

РАСЧЕТ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРУЖИН,
НАВИТЫХ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

П.И.Соловей

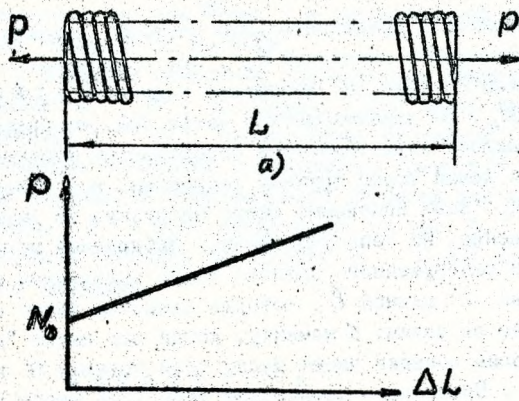
Пружина, навитая с предварительным натягом, характеризуется усилием предварительного натяжения N_0 . При приложении к пружине растягивающей силы P (рис. 1а) возникает удлинение $\Delta L \neq 0$ лишь тогда, когда $P > N_0$. Ее характеристика имеет вид, изображенный на рис. 1б. Угол наклона характеристики определяется жесткостью C . Предположим, что левый торец пружины закреплен, а к правому приложена сила $P > N_0$. Если мгновенно снять нагрузку, то витки пружины придут в движение. Из непосредственных наблюдений можно заметить, что вблизи разгруженного правого торца появляется зона посадки витков (рис. 2) длиной l , которая движется влево с постоянным увеличением ее длины. К моменту, когда все витки "посажены" друг на друга, зона посадки имеет массу всей пружины M и некоторую скорость V . После чего происходит удар всей массы пружины о левую опору. С помощью варьирования параметров N_0 , C , M и P можно создать значительные ударные импульсы без использования дополнительно присоединенных сосредоточенных масс.

Для приближенной оценки ударного импульса рассмотрим дискретную модель пружины [1]. Пусть имеется упругий невесомый стержень AB (рис. 3а) длиной l_0 , разделенный с помощью абсолютно жестких перегородок на n частей. Осевая жесткость стержня C . При растяжении стержня сила N_0 его длина увеличится на величину $\Delta l_0 = N_0/C$ и станет равной L_0 :

$$L_0 = l_0 + \Delta l_0$$

Тогда расстояние между перегородками увеличится и станет равным L_0/n . В этом состоянии между перегородками устанавливаются абсолютно жесткие элементы длиной L_0/n и массой M/n . Правые торцы элементов жестко соединяются с соответствующими перегородками. После снятия нагрузки N_0 внутренний стержень оказывается растянутым. Если такую кассету из n элементов растянуть силой $P > N_0$ (рис. 3б), то незакрепленные торцы элементов и перегородок разойдутся. Очевидно, что данная дискретная модель имеет статическую характеристику (рис. 1б), соответствующую пружине.

На рис. 4а изображена расчетная схема в деформированном состоянии. Обозначим через W_1 и W_2 перемещения сечений, где



б)

