ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ (РАСТЯЖЕНИЯ) УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА С ПРОДОЛЬНЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А.Е.Крушевский, А.З.Севенюк

Встатье [I] построена структура решения задачи о растяжении (сжатии) упругого параллелепипеда с цилиндрической полостью в узком классе степенных рядов. При этом предполагалось, что поперечные перемещения зависили лишь от двух координат, от одной из поперечных в направлении перемещения и продольной. Для построения структуры решения указанной задачи в первом приближении понадобились степенные ряды до 22-й степени включительно.

В данной статье снимается предположение о зависимости поперечных перемещений от двух координат, и структура решения строится в полном классе степенных рядов:

$$u=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m+1} y^{2n} U(z),$$

$$v=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m} y^{2n+1} V(z),$$

$$w=\sum_{m=0}\sum_{n=0} x^{2m} y^{2n} W(z)$$

где v , u - поперечные перемещения, w - продольные перемещения.

В частности, для первого приближения построения структуры понадобились степенные ряды до 9-ой степени включительно. Это позволяет облегчить задачу построения структуры решения для первого приближения. Задача свелась к составлению 6-и уравнений связей, из которых 5 уравнений представляют собой равенства нулю касательных напряжений $\tau_{zz}=\frac{x}{R}\tau_{xz}+\frac{y}{R}\tau_{yz}$ на цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$ и одно уравнение - равенство нулю касательных напряжений τ_{yz} на грани $y=\pm\frac{B}{2}$. Например, уравнение обращения τ_{zz} в нуль при x^2 и x^4 записывается в виде:

$$\tau_{rz}|_{x^4} = 0,$$

$$d_2 B_3\left[\frac{79R^2}{21\cdot 24} - \frac{106(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] - d_2 b^4\left[\frac{5R^2}{28} - \frac{124(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] +$$

$$+ d_2 a_4\left[\frac{45R^4}{12\cdot 21} - \frac{164(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] + d_2 a_5\left[\frac{5R^2}{72} - \frac{34(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] -$$

$$- d_2 c_1\left[\frac{2R^2}{21} - \frac{96(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] + d_2 C_2\left[\frac{3R^2}{7} - \frac{336(\gamma-1)}{5\gamma_2 d_2^2}\right] = 0$$

$$\tau_{zz}|_{x^6} = 0,$$

$$d_2 a_2\left[\frac{6(\gamma-1)}{\gamma^2 d_2^2} - \frac{R^2}{10}\right] - d_2 B_1\left[\frac{6(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2} - \frac{R^2}{10}\right] + d_2 B_3\left[-\frac{a^2R^2}{48} + \frac{27b^2R^2}{80} -\right.$$

$$\left.- \frac{467R^4}{1260} + \frac{(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2} + \frac{2(131\gamma-126)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} - \frac{849(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2} + \frac{24(\gamma-1)(\gamma-5)}{5\gamma_2 d_2^4}\right] +$$

$$+ d_2 a_5\left[\frac{77a^2R^2}{240} + \frac{b^2R^2}{240} - \frac{181R^4}{630} + \frac{163(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2} - \frac{(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{(29\gamma-28)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} + \frac{24(7\gamma-15)(\gamma-5)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right] + d_2 b^4\left[\frac{a^2R^2}{24} - \frac{b^2R^2}{20} + \frac{24R^4}{35} -\right.$$

$$- \frac{(\gamma-1)a^2}{2\gamma_2 d_2^2} + \frac{9(\gamma-1)b^2}{5\gamma_2 d_2^2} - \frac{4(63\gamma-59)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} - \frac{12\gamma(13\gamma-28)}{5\gamma_2^2 d_2^4} +$$

$$+ d_2 a_4\left[\frac{7a^2R^2}{30} + \frac{b^2R^2}{40} - \frac{11R^4}{210} - \frac{(\gamma-1)a^2}{\gamma_2 d_2^2} - \frac{3(\gamma-1)b^2}{10\gamma_2 d_2^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{(329\gamma-328)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} - \frac{6\gamma(29\gamma-54)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right] + 18 d_2 A_2\left[R^2 - \frac{140(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2}\right] +$$

$$+ d_2 C_0\left[\frac{3R^2}{20} - \frac{21(\gamma-1)}{\gamma_2 d_2^2}\right] + d_2 C_1\left[\frac{31a^2R^2}{240} + \frac{5b^2R^2}{12} + \frac{2R^4}{15} +\right.$$

$$\left.+ \frac{21(\gamma-1)a^2}{4\gamma_2 d_2^2} - \frac{253(\gamma-1)b^2}{10\gamma_2 d_2^2} - \frac{(97\gamma-122)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} - \frac{12(\gamma-1)(7\gamma+10)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right] +$$

$$+ d_2 C_2\left[-\frac{a^2R^2}{15} + \frac{b^2R^2}{16} - \frac{4R^4}{15} - \frac{(\gamma-1)a^2}{\gamma_2 d_2^2} + \frac{81(\gamma-1)b^2}{20\gamma_2 d_2^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{(577\gamma-602)R^2}{5\gamma_2 d_2^2} + \frac{12(\gamma-1)(7\gamma+10)}{5\gamma_2^2 d_2^4}\right] = 0$$

В этих уравнениях $a_2, a_4, a_5, b_1, b_3, b_2, c_0, c_1, c_2, A$ – искомые функции, зависящие от времени и продольной координаты z, $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_1 = \gamma - 2$, ν – коэффициент Пуассона.

$d_z = \frac{d}{dz}$ – оператор производной по z.

Остальные четыре уравнения связей не выписываем вследствие их громоздкости. Что касается нормальных напряжений σ_x на гранях $x = \pm\frac{a}{2}$, нормальных напряжений σ_y на гранях $y = \pm\frac{b}{2}$, радиальных напряжений σ_r на цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, а также касательных поперечных напряжений $\tau_{xy}, \tau_{r\varphi}$ на соответствующих поверхностях, то их обращений в нуль выполнено за счет исключения обобщенных перемещений из уравнений связей.

Таким образом, имеем шесть уравнений связей с десятью неизвестными функциями. Для замкнутости следует привлечь вариационное уравнение равновесия элементарного слоя [2]:

$$\frac{d}{dz}\int_F (T\cdot\vec{e}_z)\,\delta\vec{u}\,dF - \int_F T\;\delta E\,dF + \int_F \left(\vec{K} - \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\delta\vec{u} + \oint \frac{\vec{F}_n\,\delta\vec{u}\,dS}{\sqrt{1-n_z^2}} = 0$$

где T – тензор напряжений; δE – тензор возможной деформации; $\delta\vec{u} = \vec{e}_x\delta u + \vec{e}_y\delta v + \vec{e}_z\delta w$ – вектор возможных перемещений; F – площадь поперечного сечения; ρ – плотность материала; S – контурная координата; $\vec{n} = \vec{e}_x n_x + \vec{e}_y n_y + \vec{e}_z n_z$ вектор внешней нормали к поверхности тела.

В качестве первого приближения можно оставить 7 неизвестных функций $a_2, a_4, a_5, b_1, b_3, b_2, c_0$, для определения которых имеем шесть указанных связей и одно вариационное уравнение, составленное на возможном перемещении δw.

Литература

1. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Построение структуры решения задачи определения спектра частот продольных колебаний консольного стержня прямоугольного сечения с круглым отверстием// Теоретическая и прикладная механика: Респ.межведом.сб./ Минск. -1981. -Вып.8. -С. 3-6.
2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. - Мн.: Наука и техника, 1967. -228 с.