их материалоемкости и энергорасточительности. В настоящее время стало очевидным, что дальнейшее продолжение этого пути развития науки и техники тупиковое, особенно в условиях нарастания исчерпания невосполнимых природных ресурсов, взрывного роста численности населения и увеличивающихся его потребностей.

Главной целью настоящей работы является доказательство того, что:

I. Определенные виды несплошностей в твердых телах являются чрезвычайно эффективными прямыми преобразователями упругой энергии необратимую работу предельной мощности;

2. Использование подобных энергопреобразующих несплошностей чрезвычайно перспективно в научном и прикладном плане.

Чтобы решить эти задачи необходимо существенно пересмотреть закономерность Гука и предложение Коши, сближая их с реальной структурой твердых тел. В частности необходимо:

I. Допустить, что в пределах линейности закономерность Гука может иметь излом;

2. Допустить, что в пределах сплошности Коши возможна односторонняя упругоассиметричная несплошность;

3. Допущения подтвердить опытом и расчетом.

<u>Основы теории.</u> Примем для исследования физическую модель твердого упругодеформированного тела соответствующую упрощениям Коши, но введем в него одну несплошность, как показано схематически на рис. I. Пусть эта физическая модель строго соответсвует математической модели, предложенной Р.Гуком.

Тогда при деформации возможны два случая поведения этой несплошности.

Первый случай. Единичная несплошность объемна и одинаково деформируется в процессе растяжения и сжатия. По Инглису она является концентратором напряжений в определенных своих точках, что схематически показано эпюрой " σ " на рис. Iв. Опытом доказано, что σ_k не может превышать предела текучести σ_y, а следовательно усталостные трещины, возникающие на несплошностях, должны иметь пластический излом, тогда как в действительности он хрупкий, независимо от пластичности материала. Это противоречие не позволяет однозначно объяснить природу усталостных разрушений лишь концентрацией напряжений, на чем настаивают многие авторы. Очевидно существуют еще какие-то неизвестные науке механизмы.

На указанной несплошности отсутствуют какие либо предпосылки и особые условия для необратимого изменения упругой энергии и совершения работы при свободных колебательных движениях тела относительно положения равновесия. При этом,потенциальная и кинетическая энергия тела изменяется; как показано на графике рис. Iг.

Рассмотренный вид несплошности концентрирует напряжения (потенциальную энергию) в отдельных точках, но в пределах упругости не может преобразовывать упруг.ю энергию в необратимую работу,в силу своей энергосимметрии.

Второй случай. Единичная несплошность пусть будет трещиновидна, как показано схематически на рис. 2а, т.е. односторонняя (энергоасимметричная).

При сжатии тела она не оказывает никакого влияния на его жесткость, а при растяжении, за счет раскрытия резко изменяет ее величину, что схематически показано на рис. 2а и графически на рис. 2б. На линейности Гука появляется излом.

Как следует из графика, в силу закона сохранения, потенциальная энергия растяжения U_p будет равна работе сжатия A_c. Однако, из графика видно, что потенциальная упругая энергия сжатия составит незначительную часть всей работы сжатия, р.вной U_p

$$U_p = A_c > U_c \tag{5}$$

Это неравенство потенциальных упругих энергий растяжения и сжатия показывает, что на трещиновидной несплошности совершается необратимая работа A_H свободного тела над собой.

$$A_H = U_p - U_c = \frac{F_p x_p}{2} - \frac{F_c x_c}{2} = \frac{F_p x_p}{2} - \frac{F_p \frac{x_c}{x_p} x_c}{2} = U_p\left(1 - \frac{x_c^2}{x_p^2}\right) = U_p\left(1 - \frac{K_p}{K_c}\right) \quad (6)$$

Исследуем полученную закономерность. При $K_p = K_c$, $U_p = U_c$, $A_H = 0$, т.е. подтверждается первый случай, когда несплошность в процессе деформации не изменяет своей геометрической формы необратимая работа не производится в силу ее двусторонности (энергетической симметричности).

Если $K_p < K_c$, то $U_p = U_c$, следовательно $A_H \neq 0$.

Приняв во внимание, что K_p можно задавать конструктивно вплоть до значений близких к нулю $K_p \to 0$, а K_c является величиной зависящей от модуля упругости, то при $K_p \to 0$, а $K_c \to const$, $A_H \to A_p$, т.е. почти вся упругая энергия подобного твердого тела может быть преобразована в работу над односторонней (энергетически ассимметричной) несплошностью вблизи состояния равновесия.

Если принять во внимание огромную скорость распространения волны упругой деформации в свободном упругодеформированном твердом теле, то становится очевидным, что на подобном упругом переходе можно получать необратимую работу очень большой мощности (в виде самоудара)

$$N = F_c V \quad (7)$$

Необратимая работа A_H совершается в устье неплошности, как показано схематически на рис. 2а точкой Z.

Открытие этого энергоперехода коренным образом изменяет естественно-научные представления об упругой энергетике твердых тел и является теоретической основой создания принципиально нового направления в механике твердого упругого тела.

Инженерные основы. Под инженерными основами, в данном случае, подразумеваются конструктивно-проектировочные приемы использования энергоасимметричных несплошностей при создании технических устройств, их массовое производство и обеспечение выгодных показателей энерго-материалоемкости, производительности, надежности, долговечности и других параметров, по сравнению с традиционными.

Чтобы показать практическую эффективность предложенной теории в инженерном проектировании, промышленном производстве и технической эксплуатации воспользуемся конкретным случаем. Пусть имеется стальной круглый трубчатый (полый) стержень, который необходимо преобразовать в упругий энергоасимметричный преобразователь. Пусть он, в соответствии с упрощениями Коши, будет сплошным, однородным, изотропным. Выполним в нем одну винтообразную, трещиновидную несплошность большой длины, как показано на рис. 2а.

При сжатии этого стержня заданная несплошность не влияет на его жесткость

$$K_c = \frac{EA}{\ell} \qquad (8)$$

где E - модуль упругости; A - площадь поперечного сечения; ℓ - длина стержня.

При его растяжении жесткость будет иной (5)

$$K_p = \frac{G a^4}{\Delta D_{cp}^3 i} \qquad (9)$$

где G - модуль упругости при сдвиге; a - шаг спиральной несплошности; D_{cp} - средний диаметр стержня;
i - число витков несплошности; $\Delta \cdot \frac{b}{a}$ - табличное соотношение.

Графическое представление взаимосвязи сил и деформаций рассматриваемого твердотельного энергопреобразователя схематически представлено на рис. 3в.

Подставив значения жесткости в закономерность (6) полученную теоретически и произведя все необходимые преобразования и подстановки получим расчетную зависимость

$$A_y = U_p \left[1 - 0{,}12\, \frac{a}{b} \left(\frac{a}{D_{cp}}\right)^4\right] \qquad (10)$$

Учитывая, что D_{cp} всегда больше a и b, а соотношение последних величин может иметь разные значения, то задаваясь их численными значениями можно в каждом конкретном случае подсчитать величину производимой в устье несплошности работы. Зная время прохождения упругой волны через устье можно определить развиваемую механическую мощность. Соотнеся полезную работу и потенциальную упругую энергию твердого тела легко определить коэффициент полезного действия при преобразовании упругой энергии в работу этой несплошностью.

В связи с тем, что этот вопрос заслуживает особого внимания рассмотрим примеры. Примем значения $a = b = \frac{D_н}{2}$, что соответствует предельному случаю. Подставим заданные значения в расчетную формулу (10) и переписав ее можно вычислить коэффициент полезного преобразования упругой энергии

$$\eta = \frac{A_н}{U_p}\,100\,\% = \left[1 - 0{,}12\,\frac{a}{b}\left(\frac{a}{D_{н}}\right)^4\right]\cdot 100\,\% \cong 88\,\%$$

Пусть $a = b$, а $D_н = 10b$, что является вполне реальным конструктивным элементом. В этом случае коэффициент полезного преобразования упругой энергии в работу составит

$$\eta = \left[1 - 0{,}12\left(\frac{1}{10}\right)^4\right]\cdot 100\,\% = 99{,}9\,\%$$

Самым примечательным в этом вопросе является то, что необратимая работа совершается в устье несплошности около состояния равновесия тела, тогда как концентрация напряжений имеет место тоже в устье несплошности, только на предельном удалении от состояния равновесия т.е. в упругой фазе деформации. Еще одной примечательностью рассматриваемого явления есть то, что время прохождения упругой волны через устье несплошности ничтожно мало, что обеспечивает совершение механической работы с максимально возможной в природе мощностью.