рис. 1

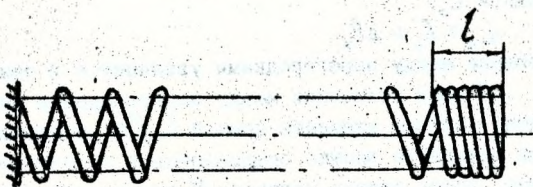
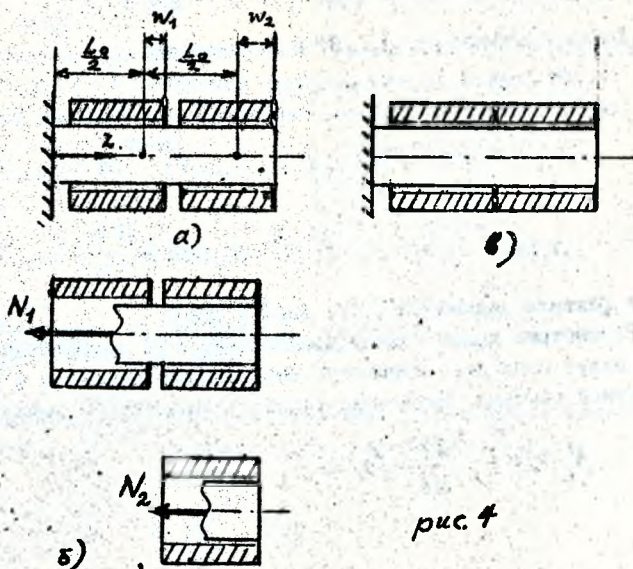
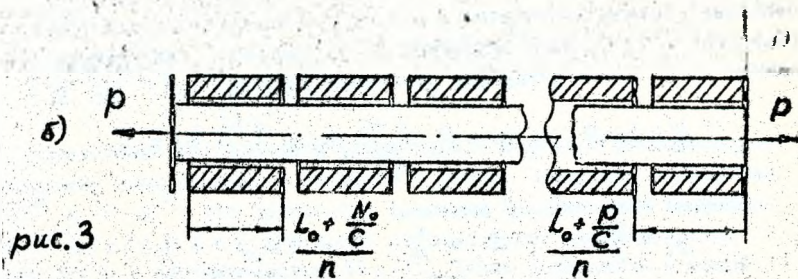
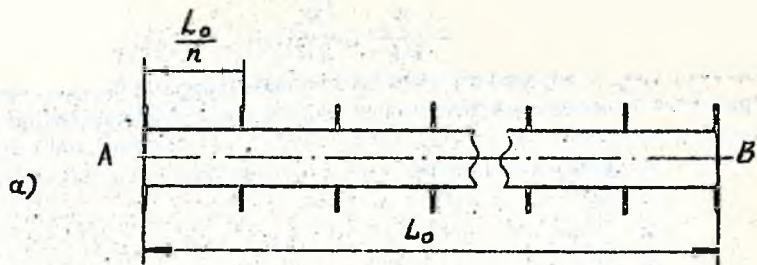


рис. 2



закреплены массы. Так как $n=2$, то

$$w_1 = \frac{N_1}{2C}, \quad w_2 = \frac{N_1}{2C} + \frac{N_2}{2C} \quad (1)$$

где: N_1, N_2 - внутренние силы на соответствующих участках (рис. 4б). Уравнения движения для отсеченных частей, изображенных на рис. 4б; будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \frac{M}{2} \frac{d^2 w_2}{dt^2} + N_1 &= 0, \\ \frac{M}{2} \frac{d^2 w_2}{dt^2} + N_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Движение системы начинается в момент $t=0$ после того, как растягивающая сила $P (> N_0)$ была мгновенно снята. То есть, для системы уравнений (1..2) имеем следующие начальные условия:

$$N_1(0) = P, \quad N_2(0) = P, \quad \frac{dw_1}{dt}(0) = \frac{dw_2}{dt}(0) = 0. \quad (3)$$

Введем безразмерные величины

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \frac{2C}{P} w_i, \quad x_i = \frac{N_i}{P}, \quad i=1,2, \\ \tau &= \omega t, \quad \omega = 2\sqrt{\frac{C}{M}}, \quad () = \frac{d}{dt}() \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда соотношения (1..3) принимают вид

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + x_2; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad (7)$$

Точное решение задачи (6), (7) дано в [1].

Рассмотрим далее задачу для системы с n элементами (рис. 5). Здесь будут проходить процессы, аналогичные процессам в двух-элементной системе. Начальные условия в момент $t=0$ имеют вид (3)

$$N_i(0) = P, \quad \frac{dw_i}{dt}(0) = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (8)$$

На интервале времени $T^{(1)} = \{t | 0 \leq t \leq t_1\}$ система будет иметь n степеней свободы и в момент $t = t_1$ происходит удар n^{20} тела о $(n-1)^{20}$. Далее на интервале $T^{(2)} = \{t | t_1 \leq t \leq t_2\}$ система будет иметь $(n-1)$ степень свободы. Причем, $(n-1)^{20}$ тело имеет массу двух элементов $2M/n$. Начальные условия определяются с учетом сохранения импульса системы:

$$W_i^{(2)}(t_{1+}) = W_i^{(1)}(t_{1-}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\frac{dW_i^{(2)}}{dt}(t_{1+}) = \frac{dW_i^{(1)}}{dt}(t_{1-}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$2 \frac{M}{n} \frac{dW_{n-1}^{(2)}}{dt}(t_{1+}) = \frac{M}{n} \frac{dW_{n-1}^{(1)}}{dt}(t_{1-}) + \frac{M}{n} \frac{dW_n^{(1)}}{dt}(t_{1-})$$

Образование на свободном конце тела с массой $2M/n$ моделирует образование зоны посадки в реальной г ужине. Следующие соударения $(n-1)^{20}$ и $(n-2)^{20}$ тел происходит в момент t_2 . При этом на интервале $T^{(3)} = \{t | t_2 \leq t \leq t_3\}$ на конце стержня будет двигаться тело массой $3M/n$ и протяженностью $3L_0/n$. Таких соударений в самой системе будет $n-1$. Следующее n^{20} соударение - это удар всей системы о левую опору.

