НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

В.А.Савченко, С.В.Черненко

Пластинки являются распространенными элементами всевозможных конструкций и машин и находят широкое применение в конструкциях новой техники.

Теория поперечного изгиба прямоугольных пластин постоянной толщины и толщины, изменяющейся вдоль какой-либо координатной оси достаточно подробно изучена. Однако, в силу ряда конструктивных соображений и технологических особенностей, а также при проектировании конструкций минимального веса необходимо осуществлять прочностной расчет пластин, толщина которых h является функцией поверхностных координат. Возникающие при этом трудности связаны с невозможностью получения точного решения разрешающего уравнения пластинки произвольной жесткости, представляющей собой дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами.

В настоящей работе рассмотрен численный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольных свободно опертых пластин произвольной жесткости, основанный на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений. Все основные операции метода представлены в матричной записи. Алгоритм апробирован на решении ряда конкретных задач.

Разрешающее уравнение прямоугольной пластинки переменной толщины

Рассматривается прямоугольная пластинка (рис. I) со сторонами a и b. Толщина пластинки $h(x, y)$ является произвольной функцией декартовых координат x, y. Предполагается, что во всей прямоугольной области G толщина пластинки $h(x, y)$ изменяется плавно, без резких скачков. Тогда выражения для изгибающих M_x, M_y и крутящего M_{xy} моментов, выведенные для пластинки постоянной толщины, остаются применимыми с достаточной точностью и в этом случае:

$$M_x = -D(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \qquad (I)$$

$$M_y = -D(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right);$$

$$\mathcal{M}_{xy} = \mathcal{M}_{yx} = \mathcal{D}(x,y)(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{D}(x,y)$ – цилиндрическая жесткость как функция координат

$$\mathcal{D}(x,y) = \frac{E h^3(x,y)}{12(1-\nu^2)}, \tag{3}$$

E – модуль упругости первого рода; W – нормальный прогиб; ν – коэффициент Пуассона.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента пластинки имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_y}{\partial y^2} = -q(x,y), \tag{4}$$

где $q(x,y)$ – интенсивность внешней нагрузки.

Подставляя выражения для изгибающих моментов (I), (2) в уравнение (4), получим

$$\mathcal{D}\Delta\Delta W + 2\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x}\frac{\partial \Delta W}{\partial x} + 2\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y}\frac{\partial \Delta W}{\partial y} + \Delta\mathcal{D}\Delta W -$$
$$-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = q. \tag{5}$$

Здесь символом Δ обозначен оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Вводя обозначения

$$L(\mathcal{D},W) = \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{7}$$

и учитывая (6), разрешающее дифференциальное уравнение пластинки переменной толщины (5) запишем в виде

$$\Delta(\mathcal{D}\Delta W) - (1-\nu)L(\mathcal{D},W) = q. \tag{8}$$

Сведение разрешающего уравнения четвертого порядка к системе уравнений четвертого порядка. Векторная формулировка краевой задачи.

Изгибающие моменты в пластинке определяются выражениями (I). Найдем сумму этих моментов

$$M_x + M_y = (1+\nu)D(x,y)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

и введем, аналогично [I], M - приведенный изгибающий момент

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = D(x,y)\Delta W. \tag{10}$$

Тогда, относительно двух переменных - нормального прогиба W и приведенного момента M из ур нений (8) и (10) получим следующую систему

$$\begin{aligned} &\Delta M - (1-\nu) L(D, W) = q, \\ &M - D\Delta W = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где каждое из уравнений не выше второго порядка. В уравнениях (II) перейдем к безразмерным величинам, для чего введем обозначения

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{x}{a}; \qquad \beta = \frac{y}{b}; \qquad \lambda = \frac{a}{b}; \\ \overline{W} = \frac{W}{h_0}; \qquad \overline{D}(\alpha,\beta) = \frac{D(\alpha,\beta)}{D_0}; \\ \overline{M} = \frac{M}{Eh_0^2}; \qquad \overline{q} = \frac{q}{E}; \\ \mu = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h_0^2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь a и b – размеры сторон прямоугольной пластинки;
D_0, h_0 – соответственно некоторая характерная жесткость и толщина пластинки.