Впервые эта задача была поставлена и частично разрешена в работах автора (6,7). Это позволило создать более сорока изобретений в самых различных областях техники и осуществить промышленное внедрение некоторых из них.

Выводы: 1. Господствующие в механике твердого тела естественнонаучные представления о сплошности и однородности их объема, а также линейности деформаций исчерпали свою плодотворность и противоречат опыту, согласно которому все без исключения тела несплошны и нелинейны, что необходимо использовать для дальнейшего развития теории и практики.

2. Как показали исследования, несплошности могут быть двух видов – упругосимметричные и упругонесимметричные.

3. Доказано, что упругосимметричная несплошность не изменяет существенно линейности деформаций и согласуется с классическими представлениями. Упругоасимметричная несплошность вызывает излом линейности и создает ранее неизвестное в науке явление вентильного механичес-

кого эффекта, т.е. односторонней проводимости и накопления упругой энергии. В этом случае твердое тело становится энергопреобразователем, т.е. мгновенно может сбрасывать упругую энергию не разрушаясь или совершать полезную работу с требуемой мощностью, а также расходовать ее на саморазрушение.

4. Твердотельные энергопреобразователи отличаются от традиционных многозвенных высокой материало- и энергоэкономичностью, простотой устройства, надежностью и долговечностью. Их коэффициент полезного действия близок к 100%.

5. Открытие вентильного механического эффекта в твердых телах является теоретической основой для принципиально нового объяснения развития усталостных трещин, сброса упругой энергии при землетрясениях и практического создания высокоэффективных средств труда.

Литература

1. Coychy A.L., Sur les equations qui expriment les conditions d'equilibre ou lois de mouvement interieur d'un corps solide, elastique ou noir, Paris, 1822.
2. Robert Hooke, De Potentia restitutiva, London, 1678.
3. Inglis C.E., Stresses in a plate die to the presence of cracks and sharp corners. Engineering, 1913, vol. 95, № 2465, March 28.
4. Окладников А.П. К вопросу о происхождении и месте лука в истории культуры// Труды института истории культуры/ М.: - 1940. - Вып.5. - С71-81.
5. Понаморев С.Д. Пружины, их расчет и конструирование. -М.: Машгиз, 1954. - 182с.
6. Трусь А.М. Исследование упругих несовершенств, динамики и прочности винтовых цилиндрических пружин// Диссертация на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Новосибирск. 1964, - 165 с.
7. Трусь А.М. и др. О передаче механической энергии пружинами// Динамика машин. Сборник. "Машиностроение"/ М.: - 1966, - С.426-436.

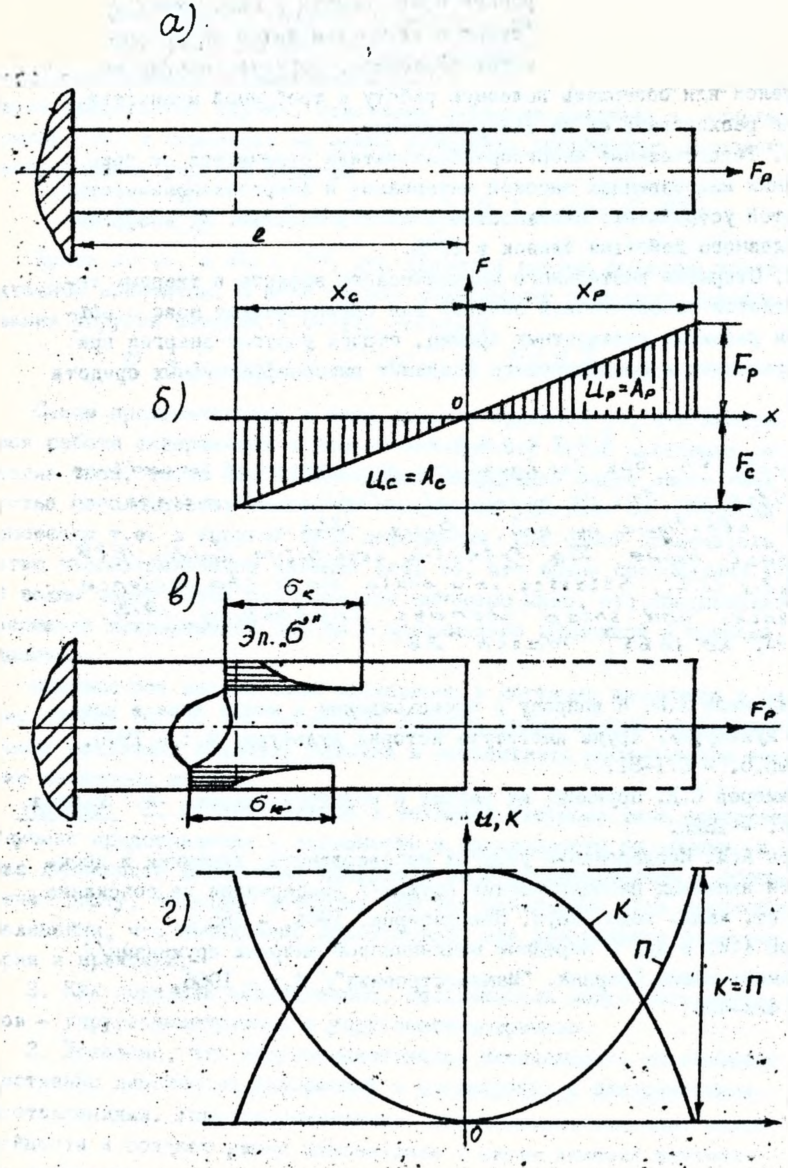

а)
F_p
l
F
x_c
x_p
F_p
б)
$Ц_p = A_p$
0
x
F_c
$Ц_c = A_c$
в)
$\sigma_к$
Эп. „σ"
F_p
$\sigma_к$
u, K
г)
K
$П$
$K = П$
0

Рис. 1

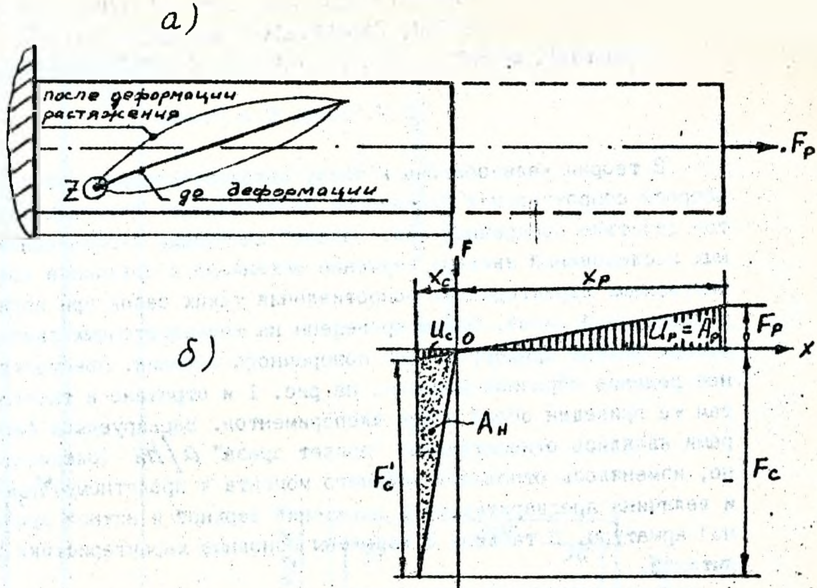

а)
после деформации
растяжения
Z
до деформации
Fp
б)
F
xc
xp
Uc
O
Up = Ap
Fp
X
Ан
F'c
Fc

