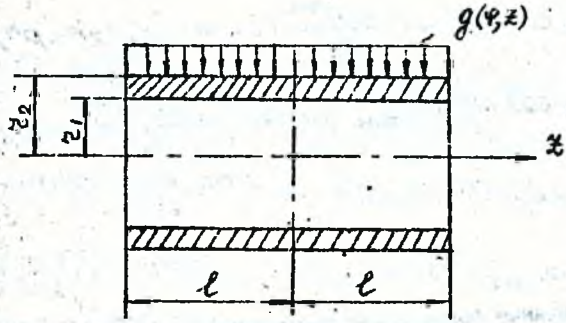
АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ "НИЖНЕЙ" ОЦЕНКИ ПО ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

В.Л.Мартиновский, Б.Ф.Власов

Рассмотрим короткий цилиндр, нагруженный по боковым поверхностям симметричной по длине (ℓ) и произвольной по угловой координате (φ) нагрузкой. Торцы цилиндра свободны.



Решение поставленной задачи будем выполнять в напряжениях. Для построения нижней оценки необходимо точно удовлетворить уравнениям равновесия и условиям на поверхности. Остальные уравнения теории упругости могут быть выполнены в вариационной форме.

Компоненты тензора напряжений принимаем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r(r,\varphi,z) = \sigma_r(r)\cos m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\sigma_\varphi(r,\varphi,z) = \sigma_\varphi(r)\cos m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\sigma_z(r,\varphi,z) = \sigma_z(r)\cos m\varphi\left(\cos\lambda_n z - \cos n\pi\right),\\
&\tau_{r\varphi}(r,\varphi,z) = \tau_{r\varphi}(r)\sin m\varphi \cos\lambda_n z,\\
&\tau_{\varphi z}(r,\varphi,z) = \tau_{\varphi z}(r)\sin m\varphi \sin\lambda_n z,\\
&\tau_{zr}(r,\varphi,z) = \tau_{zr}(r)\cos m\varphi \sin\lambda_n z.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$; $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Проведем разделение переменных в уравнениях равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0$$

тогда, согласно (I), получим

$$\sigma_r'(r) + \frac{1}{r}\sigma_r(r) - \frac{1}{r}\sigma_\varphi(r) + \frac{m}{r}\tau_{r\varphi}'(r) + \lambda_n r \tau_{zr}'(r) = 0,$$
$$-\frac{m}{r}\sigma_\varphi(r) + \tau_{r\varphi}''(r) - \frac{2}{r}\tau_{r\varphi}'(r) + \lambda_n r \tau_{\varphi z}'(r) = 0, \qquad (3)$$
$$r\tau_{zr}''(r) + 2\tau_{zr}'(r) + m\tau_{\varphi z}'(r) - \lambda_n \sigma_z(r) = 0.$$

В формулах для перемещений в интегро-дифференциальной форме [I]:

$$U_r(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(r\int \gamma_{r\varphi} d\varphi + \iint \gamma_{r\varphi} dr\, d\varphi + \int \gamma_{zr} dz - \iint \frac{1}{r}\gamma_{zr} dr\, dz -$$
$$- r\iint \frac{\partial \gamma_{\varphi z}}{\partial r} d\varphi\, dz + \iiint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z}\, dr\, d\varphi\, dz\Big) + \Pi_1,$$

$$U_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(\int \gamma_{\varphi z} dz + \iint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z} dr\, dz + \int \gamma_{r\varphi} dr -$$
$$- \iint \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{zr}}{\partial \varphi} dr\, dz\Big) + \Pi_2, \qquad (4)$$

$$U_z(r,\varphi,z) = \frac{1}{2}\Big(r\int \frac{1}{r}\gamma_{zr} dr + r\int \gamma_{\varphi z} d\varphi - r\iint \frac{1}{r}\gamma_{\varphi z} dr\, d\varphi -$$
$$- r\iint \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial z} dr\, d\varphi\Big) + \Pi_3,$$

где Π_1, Π_2, Π_3 – произвольные функции координат, выразим U_r, U_φ, U_z через напряжения по закону Гука

$$U_r(r,\varphi,z) = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\Big[\lambda_n r\tau'_{r\varphi} - \lambda_n\tau_{r\varphi} - m r\tau'_{zr} +$$
$$+ m\tau_{zr} - r^2\tau''_{\varphi z} - r\tau'_{\varphi z} + \tau_{\varphi z}\Big] + \Pi_1,$$

$$U_\varphi(r,\varphi,z) = \frac{\sin m\varphi \cos\lambda_n z}{2G\lambda_n}\Big[-r\tau'_{\varphi z} - \tau_{\varphi z} + \lambda_n\tau_{r\varphi} - \qquad (5)$$
$$- m\tau_{zr}\Big] + \Pi_2,$$

$$U_z(r,\varphi,z) = \frac{\cos m\varphi \sin\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\Big[m\lambda_n r\tau_{zr} - \lambda_n r^2\tau'_{\varphi z} +$$
$$+ \lambda_n r\tau_{\varphi z} - \lambda_n^2 r\tau_{r\varphi}\Big] + \Pi_3.$$