Таким образом, при движении на k^{om} интервале $T^{(k)} = \{t | t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$ система имеет $(n+1-k)$ степеней свободы. Зона посадки состоит из k тел с общей массой kM/n . Начальные условия определяются как:

$$W_i^{(k)}(t_{k-1+}) = W_i^{(k-1)}(t_{k-1-}); \quad i = 1, 2, \dots, n+1-k,$$

$$\frac{dW_i^{(k)}}{dt}(t_{k-1+}) = \frac{dW_i^{(k-1)}}{dt}(t_{k-1-}), \quad i = 1, 2, \dots, n+1-k,$$

$$k \frac{M}{n} \frac{dW_{n+1-k}^{(k)}}{dt}(t_{k-1+}) = \frac{M}{n} \frac{dW_{n+1-k}^{(k-1)}}{dt}(t_{k-1-}) + (k-1) \frac{M}{n} \frac{dW_{n+2-k}^{(k-1)}}{dt}(t_{k-1-}).$$

Уравнения движения здесь удобно составлять, рассматривая движение отсеченной по $j^{ому}$ элементу части. Пусть $t \in T$:

$$\frac{M}{n} \sum_{i=j}^n \frac{d^2 W_i^{(1)}}{dt^2} + N_j^{(1)} = 0$$

(II)

Из (II) исключим перемещения $W_i^{(1)}$ с помощью соотношений упругости:

$$W_i = \sum_{s=1}^l \frac{N_s}{n c} \quad (12)$$

Уравнение (II) принимает вид

$$\frac{M}{n^2 c} \sum_{i=j}^n \sum_{s=1}^l \frac{d^2 N_s^{(1)}}{dt^2} + N_j^{(1)} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Аналогично (4) введем безразмерные обозначения

$$y_i = \frac{n c}{p} W_i, \quad x_i = \frac{N_i}{p}, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (14)$$

$$\tau = \omega t, \quad \omega = n \sqrt{\frac{c}{M}}, \quad ()' = \frac{d}{d\tau} ()$$

Тогда уравнения (13) записываются как

$$\sum_{i=j}^n \sum_{s=1}^l \ddot{x}_s^{(1)} + x_j^{(1)} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

которые удобно представить в виде

$$\sum a_{js} \ddot{x}_s^{(1)} + x_j^{(1)} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$a_{js} = n+1-s \varphi(s-j-1) - j \varphi(j-s) \quad (17)$$

где: $\varphi(x)$ - функция Хевисайда.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Система уравнений (16) в матричной форме принимает вид

$$A X^{(1)} + X^{(1)} = 0, \quad (18)$$

$$A^{(n)} = \|a_{ij}\|, \quad X^{(n)\tau} = \|x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\|, \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

Начальные условия

$$\tau=0, \quad x_i^{(1)}=1, \quad \dot{x}_i^{(1)}=0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

При движении на k -м участке (время - $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$), система уравнений движения имеет вид (18)

$$A^{(k)} \ddot{X}^{(k)} + \dot{X}^{(k)} = 0,$$

$$A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1-k,$$

$$X^{(k)T} = \left\| x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n+1-k}^{(k)} \right\|. \quad (20)$$

Начальные условия для системы (20) определяются при $\tau = \tau_{k-1}$ из соотношений (10)

$$x_i^{(k)}(\tau_{k-1}) = x_i^{(k-1)}(\tau_{k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n+1-k,$$

$$\dot{x}_i^{(k)}(\tau_{k-1}) = \dot{x}_i^{(k-1)}(\tau_{k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n+1-k,$$

$$\dot{x}_{n+1-k}^{(k)}(\tau_{k-1}) = \dot{x}_{n+1-k}^{(k-1)}(\tau_{k-1}) + \frac{k-1}{k} \dot{x}_{n-k}^{(k-1)}(\tau_{k-1}). \quad (21)$$