Рис. 2

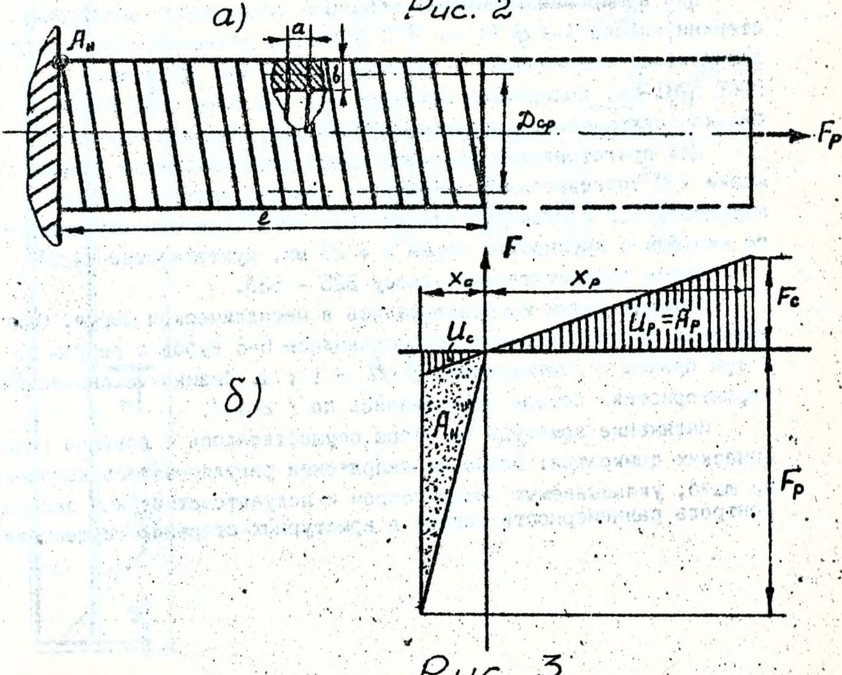

а)
Ан
a
b
Dср
Fp
l
б)
F
xc
xp
Uc
Up = Ap
Fc
Ан
Fp

Рис. 3

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, РАБОТАЮЩИХ С ДВУЗНАЧНОЙ ЭПЮРОЙ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВИЮ ИЗГИБА С ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

В.И.Гашко, О.А.Рочняк

В теории железобетона к числу малоисследованных относятся вопросы сопротивления статически неопределимых балочных элементов действию поперечных сил. Задачей настоящих экспериментальных исследований явилось изучение механизма и получение количественных характеристик сопротивления таких балок при изгибе с поперечной силой. Опыты проведены на железобетонных двухпролетных балках прямоугольного поперечного сечения. Конструктивное решение образцов показано на рис. I и отражено в таблице I, там же приведен общий объем экспериментов. Варьируемыми факторами являлись относительный "пролет среза" a/h_o (следовательно, изменялось отношение опорного момента к пролетному M_{sup}/M_{od}) и величина предварительного натяжения верхней и нижней продольной арматуры. В таблице 2 изложены основные характеристики испытаний.

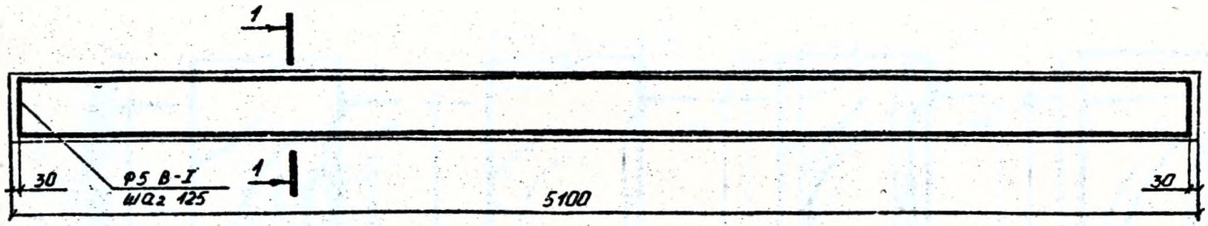
Для армирования опытных образцов применялись арматурные стержни класса А-У ϕ II мм ГОСТ 5781-82, устанавливаемые с предварительным натяжением, и стержни класса А-П ϕ I2 мм ГОСТ 5781-82; поперечная арматура В-I ϕ 5 мм ГОСТ 6727-80. Физико- механические показатели арматуры определялись по / I /.

Для приготовления бетонной смеси использовались цемент марки 400 Волковысского цементного завода; песок с модулем крупности I,8 и объемной массой I640 кг/м^3; щебень Микашевичского карьера с крупностью зерен 5 + 20 мм, пустотностью 41,8%.

Бетон соответствовал классу В25 - В30.

Опытные балки изготавливались в металлической форме. Одновременно из той же смеси бетонировались 6-8 кубов с ребром I5 см и три призмы с соотношением $b:h$ = I : 4. Физико-механические характеристики бетона определялись по / 2-4 /.

Натяжение арматуры на упоры осуществлялось с помощью гидравлических домкратов. Величина напряжения регулировалась комплектами шайб, укладываемых между упором и полуавтоматическим зажимом. Контроль равномерности усилий в арматурных стержнях осуществлял-