По формулам Коши находим линейные деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\Big[-\lambda_n(r\tau''_{r\varphi} + 2\tau'_{r\varphi}) - m r\tau''_{zr} -$$
$$- r^2\tau'''_{\varphi z} + 3r\tau''_{\varphi z}\Big] + \bar{\Pi}_1,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{U_r}{r} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\Big[-r\tau''_{\varphi z} - (m^2+1)\tau'_{\varphi z} -$$
$$- (m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{\varphi z} - \lambda_n\tau'_{r\varphi} + \lambda_n(m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{r\varphi} - \qquad (6)$$
$$- m\tau'_{zr} - m(m^2-1)\frac{1}{r}\tau_{zr}\Big] + \bar{\Pi}_2,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{\cos m\varphi \cos\lambda_n z}{2G m\lambda_n}\Big[m\lambda_n^2 r\tau_{zr} - \lambda_n^2 r^2\tau'_{\varphi z} +$$
$$+ \lambda_n^2 r\tau_{\varphi z} - \lambda_n^3 r\tau_{r\varphi}\Big] + \bar{\Pi}_3.$$

Вариационные уравнения закона Гука имеют вид:

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_r-(\lambda\theta+2G\varepsilon_r)\right]\delta\varepsilon_r\,d\Omega=0,$$

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_\varphi-(\lambda\theta+2G\varepsilon_\varphi)\right]\delta\varepsilon_\varphi\,d\Omega=0, \qquad (7)$$

$$\iiint_{\Omega}\left[\sigma_z-(\lambda\theta+2G\varepsilon_z)\right]\delta\varepsilon_z\,d\Omega=0,$$

где $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$, $\theta=\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z$

Преобразовав выражения в круглых скобках (7) и составив вариации $\delta\varepsilon_r,\delta\varepsilon_\varphi,\delta\varepsilon_z$, получим

$$\sigma_r-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\lambda_n r(1-\nu)\tau''_{r\varphi}+\lambda_n(2-\nu)\tau'_{r\varphi}+\nu\left[\lambda_n(1-m^2)\tfrac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+\lambda_n r^3\right]\tau_{r\varphi}+(1-\nu)r^2\tau'''_{\varphi z}+(3-2\nu)r\tau''_{\varphi z}+\nu\left[(m^2+1)+\right.$$
$$\left.+\lambda_n^2 r^2\right]\tau'_{\varphi z}+\nu\left[(m^2-1)\tfrac{1}{r}+\lambda_n^2 r\right]\tau_{\varphi z}+m(1-\nu)r\tau''_{zr}+$$
$$+\nu m\tau'_{zr}+\nu\tau_{zr}\Big\}=0,$$

$$\sigma_\varphi-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\nu\lambda_n r\tau''_{r\varphi}+\lambda_n(1+\nu)\tau'_{r\varphi}+ \qquad (8)$$
$$+\left[(3\nu-1)(m^2-1)\tfrac{\lambda_n}{r}+\nu\lambda_n^3 r\right]\tau_{r\varphi}+\nu r^2\tau'''_{\varphi z}+(1+2\nu)r\tau''_{\varphi z}+$$
$$+\left[(1-\nu)(m^2+1)+\nu\lambda_n^2 r^2\right]\tau'_{\varphi z}+\left[(1-\nu)(m^2-1)\tfrac{1}{r}-\nu\lambda_n^2 r\right]\tau_{\varphi z}+$$
$$+\nu m r\tau''_{zr}+m(1-\nu)\tau'_{zr}+\left[(1-\nu)m(m^2-1)\tfrac{1}{r}-\nu m\lambda_n^2 r\right]\tau_{zr}\Big\}=0,$$

$$\sigma_z-\frac{1}{m\lambda_n(1-2\nu)}\Big\{\nu\lambda_n r\tau''_{r\varphi}+3\lambda_n\nu\tau'_{r\varphi}+\left[\lambda_n^3(1-\nu)r-\right.$$

$$-\nu(m^2+1)\lambda_n \frac{1}{r}\Big]\tau_{r\varphi} + \nu r^2 \tau_{\varphi z}''' + 4\nu r \tau_{\varphi z}'' + \Big[(1-\nu)\lambda_n^2 r^2 +$$

$$+\nu(m^2+1)\Big]\tau_{\varphi z}' - \Big[(1-\nu)\lambda_n^2 r - \nu(m^2-1)\frac{1}{r}\Big]\tau_{\varphi z} + \nu m r \tau_{zr}'' +$$

$$+\nu m \tau_{zr}' - \Big[(1-\nu) m \lambda_n^2 r - \nu m(m^2-1)\frac{1}{r}\Big]\tau_{zr}\Big\} = 0.$$

Для отыскания напряжений необходимо интегрировать уравнения (6) совместно с уравнениями (3) при выполнении условий на поверхности.

Такая задача является достаточно сложной, так как трудно подобрать интегрируемую комбинацию, для решения поставленной задачи.

Литература

I. Власов Б.Ф., Мартиновский В.Л. Вывод интегро-дифференциальных уравнений неразрывности деформаций второго вида в цилиндрической системе координат из вариационного принципа Кастильяно/ Моск. инж.-строит. ин-т -М., 1986. -8с. Деп. в ВИНИТИ, №4407-В.