С учетом соотношений (I2) система уравнений (II) примет вид

$$\frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial \beta^2} + \lambda^{-2} \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\nu}{\mu} L(\overline{D}, W) = \frac{\overline{q} b^2}{h_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \beta} - \mu \frac{\overline{M}}{\overline{D}} = 0. \tag{I3}$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец, компонентами которого являются искомые величины W и M.

$$\vec{Z} = (\overline{W}, \overline{M}). \tag{I4}$$

Тогда, переходя к матричной записи, уравнения (I3) представим в следующей форме

$$[A]\vec{Z}_{\alpha\alpha} + [B]\vec{Z}_{\beta\beta} + [C]\vec{Z}_{\alpha\beta} + [G]\vec{Z} = \vec{R} \tag{I5}$$

Здесь индекс при вектор-функции $\vec{Z}$ означает дифференцирование по соответствующей безразмерной координате.

В уравнении (I5) ненулевые элементы квадратных матриц $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[G]$, имеющих порядок $[2 \times 2]$, а также вектор $R_{[1\times 2]}$, определяются следующими выражениями

$$a_{11} = \frac{\nu-1}{\mu} \overline{D}_{\beta\beta}; \qquad a_{12} = \lambda^{-2}; \qquad a_{21} = 1;$$

$$b_{11} = \frac{\nu-1}{\mu} \overline{D}_{\alpha\alpha}; \qquad b_{12} = 1; \qquad b_{21} = \lambda^2; \tag{I6}$$

$$c_{11} = -\frac{2(\nu-1)}{\mu} \overline{D}_{\alpha\beta}; \; q_{22} = -\frac{\mu}{\overline{D}}; \; r_1 = \frac{\overline{q} b^2}{h_0^2}.$$

Выразим граничные условия свободного опирания краев прямоугольной пластинки в компонентах вектора $\vec{Z}$.

При $x = 0$, a имеем $W = 0$ и $M_x = 0$; (I7)

При $y = 0$, b имеем $W = 0$ и $M_y = 0$. (I8)

Учитывая зависимость (I0) и переходя к безразмерным величинам, запишем условия (I7) и (I8) в векторной форме

$$\vec{Z}\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \alpha=1}} = 0; \qquad \vec{Z}\Big|_{\substack{\beta=0\\ \beta=1}} = 0. \tag{19}$$

Метод блочной итерации

В безразмерных переменных α, β прямоугольная область G с любым отношением сторон λ отображается в квадратную со стороной, равной единице (рис. I). Разделим каждую из сторон на N равных частей и покроем область G квадратной сеткой. Шаг сетки будет $\delta = 1/N$. Представим векторное уравнение (I5) в конечных разностях, для чего применим центральные операторы, имеющие погрешность квадрата шага $O(h^2)$.

$$\vec{Z}_{\alpha\alpha} = \frac{\vec{Z}_{i+1,j} - 2\vec{Z}_{i,j} + \vec{Z}_{i-1,j}}{\delta^2};$$

$$\vec{Z}_{\beta\beta} = \frac{\vec{Z}_{i,j+1} - 2\vec{Z}_{i,j} + \vec{Z}_{i,j-1}}{\delta^2}; \tag{20}$$

$$\vec{Z}_{\alpha\beta} = \frac{\vec{Z}_{i+1,j+1} + \vec{Z}_{i-1,j-1} - \vec{Z}_{i-1,j-1} - \vec{Z}_{i+1,j-1}}{4\delta^2}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

Подставляя разностные операторы (20) в уравнение (I5) для каждой внутренней точки (i, j) сеточной области G_h получим

$$[A_{ij}]\vec{Z}_{i+1,j} + [Q_{ij}]\vec{Z}_{i,j} + [A_{ij}]\vec{Z}_{i-1,j} + [B_{ij}]\vec{Z}_{i,j-1} +$$
$$+ \frac{1}{4}[C_{ij}]\left(\vec{Z}_{i-1,j-1} - \vec{Z}_{i+1,j-1}\right) + [B_{ij}]\vec{Z}_{i,j+1} + \tag{21}$$
$$+ \frac{1}{4}[C_{ij}]\left(\vec{Z}_{i+1,j+1} - \vec{Z}_{i-1,j+1}\right) = \frac{R_{ij}}{N^2}.$$

Здесь элементы квадратной $[2 \times 2]$ матрицы Q_{ij} определяются следующими выражениями

$$q^{11}_{i,j} = -\frac{2(\nu-1)}{\mu}\left(\Delta\bar{\mathcal{D}}\right)_{i,j}; \quad q^{12}_{i,j} = -2(1+\lambda^{-2});$$

$$q^{21}_{i,j} = -2\left(1+\lambda^2\right); \qquad q^{22}_{i,j} = -\frac{\mu}{N^2\bar{\mathcal{D}}}. \tag{22}$$