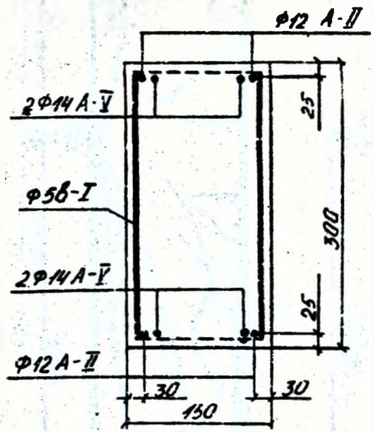


Рис. I Конструктивное решение опытных балок

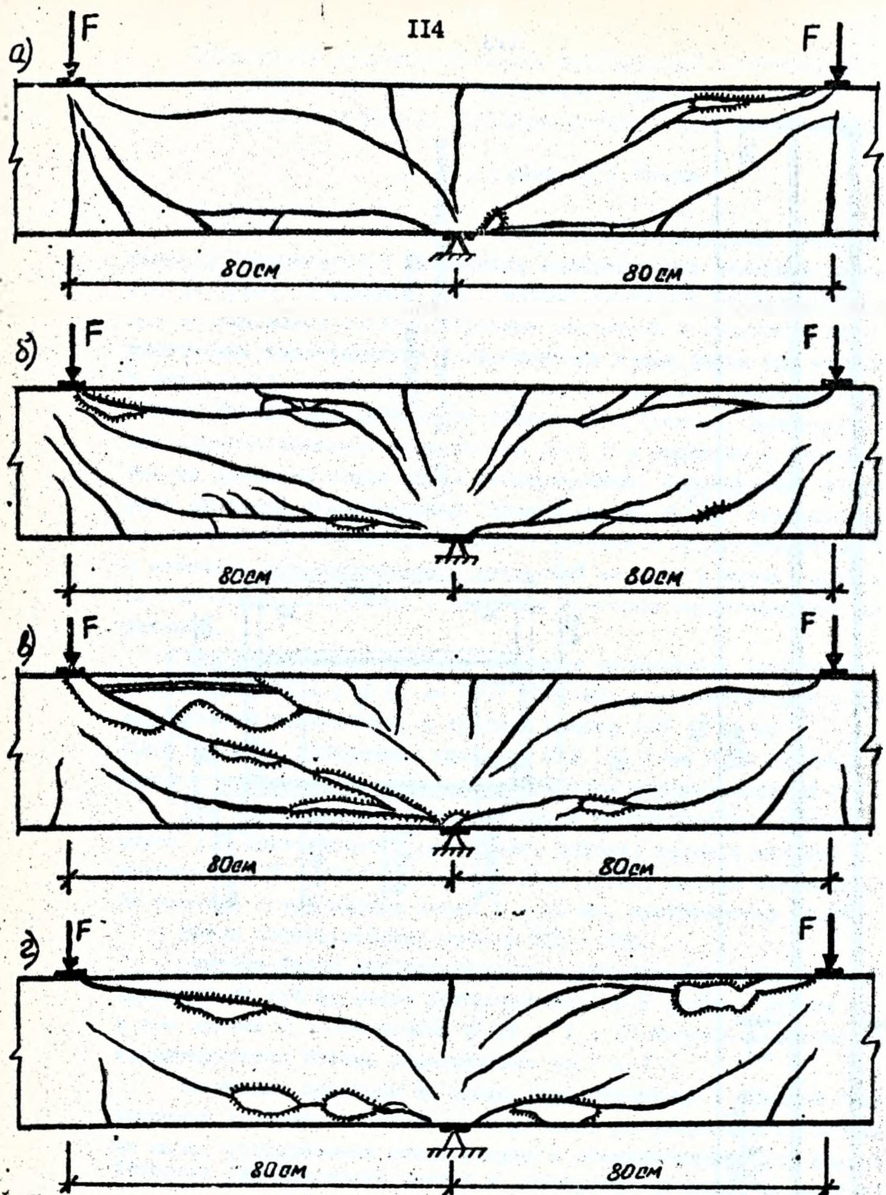


Рис. 2 Морфология трещинообразования и характер разрушения опытных балок: а) БН-П-IА (a/h_0 = 3; $\sigma_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0); б) БН-П-2 (a/h_0 = 3, $\sigma_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0,53; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0,53); в) БН-П-3А (a/h_0 = 3; $\sigma_{sp}/\sigma_{0.2}$ = I,0; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0.2}$ = I,06); г) БН-П-4А (a/h_0 = 3,0; $\sigma_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0,96; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0.2}$ = 0,55).

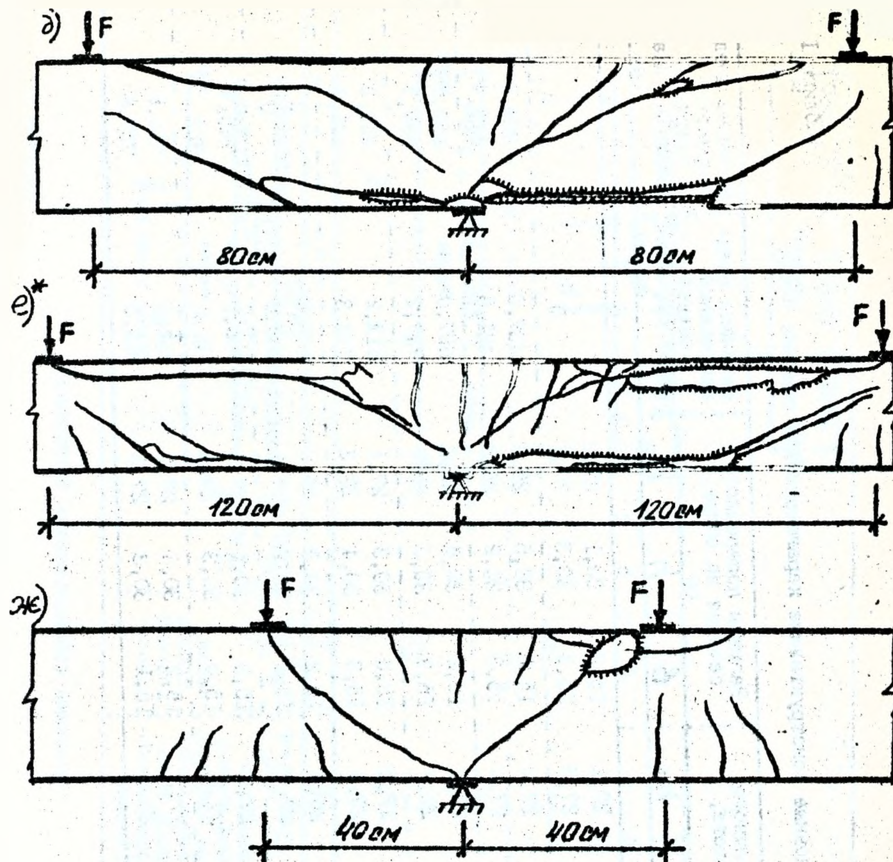


Рис. 2 (продолжение) Морфология трещинообразования и характер разрушения опытных балок: д) БН-П-5А (a/h_o = I,5; $\sigma_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0,97; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0) е) БН-Ш-3А (a/h_o = 4,5; $\sigma_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0,94, $\sigma'_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0,94); ж) БН-I-3 (a/h_o = = I,5; $\sigma_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0,94; $\sigma'_{sp}/\sigma_{0,2}$ = 0,9)

* Масштаб рисунка балки БН-Ш-3А отличен от масштаба рисунков остальных балок.

Таблица I

Основные конструктивные характеристики опытных балок

Шифр балки	Размеры поперечного сечения в пролете, см			Размеры поперечного сечения на опоре, см			Величина преднапряжения нижней арматуры, МПа	Величина преднапряжения верхней арматуры, МПа
	b	h	h_0	b	h	h_0		
I	2	3	4	5	6	7	8	9
БН-П-I	I5,2	30,2	27,I	I5,3	30,I	27,0	0	0
БН-П-Iа	I5,3	30,5	27,3	I5,3	30,3	27,I	0	0
БН-П-2	I5,4	30,6	27,2	I5,2	30,5	26,9	437,0	399,0
БН-П-2а	I5,2	30,I	27,0	I5,3	30,2	26,8	42I,8	429,4
БН-П-3	I5,I	30,8	27,2	I5,2	30,6	27,I	807,0	659,8
БН-П-3а	I5,4	30,2	26,9	I5,3	30,3	26,9	737,2	689,7
БН-П-4	I5,I	30,5	27,2	I5,0	30,3	27,I	8I3,2	4I8,0
БН-П-4а	I5,3	30,6	27,3	I5,3	30,4	27,3	773,3	446,5
БН-П-5	I5,I	30,4	26,9	I5,2	30,3	27,0	607,5	0
БН-П-5а	I5,0	30,3	27,0	I5,I	30,2	27,I	763,8	0
БН-I-3	I5,3	30,4	27,3	I5,2	30,I	27,2	768,I	745,4
БН-I-3а	I5,I	30,2	27,I	I5,0	30,3	27,4	742,2	725
БН-Ш-3	I5,I	30,3	27,I	I5,2	30,4	27,I	750,5	7I0,6
БН-Ш-3а	I5,0	30,2	27,0	I5,I	30,3	27,3	763,3	757,8

Таблица 2

Основные характеристики испытаний

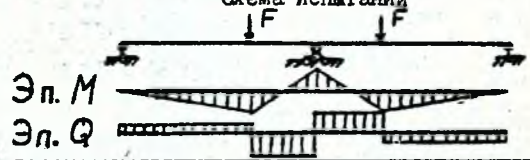
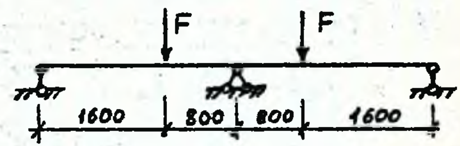
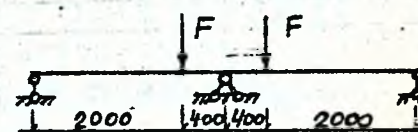
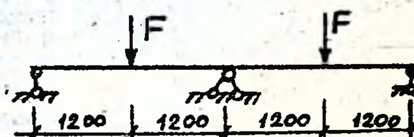
Шифр балки	Уровень относительного предварительного напряжения верхней арматуры, $\sigma'_{sp}/\sigma_{0,2}$	Уровень относительного предварительного напряжения нижней арматуры, $\sigma_{sp}/\sigma_{0,2}$	Относительный "пролет среза" a/h_0	Схема испытаний 
I	2	3	4	5
БН-II-1	0	0		
БН-II-2	0,55	0,55		
БН-II-3	I,0	I,0	3,0	
БН-II-4	0,55	I,0		
БН-II-5	0	I,0		
БН-I-3	I,0	I,0	I,5	
БН-III-3	I,0	I,0	4,5	

