К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

Хвисевич В.М.

При действии высоких температур становится существенной зависимость упругих свойств тел, теплофизических параметров от температуры (коэффициенты теплопроводности и линейного расширения, модуль упругости и др.).

Рассмотрим краевую задачу неоднородной термоупругости в квазистатической постановке.

Температура Т считается найденной в результате решения краевой задачи теплопроводности типа Дирихле (коэффициент теплопроводности λ (Т) является функцией температуры).

Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия краевой задачи неоднородной термоупругости без учета массовых сил запишутся

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right) = -\frac{2(1+\nu)}{E^2}\frac{\partial E}{\partial x_j}\sigma_{ij}^T, \tag{I}$$

$$n_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] = \frac{1+\nu}{1-2\nu}\,n_i\int_0^T \alpha(T)\,dT .$$

где u_i – перемещения, δ_{ij} – символ Кроннекера, ν – коэффициент Пуассона, α (Т) – коэффициент линейного расширения, $E(T)$ – модуль упругости. Напряжения

$$\sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^T \alpha(T)\,dT\,\delta_{ij}\right] \tag{2}$$

Решение уравнений (I) разыскиваем в виде степенного ряда по малому параметру φ:

$$u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{n} \varphi^k \cdot u_i^{(k)}, \tag{3}$$

здесь φ – введенный согласно [I] малый параметр, значение которого определяется функцией E(Т).

Подставляя (3) в (I) получим последовательность краевых задач для $u_i^{(k)}$, т.е. краевая задача (I) сводится к последовательности краевых задач однородной термоупругости.

Для $U_i^{(0)}$ получим

$$\Delta U_i^{(0)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 U_k^{(0)}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right). \qquad (4)$$

Полное решение (4) выражено суммой частного решения U_i^T и общего решения теории упругости U_i^u

$$U_i^{(0)} = U_i^u + U_i^T. \qquad (5)$$

Общее решение U_i^u представлено потенциалом простого слоя и интегральные уравнения приведены в [2]. Частное решение разыскиваем как градиент функции W.

$$U_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \qquad (6)$$

Подставляя (5) в (4) и после преобразования имеем

$$W = -a\left[c\left(\oint_S æ(y)\frac{d(r/2)}{dn}dS + A_i\frac{r_{x_i}}{2}\right) - b\int_V T\frac{1}{r}dV\right] \qquad (7)$$

где $a = \alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}$, b и c - постоянные, x - фиксированная точка, y - точка интегрирования, n - внешняя нормаль к поверхности S, $r = |y-x|$, $æ(y)$ - плотность потенциала.

Напряжения выражаются так

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^T, \qquad (8)$$

где σ_{ij}^u - напряжения найденные после решения интегральных уравнений теории упругости [2], а

$$\sigma_{ij}^T = 2\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\Delta W\right). \qquad (9)$$

Модуль сдвига μ аппроксимируется в зависимости от свойства материала.

После определения σ_{ij}^0 решаем краевые задачи :

$$\Delta u_i^{(n)} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k^{(n)}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial(\ln E)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_j}\sigma_{ij}^{n-1},$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_l^{(n)}}{\partial x_l}\delta_{ij}\right]n_j = 0. \qquad (10)$$

Решение задач (I0) $u_i^{(n)}$ представим суммой:

$$u_i^{(n)} = u_i^{o} + u_i^{ч}, \qquad (11)$$

где u_i^{o} - общее решение интегральных уравнений теории упругости, $u_i^{ч}$ - частное решение, которое мы разыскиваем в виде

$$u_i^{ч} = f\iiint_V \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x_p}\right)\sigma_{jp}^{(n-1)}\right]u_{ij}\,dV, \qquad (12)$$

где u_{ij} - решение Кельвина.

Напряжения определяем так

$$\sigma_{ij}^{n} = \sigma_{ij}^{o} + \sigma_{ij}^{ч} \qquad (13)$$

где $\sigma_{ij}^{ч}$ - находим подставляя (I2) в уравнения Дюгамеля-Неймана, σ_{ij}^{o} - напряжения теории упругости [2] .

Литература

I. Trostel R. Stationare Warmespannungen mit temperatur - abhangigen Stofwerten."Ingenieur-Archiv", 26, 1958.

2. Хвисевич В.М. Прямое решение пространственных краевых задач стационарной термоупругости методом потенциала// Диссертация на соискание уч.ст. к.т.н. М. I980 -230с.