Время ударов τ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ определяется из условия, что внутренняя сила $N_{n+1-k}^{(n)}$ становится равной силе предварительного натяга N_0 или

$$x_{n+1-k}^{(k)}(\tau_k) = \beta. \quad (22)$$

Если $k = n$, то для определения ударного импульса всей системы нет необходимости решать уравнение (22), а достаточно воспользоваться энергетическим соотношением [1]

$$\dot{x}_1^{(n)2}(\tau_n) = \dot{x}_1^{(n)2}(\tau_{n-1}) - \beta^2 + \left[\dot{x}_1^{(n-1)}(\tau_{n-1}) + \frac{n-1}{n} \dot{x}_2^{(n-1)}(\tau_{n-1}) \right]^2 \quad (23)$$

Величина ударного импульса определяется как

$$|S(\tau_{n-1})| = N_0 \sqrt{\frac{M}{c}} f(\beta), \quad f(\beta) = \frac{1}{\beta} \left| \dot{x}_1^{(n)}(\tau_{n-1}) \right| \quad (24)$$

Таким образом, по уравнениям (16...23) можно произвести расчет системы с любым n и определить величину ударного импульса (24). Приближенное решение поставленной задачи приведено в [1].

Обсудим полученные результаты. Появление зоны посадки означает наложение связей на движение частиц системы. Для образования этих связей необходимо затратить некоторую энергию. Если предложить идеальный процесс, когда появление жесткой области происходит без потерь энергии, то возможно

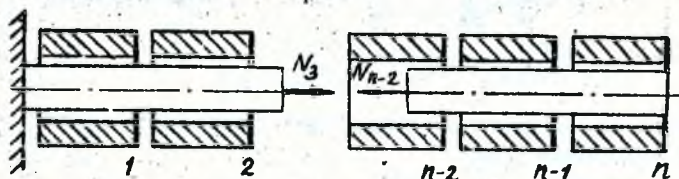


рис. 5

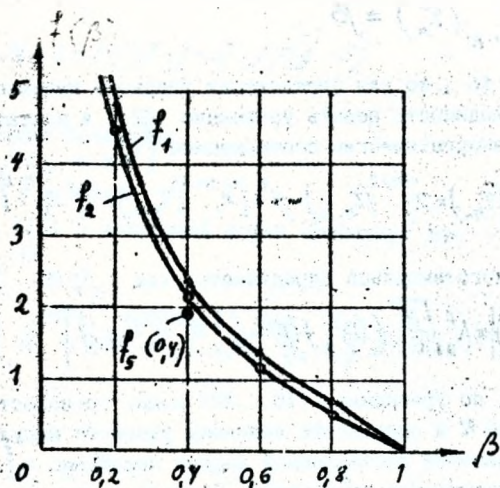


рис. 6

происходит без потерь энергии, то возможно записать уравнение баланса энергии в следующем виде

$$\frac{M V^2}{2} + \frac{N_0^2}{2C} = \frac{P^2}{2C} \quad (25)$$

где: V - скорость всей системы в момент удара
Из (25) находим

$$V = \frac{P}{\sqrt{CM}} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (26)$$

Или, переходя к ранее принятым обозначениям

$$\dot{x}_1(\tau_{n-}) = \sqrt{1 - \beta^2}$$

Тогда выражение для импульса имеет вид

$$|S(\tau_{n-})| = N_0 \sqrt{\frac{M}{C}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \quad (27)$$

Выражение (27) соответствует случаю $n=1$ - когда нет внутренних соударений. Поэтому перепишем (27) в виде

$$|S(\tau_{n-})| = N_0 \sqrt{\frac{M}{C}} f_1(\beta). \quad (28)$$

На рис. 6 приведены зависимости $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ и показана точка $f_1(0,4)$, полученная приближенно [1].

Рассмотренный выше случай абсолютно неупругого взаимодействия между элементами системы соответствует наиболее энергоемкому способу образования связей. Любое уточнение модели - введение дополнительных жесткостей, учет контактной податливости между витками и т.д., - приведет к расчету более близкому к идеальному. В то же время рис. 6 показывает, что отличия будут не весьма существенными. Поэтому для расчета ударного импульса пружины с предварительным натягом можно пользоваться зависимостью (27). Для расчета движения отдельных точек пружины или в случае необходимости учесть силы, распределенные по длине пружины, нужно использовать многоэлементную модель.

Л и т е р а т у р а

1. Соловей П.И. Динамика пружины, навитой с предварительным натягом / Брестский инж.-стр. ин-т. -Брест, 1981. -30с. Деп. в БелНИИТИ #237.