Таблица 3

Усилия при образовании трещин и исчерпании несущей способности опытных балок

Шифр балки	Относительный "пролет среза" a/h_0	Уровень относительного предварительного напряжения нижней арматуры σ_{sp}/σ_{02}	Уровень относительного предварительного напряжения верхней арматуры σ_{sp}'/σ_{02}	Усилия при образовании нормальных трещин на верхней грани: M_{sup}, кНм	M_{sp}, кНм	Q, кН	Усилия при образовании нормальных трещин на нижней грани: M_{sup}, кНм	M_{sp}, кНм	Q, кН	Усилия при образовании наклонных трещин: M_{sup}, кНм	M_{sp}, кНм	Q, кН	Усилия при исчерпании несущей способности балки: M_{sup}, кНм	M_{sp}, кНм	Q, кН
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II	I2	I3	I4	I5	I6
БН-П-I	3	0	0	I7,4	9,5	33,7	26,0	I4,2	50,3	21,9	I2,0	42,5	65,8	36,0	I27,5
БН-П-Iа	3	0	0	I7,5	9,6	33,9	26,2	I4,4	50,8	26,3	I4,4	51,0	57,I	3I,2	II0,5
БН-П-2	3	0,52	0,53	26,3	I4,4	5I,0	34,7	I9,0	67,3	44,2	24,2	85,6	74,6	40,8	I44,5
БН-П-2а	3	0,54	0,49	34,5	I8,9	66,8	46,6	25,5	90,3	60,0	33,I	II7,3	81,2	44,4	I57,3
БН-П-3	3	I,00	I,06	44,3	24,3	85,9	6I,2	33,5	II8,5	65,7	35,4	I27,3	90,9	49,7	I76,0
БН-П-3а	3	0,92	0,85	43,5	23,8	84,3	57,2	3I,3	II0,8	53,8	29,5	I04,3	85,6	46,8	I65,8
БН-П-4	3	I,0I	0,52	34,5	I8,9	66,9	48,I	26,3	93,2	52,7	28,8	I02,0	83,4	45,6	I6I,8
БН-П-4а	3	0,96	0,55	34,7	I9,0	67,3	52,6	28,8	I0I,8	60,0	32,9	II6,3	82,5	45,I	I59,8
БН-П-5	3	I,00	0	I7,8	9,7	34,5	30,7	I6,8	59,5	26,3	I4,4	5I,0	77.2	42,2	I50,0
БН-П-5а	3	0,97	0	20,4	I4,3	50,5	39,5	2I,6	76,5	35,I	I9,2	68,0	72,I	39,4	I39,7
БН-I-3	I,5	0,94	0,9I	59,I	I6,0	I88,7	58,3	I5,8	I86,3	47,6	I2,9	I52,3	69,2	I8,8	22I,I
БН-I-3а	I,5	0,92	0,9	53,6	I4,6	I7I,3	58,7	I5,9	I87,5	42,4	II,5	I25,4	63,3	I7,2	203,9
БН-Ш-3	4,5	0,92	0,89	43,7	37,I	67,3	52,4	44,4	80,6	7I,2	60,4	I09,6	80,I	68,0	I23,0
БН-Ш-3а	4,5	0,94	0,94	44,4	37,7	68,4	52,9	44,9	8I,4	68,4	58,I	I05,3	8I,6	69,3	I25,6

Таблица 4

Опытные и расчетные (по / 5 /) значения поперечных сил

Шифр балки	Характер разрушения балки	Поперечная сила при разрушении Q, кН	Расчетная величина сопротивления балки действию поперечных сил $Q_{b,sw}$ по нормам /5 /	Отношение $\frac{Q}{Q_{b,sw}} \cdot 100\%$ %
I	2	3	4	5
БН-П-I	по наклонному сечению	I27,5	93,9	I36
БН-П-Iа		II0,5	91,7	I20
БН-П-2	-"-	I44,5	98,6	I47
БН-П-2а	-"-	I57,3	I01,3	I55
БН-П-3	-"-	I76,0	I04,7	I68
БН-П-3а	-"-	I65,8	I03,I	I6I
БН-П-4	-"-	I6I,8	I03,I	I57
БН-П-4а	-"-	I59,8	I03,I	I55
БН-П-5	-"-	I50,0	I03,8	I44,5
БН-П-5а	-"-	I39,7	I03,I	I35
БН-I-3	-"-	22I,I	I45,I	I52
БН-I-3а	-"-	203,9	I43,9	I4I
БН-Ш-3	-"-	I23,3	I0I,4	I22
БН-Ш-3а	-"-и	I25,6	I02,0	I23

ся с помощью мессур на базе 30 см, индикаторов перемещений часового типа с ценой деления 0,001 мм, образцовых манометров гидросистемы и образцового эталонного динамометра ДОС-50.

Рабочее загружение опытных балок (гидравлическими домкратами ДГС-50) производилось этапами, составляющими ~ 1/10 от ожидаемой разрушающей нагрузки, с выдержкой на каждом из них 10-15 мин. За это время снимались показания индикаторов, прогибомеров, фиксировалось образование и развитие трещин, замерялась ширина их раскрытия. Показания приборов на каждом этапе снимались дважды - сразу же после приложения нагрузки и после выдержки.

Величина усилий при образовании трещин и исчерпании несущей способности опытных балок приведены в таблице 3. Морфология трещинообразования и характер разрушения показаны на рис.2. Все образцы разрушились по наклонному сечению. В таблице 4 изложены опытные значения поперечных сил и расчетные величины сопротивления балок действию поперечных сил, подсчитанные по нормам / 5 /. Приведенные результаты экспериментов свидетельствуют о необходимости введения корректив в расчетные зависимости норм / 5 / при оценке прочности железобетонных изгибаемых элементов, работающих с двузначной эпюрой моментов, на действие поперечных сил.

Литература

1. ГОСТ 12004-66. Сталь арматурная. Методы испытания на растяжение. - М.: Изд-во стандартов, 1972.- 13 с.
2. ГОСТ 18105-72*. Бетоны. Контроль и оценка однородности и прочности. - М.: Изд-во стандартов, 1980.- 24 с.
3. ГОСТ 10181.1-81. Смеси бетонные. Методы определения удобоукладываемости.- М.: Изд-во стандартов, 1983.- 6 с.
4. Лещинский М.Ю. Испытание бетона: Справочное пособие.- М.: Стройиздат, 1980.- 359 с.
5. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции/ Госстрой СССР.- М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985.- 79 с.

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, РАБОТАЮЩИХ С ДВУЗНАЧНОЙ ЭПЮРОЙ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВИЮ ИЗГИБА С ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

О.А.Рочняк, В.И.Гашко

Основные результаты экспериментальных исследований железобетонных двухпролетных неразрезных балок изложены в статье, помещенной в настоящем сборнике*. Полученные данные свидетельствуют о влиянии на несущую способность таких элементов величины относительного "пролета среза" (рис. I), следовательно, отношение опорного и пролетного моментов (рис. 2); уровня относительного предварительного напряжения (рис. 3).

На основании представленных на рис. 2 вышеупомянутой статьи морфологии трещинообразования и характера разрушения возможно полагать, что в исследуемых балках восприятие поперечных сил происходит по следующей схеме. После появления нормальных и слабонаклонных трещин, последовательно на верхней и нижней гранях элемента, формируется сжатый подкос. Угол его наклона, положение относительно опорного сечения балки может быть различным (рис. 4;5); что зависит, прежде всего, от "пролета среза", степени предварительного напряжения верхней и нижней арматуры. Сжатые подкосы смежных пролетов могут сопрягаться так, как показано на рис. 4а. В этом случае вначале происходит разрушение подкоса (в опытах - почти по линии "опора - пролетный груз"). Далее поперечная сила воспринимается за счет "нагельного эффекта". О его проявлении могут свидетельствовать при исчерпании несущей способности балок отслоение защитного слоя бетона и характерный S - образный изгиб продольной арматуры (рис. 4б).

В случае, если нормальные и слабонаклонные трещины формируют сжатый подкос по схеме на рис. 5а (подкос "упирается" в нижний арматурный пояс балки перед опорным сечением), разрушение балки может произойти в результате преодоления сопротивления поперечной арматуры и далее "нагельного эффекта" продольной арматуры (рис.5б), как и наблюдалось в экспериментальных исследования.

---

*В.И.Гашко, О.А.Рочняк "Результаты экспериментальных исследований сопротивления железобетонных балок, работающих с двузначной эпюрой изгибающих моментов, действию изгиба с поперечной силой".