Узлы сетки, оказавшиеся на границе области G_h, будем называть граничными узлами или границей Γ_h области G_h. Для этих узлов граничные условия (15) запишем в виде

$$\mathcal{Z}\Big|_{\substack{0,j\\N,j}} = 0; \qquad \mathcal{Z}\Big|_{\substack{i,0\\i,N}} = 0 \tag{23}$$

Множество узлов области $G_h + \Gamma_h$, которые расположены на одной и той же горизонтальной прямой $j = const$, назовем строкой сеточной области.

Для решения краевой задачи (2I)-(23) применим "однострочечный" метод блочной итерации. Обозначим индекс итерационного процесса через К (К≫ I). Перенося подчеркнутые члены в уравнении (2I) в правую часть, получим

$$[A_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i+1,j} + [Q_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i,j} + [A_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}_{i-1,j} = \frac{R_{i,j}}{N^2} -$$

$$-[B_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i,j-1} - \frac{1}{4}[C_{i,j}]\left(\vec{\mathcal{Z}}^{(k)}_{i-1,j-1} - \mathcal{Z}^{(k)}_{i+1,j-1}\right) - \tag{24}$$

$$-[B_{i,j}]\vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i,j+1} - \frac{1}{4}[C_{i,j}]\left(\vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i+1,j+1} - \vec{\mathcal{Z}}^{(k-1)}_{i-1,j+1}\right).$$

Решение системы уравнений (24) при заданных граничных условиях (23) будем искать в виде (матричные скобки для удобства записи опускаем)

$$\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j} = P^{(k)}_{i,j}\,\mathcal{Z}^{(k)}_{i+1,j} + q_{i,j} \quad \begin{pmatrix} j>0=const \\ i=1,2,\dots,N-1 \end{pmatrix} \tag{25}.$$

Здесь $P_{i,j}$ - неизвестные матрицы $[2 \times 2]$ не зависящие от порядкового номера итерационного процесса;

$q_{i,j}^{(k)}$ - векторы размерности 2, которые подлежат определению.

Используя формулу (25) как рекуррентную зависимость, найдем

$$z_{i-1,j}^{(k)} = P_{i-1,j} z_{i,j}^{(k)} + q_{i-1,j}^{(k)} = P_{i-1,j}\left[P_{i-1,j} z_{i+1,j}^{(k)} + q_{i,j}^{(k)}\right] + q_{i-1,j}^{(k)} \quad (26)$$

Подставим выражения (25) и (26) в разностное уравнение (24). Собирая коэффициент при $z_{i+1}^{(k)}$ и приравнивая его нулю, а свободный член - правой части уравнения (24), получим

$$\begin{gathered} (A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}) P_{i,j} + A_{i,j} = 0, \\ (A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}) q_{i,j}^{(k)} + A_{i,j} q_{i-1,j}^{(k)} = F_{i,j}^{(k-1)} \end{gathered} \quad (27)$$

где вектор правой части

$$\begin{aligned} F_{i,j}^{(k-1)} &= \frac{R_{i,j}}{N^2} - B_{i,j} z_{i,j-1}^{(k)} - \frac{1}{4} C_{i,j}\left[z_{i-1,j-1}^{(k)} - z_{i+1,j-1}^{(k)}\right] - \\ &- B_{i,j} z_{i,j+1}^{(k-1)} - \frac{1}{4} C_{i,j}\left[z_{i+1,j+1}^{(k-1)} - z_{i+1,j-1}^{(k-1)}\right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Выполнение условий (27) гарантирует возможность представления решения уравнения (24) в виде (25).