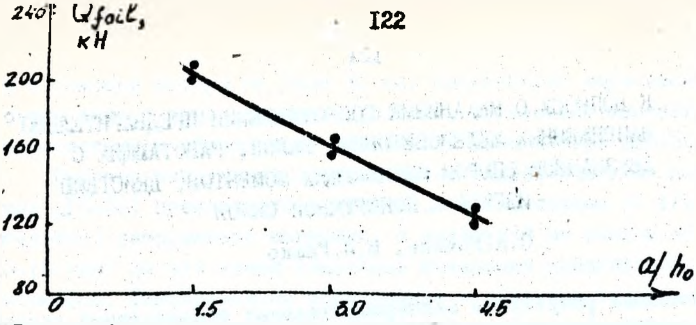


Рис. 1 Изменение величины поперечной силы при разрушении в зависимости от "пролета среза" (балки с отношением $\sigma_{sp}/\sigma_{a2} = \sigma'_{sp}/\sigma_{0.2} \simeq 1$)

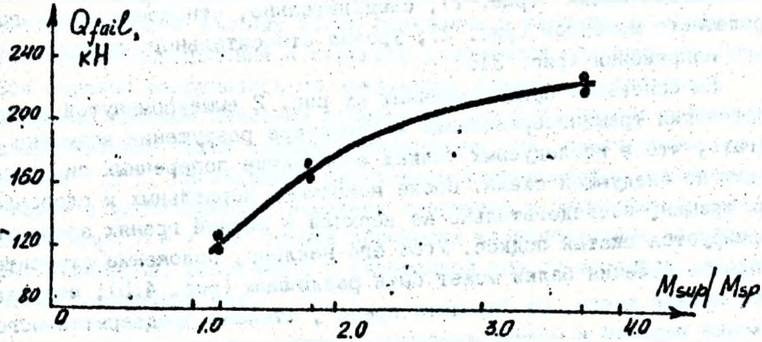


Рис. 2 Изменение величины поперечной силы при разрушении в зависимости от отношения M_{sup}/M_{sp} (балки с отношением $\sigma_{sp}/\sigma_{a2} \simeq \sigma'_{sp}/\sigma_{0.2} \simeq 1$ и $a/h_0 = 3$)

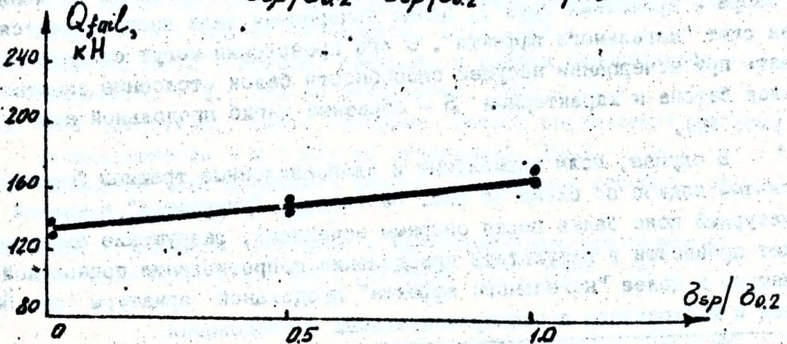


Рис. 3 Изменение величины поперечной силы при разрушении в зависимости от уровня относительного предварительного напряжения (балки с $\sigma_{sp}/\sigma_{0.2} \simeq \sigma'_{sp}/\sigma_{0.2} \simeq 1$ и $a/h_0 = 1$)

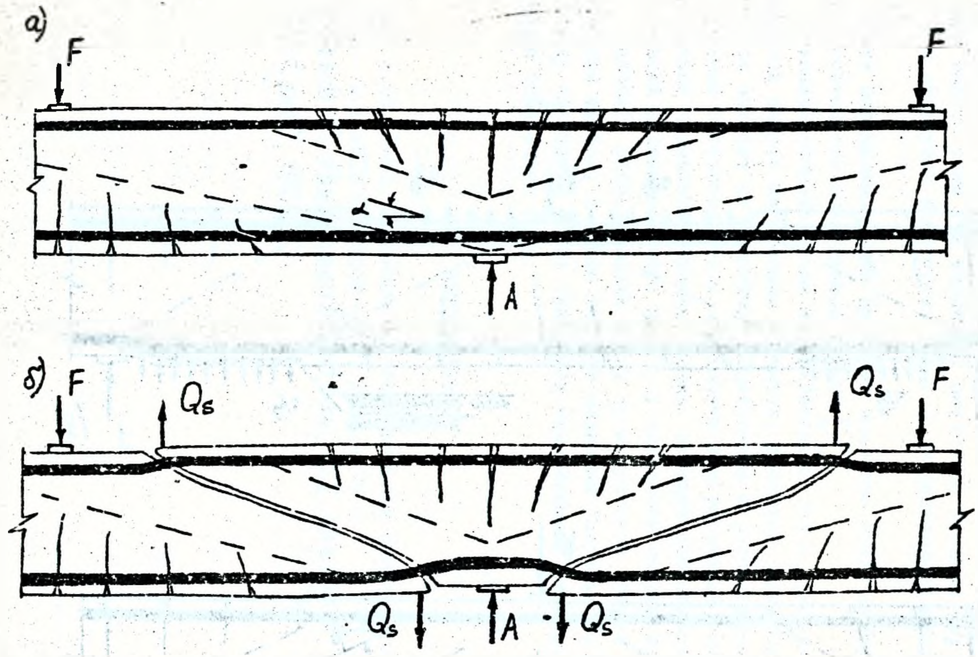


Рис. 4

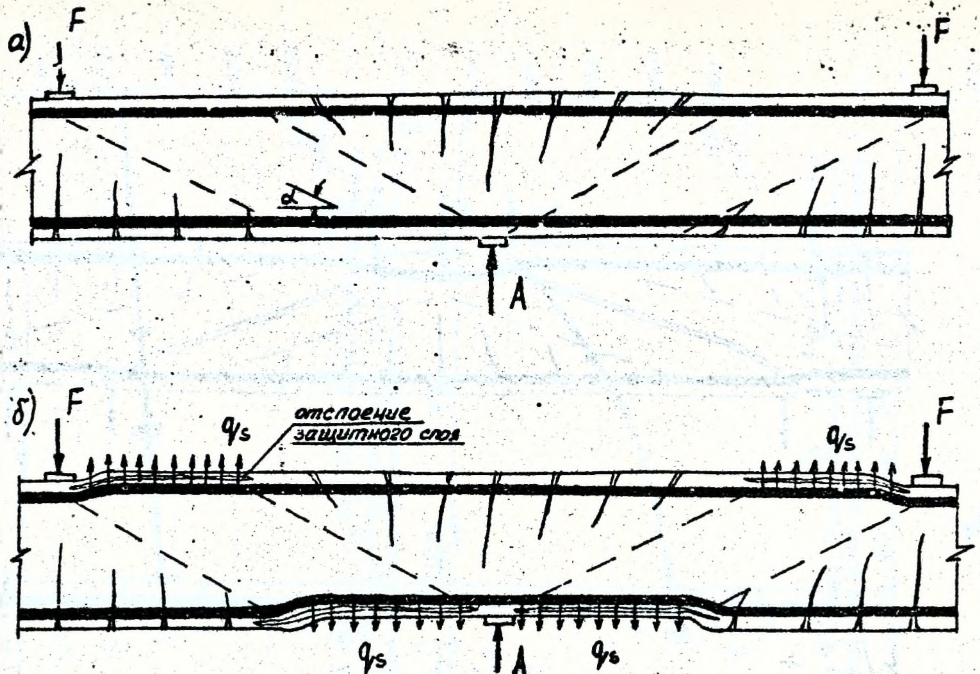


Рис. 5

Таким образом, работа опытных железобетонных балок при изгибе с поперечной силой, на наш взгляд, не согласуется с расчетной схемой, принятой [I]. Отметим, что расчетная модель, положенная в основу [I], предусматривает образование наклонной трещины на растянутой грани элемента, далее ее развитие происходит по траектории главного сжатия, поперечная сила воспринимается бетоном сжатой зоны над вершиной, наклонной трещины (Q_b); поперечной и отогнутой арматурой (Q_{sw}), пересеченной наклонной трещиной.

Почти невозможно также провести аналогию между опытными балками и статически определимой фермой [2].

Механизм сопротивления железобетонных балок, работающих с двузначной эпюрой изгибающих моментов, действию поперечных сил во многом зависит от характера образования и распространения трещин; данным обстоятельством определяются и расчетные схемы. После образования нормальных брещин оценка, несущей способности наклонных сечений должна включать проверку прочности сжатой полосы (сжатого подкоса), расположенной между промежуточной опорой и сосредоточенным грузом; а также подсчет величины "нагельного эффекта", поскольку последний может оказаться единственным фактором, воспринимающим поперечную силу.

ЛИТЕРАТУРА

I. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции/Госстрой СССР.- М.: УИТП Госстроя СССР, 1985.- 79 с.

2. Mörsch F. Der Eisenbetonbau, t.I. Verlag K. Wittwer, Stutgart, 1929.

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ВЫНОСНОЙ АРМАТУРЫ ДЛЯ УСИЛЕНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

О.А.Рочняк, В.А.Козик, П.П.Зауличный

Выполнение работ по усилению изгибаемых железобетонных элементов каркасов зданий и сооружений вызывается рядом причин: необходимостью в процессе эксплуатации производить замену, наполнение и перестановку технологического оборудования, что во многих случаях увеличивает полезные нагрузки: преждевременным износом конструкций вследствии возникновения и развития коррозионных процессов в железобетоне, и др.

Усиление железобетонных элементов в условиях действующего предприятия является достаточно сложным, трудоемким и дорогостоящим процессом. Опыт использования выносной арматуры для усиления изгибаемых элементов каркасов зданий на Советском целлюлозно-бумажном заводе (СЦБЗ), Неманском целлюлозно-бумажном заводе (НЦБЗ), Гомельском пивоваренном заводе (ГПВЗ) и других объектах показал, что данный способ достаточно прост в исполнении и эффективен. Он может быть использован для усиления как однопролетных, так и многопролетных элементов. К числу достоинств рассматриваемого способа следует отнести и то обстоятельство, что включение конструкций усиления в работу происходит непосредственно после их установки в проектное положение одновременно с созданием в них предварительного напряжения (последнее достигается путем стягивания выносной арматуры при помощи стяжных устройств).

На СЦБЗ усилению подверглись второстепенные и главные балки покрытия варочного отдела. Покрытие (на отм. +27,2 м) монолитное железобетонное, эксплуатируется свыше 80 лет. Площадь сечения продольной арматуры, как показали результаты натурных обследований, за счет протекающей коррозии уменьшилась более чем на 20 %; согласно [I], техническое состояние конструкции оценено как "крайне неудовлетворительное". СЦБЗ принял к исполнению способ усиления бетонных элементов покрытия выносной арматурой как наиболее простой в условиях действующего предприятия. Усиление главных балок осуществлялось по схеме, представленной на рис.I. Натяжение выносной арматуры (тяжей), как отмечалось выше, осуществлялось путем их сближения на заданную расчетную величину (последняя для различных балок составила 16 и 34 см). Натяжение производилось вручную накладными ключами до появления в стержнях (при их колебании) чистого звука высокого тона.

Здание склада готовой продукции - один из объектов НЦБЗ, где для усиления конструктивных элементов применена выносная арматура. Железобетонное монолитное перекрытие над подвалом эксплуатировалось в течении ряда лет с грубым нарушением технических условий (высота складирования рулонов бумаги превышала установленное значение). В резельтате в некоторых балках произошло образование с определенным шагом l_{crc} "силовых" нормальных и наклонных трещин. На рис.2 показана схема усиления железобетонных главных балок перекрытия. Использование предварительно напряженной выносной арматуры (предварительное напряжение осуществлялось также, как в примере, рассмотренном выше) позволило не только увеличить несущую способность второстепенных и главных балок-по изгибаемому моменту и поперечной силе, но и "зажать" имеющиеся трещины.

Усиление элементов монолитных железобетонных перекрытий варочного отделения ГПВЗ также выполнено выносной арматурой. Условия данного производства характеризуются значительной влажностью и повышенной температурой. Обследование фактического состояния несущих конструкций показало, что в балках уменьшение площади поперечного сечения рабочей арматуры составило 10-20% в главных и 30-40% во второстепенных. Продуктами коррозии во многих местах отслоился защитный слой бетона. Согласно классификации [1] указанные конструктивные элементы отнесены к третьей категории технического состояния, потребовали проверочных расчетов, выполнения капитального ремонта и восстановления эксплуатационных качеств. Усиление балок осуществлено выносной преднапряженной арматурой по схеме, представленной на рис.3. Этот способ усиления для ГПВЗ оказался эффективным.

Расчет конструкций усиления в рассмотренных выше примерах выполнялся по [2], [3]. Однако, в случаях, когда в балках имелись нормальные трещины ("силового" происхождения) с известным шагом, принимались во внимание особенности работ такой сформировавшейся блочной системы с предварительно напряженной продольной арматурой, не имеющей сцепления с бетоном (выносной арматурой). Имелось в виду, что при шаге нормальных трещин $l_{crc} \geqslant 1{,}5h$, где h - высота поперечного сечения, по продольным площадкам действуют значительные по величине растягивающие напряжения σ_y. Последние, достигнув предела прочности бетона на растяжение, вызывают образование слабонаклонных, переходящих в продольные, трещин, берущих начало у вершин нормальных; они отслаивают сжатую зону бетона. Появление продольных трещин изменяет схему работы балки и приводят к снижению её несущей способности при действии изгибающих моментов. Разрушение блочной системы, как показали результаты экспериментально-теоретических исследований [4], [5] и др., происходит либо вследствие раздавливания сжатого бетона в месте контакта блоков, либо от потери устойчивости отслоившейся сжатой зоны (в балках таврового профиля - сжатой полки).

Изложенные выше обстоятельства учитывались при расчетном анализе несущей способности усиливаемых конструктивных элементов.

Подсчет критической силы ($N_{cr,b}$), вызывающей исчерпание несущей способности от потери устойчивости сжатой зоны, выделенной продольной трещиной, выполнялся по формуле А.С.Залесова

$$N_{cr,b}=\frac{E_b J_x}{l_o^2}\cdot 0.9\cdot\left(\frac{1}{0.1+\delta_e}+1\right)$$

где l_o - расстояние между трещинами ($l_o \approx l_{crc}$);

$$J_x=\frac{b\bar{x}^2}{12};\quad \delta_e\simeq\frac{1}{6}$$

Во избежание развитий продольных трещин и откола сжатой зоны необходимо наличие в зоне действия наибольших изгибающих моментов поперечной арматуры. Для этих целей площадь её сечения (на единицу длины) должна быть не менее

$$A_{sw}=\frac{1.5R_{bt,n}\cdot b}{R_{sw}}$$

где b - ширина поперечного сечения балки; шаг $S\leqslant\frac{1}{6}h_o$; длина поперечной арматуры $\sim\frac{1}{2}h$.

В целом возможно заключить, что использование выносной арматуры (не имеющей сцепления с бетоном) является во многих случаях эффективным и целесообразным способом усиления железобетонных изгибаемых элементов в условиях действующего предприятия. При расчетном анализе несущей способности необходимо учитывать принципиальные особенности работы таких конструкций.

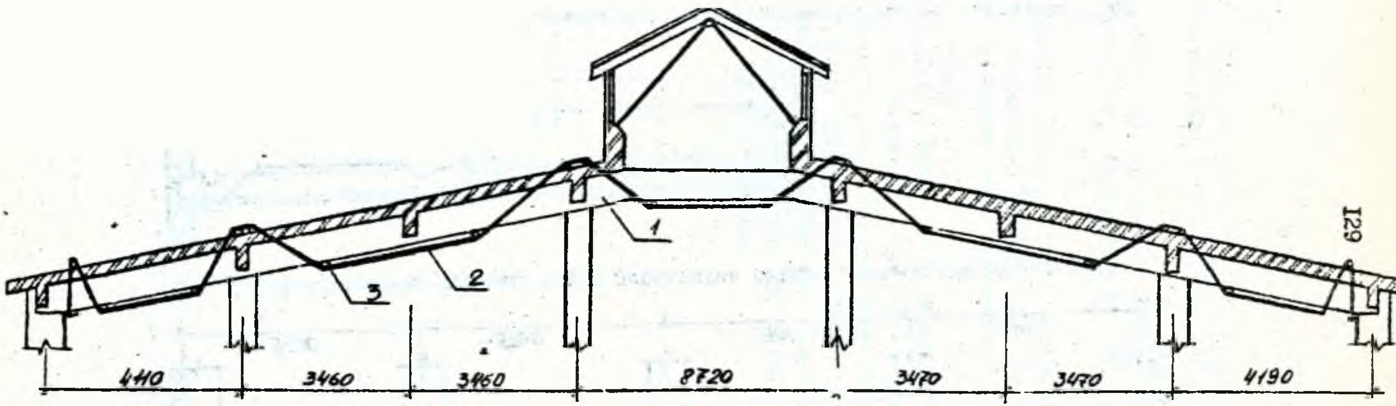


Рис.1Схема усиления главных балок покрытия варочного отдела СЦБЗ;
I - главная балка; 2 - выносная арматура (тяжи);
3 - шарниры в местах перегиба стержней.

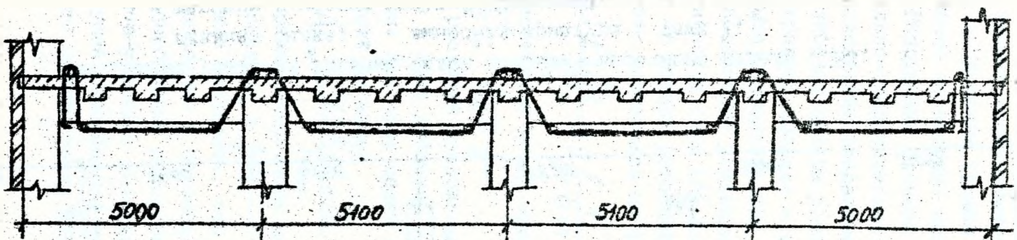


Рис.2.Схема усиления главных балок перекрытия склада готовой продукции НЦБЗ

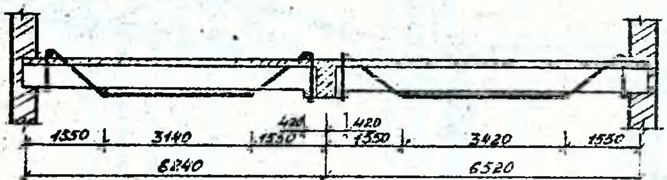


Рис.3.Схема усиления второстепенных балок перекрытия варочного отделения ГПВЗ

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекомендации по оценке состояния железобетонных конструкций при эксплуатации в агрессивных средах. -М.:Стройиздат,1984.- 26 с.
2. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. Госстрой СССР. ММ.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. - 79 с.
3. Онуфриев В.М. Простые способы усиления железобетонных конструкций промышленных зданий. -М. -Л.: Государственное издательство по строительству, архитектуре и строительным матери лам, 1958. - 201 с.
4. Васильев П.И., Рочняк О.А., Образцов Л.В. Исследование пред - варительно напряженных балок без сцепления арматуры с бетоном Строительство и архитектура Белоруссии. - 1981. -№2-с. 35-36.
5. Рочняк О.А., Образцов Л.В., Яромич Н.Н. Вопросы сопротивления железобетонных элементов при изгибе с поперечной силой Строительные конструкции: Сб. научн. тр. / ИСиА Госстроя БССР. - Минск, 1983. - с.80-86.

К ВОПРОСУ О РАБОТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОВТОРНЫХ НАГРУЗОК

Л.А.Гончарова

В [1], [2] и др. установлены особенности сопротивления, трещинообразования и разрушения предварительно напряженных балок с продольной арматурой без сцепления с бетоном; разработана теория расчета по первому и второму предельным состояниям. Для оценки прочности и раскрытия трещин использована блочно-контактная модель, эпюра контактных напряжений принята по линейному закону, что вполне приемлимо для практических расчетов, однако, для расчета на действие повторных нагрузок в предложенные методы следует внести коррективы; о их необходимости могут свидетельствовать имеющиеся в литературе данные о работе железобетонных элементов при повторных нагружениях; рассмотрим некоторые из них.[x]

В Ростовском институте "Промстройниипроект" выполнены опыты с предварительно напряженными железобетрнными балками с канатной арматурой, величины μ составили: для образцов первой серии $\mu = 1\%$; второй серии - $\mu = 0{,}3\%$. При первоначальном загружении в балках первой серии ($\mu = 1\%$) ширина раскрытия трещин составила $a_{crc} = 0{,}1 \div 0{,}15$. После 10 циклов статических загружений первоначальное значение a_{crc} увеличилось $\sim$на 10% и наступила его стабилизация. В балках с $\mu = 0{,}3\%$ при первом цикле загружения $a_{crc} = 0{,}25 \div 0{,}3$ мм ; к моменту стабилизации (что достигалось после шестого цикла) величина a_{crc} возрастала $\sim$на 25%. Авторы работы, основываясь на полученных результатах, рекомендовали в формулу норм [3] для расчета ширины раскрытия нормальных к продольной оси элемента трещин ввести коэффициент $\varphi = 1{,}3$, который учитывал бы повторное действие нагрузки.

В институте НИИЖБ изучалась работа железобетонных балок без предварительного напряжения продольной рабочей арматуры при повторных статических нагружениях до 10 циклов. Испытательная нагрузка составлена 0,5 от разрушающей. В процессе опытов к последнему циклу нагружения первоначальная a_{crc} увеличилась на 25%. Вывод авторов исследования аналогичен предыдущему: при расчете балок, подверженных действию статических нагружениях a_{crc} нормальных трещин должна быть увеличена на 30 % в сравнении с a_{crc} при однократном загружении.

---

[x]Мы не располагаем сведениями о публикациях с изложением результатов испытаний предварительно напряженных балок без сцепления продольной арматуры с бетоном повторными нагружениями.

Отметим еще одно важное обстоятельство, установленное экспериментально. В опытах, выполненных в институтах НИИЖБ, в ВНИИГ им. Веденеева, одновременно с исследованием работы железобетонных балок действию повторных нагрузок испытывались подобные балки (близнецы) и бетонные призмы, изготовленные из того же состава бетона. Результаты опытов свидетельствуют, что графики деформирования бетона сжатой зоны бетона балок при повторных и длительных нагрузках и бетона призм подобны, что возможно свидетельствует о единой физической сути явления.

При действии многократно повторных нагрузок величины полных перемещений (прогибов железобетонных балок) также имеют тенденцию к возрастанию в сравнении с прогибами, проявившимися в аналогичных балках при однократном загружении. Этот экспериментально установленный факт возможно объяснить, прежде всего, проявлением значительных неупругих деформаций в сжатом бетоне при повторных загружениях. Количественные характеристики прогибов, полученные авторами, различны, ибо параметры экспериментов, конструктивные решения опытных балок были отличными друг от друга.

Таким образом, следует полагать, что в предварительно напряженных изгибаемых элементах без сцепления продольной арматуры с бетоном при действии повторных нагружений ширина раскрытия нормальных и наклонных трещин (a_{crc}), величины прогибов (f) будут превосходить значения a_{crc} и f, проявляющиеся в аналогичных балках при однократном загружении. Качественная картина и качественные характеристики подлежат уточнению, данным обстоятельством определяется программа предстоящих исследований.

Литература

1. Васильев П.И., Рочняк О.А., Образцов Л.В. Работа приопорных зон преднапряженных балок, не имеющих сцепления арматуры с бетоном// Бетон и железобетон. -1982. -№8. -С.24-25.
2. Рочняк О.А., Деркач В.Н., Образцов Л.В. К вопросу сопротивления предварительно напряженных железобетонных балок таврового сечения без сцепления арматуры с бетоном изгибу с поперечной силой// Вопросы строительства и архитектуры: Республиканский межведомственный сборник. -Минск: Вышэйшая школа, 1986.- вып. 15.-С.2-12.
3. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции /Госстрой СССР. -М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985, -79с.

Содержание