Из выражений (27) получаем рекуррентные соотношения для определения матриц $P_{i,j}$ и векторов $q_{i,j}^{(k)}$

$$\begin{gathered} P_{i,j} = -(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j})^{-1} A_{i,j}; \\ q_{i,j}^{(k)} = (A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j})^{-1}\left[F_{i,j}^{(k-1)} - A_{i,j} q_{i-1,j}^{(k)}\right]. \end{gathered} \quad (29)$$

Начальные значения прогоночных коэффициентов $P_{0,j}$ и $q_{0,j}$ можно определить, сравнив первые граничные условия ($i = 0$) с формулой (25), записанной для $i = 0$:

$$P_{0,j} = q_{0,j} = 0 \quad (30)$$

Тогда из (29) для $i = 1$ получим

$$P_{1,j} = -Q_{1,j}^{-1} A_{1,j}; \quad q_{1,j}^{(k)} = Q_{1,j}^{-1} F_{1,j}^{(k-1)} \quad (31)$$

При решении системы уравнений приходится обращать матрицы всего второго порядка. Элементы обратных матриц можно получить в явном виде, а именно, для матрицы

$$H_{i-1,j} = \left(A_{i,j} P_{i-1,j} + Q_{i,j}\right)^{-1} \tag{32}$$

имеем

$$h^{11} = h^{*}_{22}\Delta^{-1};\quad h^{12} = h^{*}_{12}\Delta^{-1};\quad h^{21} = h^{*}_{21}\Delta^{-1};\quad h^{22} = h^{*}_{11}\Delta^{-1},$$

где h^{*}_{mn} - элементы необращенной матрицы

$$h^{*}_{mn} = \sum_{k=1}^{2} a_{mk} p_{kn} + q_{mn};$$

$$\Delta h^{*}_{11} h^{*}_{22} - h^{*}_{21} h^{*}_{12} \qquad (m, n = 1, 2)$$

Для обратной матрицы

$$G_{1,j} = Q^{-1}_{1,j} \tag{33}$$

элементами будут выражения

$$q_{11} = q_{22}\Delta_1^{-1};\quad q_{12} = -q_{21}\Delta_1^{-1};\quad -q_{21} = q_{12}\Delta_1^{-1};\quad q_{11} = \Delta_1^{-1},$$

где

$$\Delta_1 = q_{11} q_{22} - q_{21} q_{12}$$

Теперь формулы (29) и (3I) позволяют определить все неизвестные коэффициенты $P_{1,j}$, $P_{2,j}$, ... , $P_{N-1,j}$ и $q^{(k)}_{1,j}, q^{(k)}_{2,j}, \ldots, q^{(k)}_{N-1,j}$ (прямой ход матричной прогонки).

Значения дискретной вектор-функции $Z_{i,j}$ определяются в обратной последовательности.

Из левых граничных условий (23) имеем

$$Z^{(k)}_{N,j} = 0 \tag{34}$$

Тогда, воспользовавшись формулой 25), запишем

$$Z^{(k)}_{N-1,j} = P_{N-1,j} Z^{(k)}_{N,j} + q^{(k)}_{N-1,j}$$

откуда

$$Z^{(k)}_{N-1,j} = q^{(k)}_{N-1,j} \tag{35}$$

Наконец, по рекуррентной формуле (25) поочередно определяем $\mathcal{Z}^{(k)}_{N-2,j},\ \mathcal{Z}^{(k)}_{N-3,j}, \dots, \mathcal{Z}^{(k)}_{1,j}$ (обратный ход матричной прогонки).

Определение векторов $\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j}$ на каждом шаге итерационного процесса осуществляется последовательно для всех значений $j = 2, 3, \dots, N-1$. Процесс заканчивается, если выполняется условие

$$\lim\left\{\|\mathcal{Z}^{(k)}_{i,j}\| - \|\mathcal{Z}^{(k-1)}_{i,j}\|\right\} < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычислений.

Следует отметить, что при решении задач об изгибе пластинок методом конечных разностей для вычисления значений производных с нужной степенью точности необходимо брать сетку с более мелким шагом, чем для вычисления искомой функции прогиба.

"Двустрочечный" метод блочной итерации дает более быструю сходимость итерационного процесса по сравнению с однострочечным.

В "р-строчечном" методе первое приближение векторов находится сразу на р строках путем решения методом прогонки системы "р" уравнений. Чем больше "р", тем быстрее сходится итерационный процесс, но более трудоемким становится выполнение каждой итерации. Если р $= N-1$, то процесс состоит всего из одной итерации и совпадает с методом матричной прогонки для уравнений второго порядка в обыкновенных разностях. Заметим, что для возможности применения "р-строчечного" метода необходимо, чтобы число строк $N-1$ нацело делилось на "р".

Численный анализ прямоугольной пластинки с непараллельными образующими гранями, нагруженной гидростатическим давлением.

Рассматривается пластинка, толщина которой задана линейной функцией вида

$$h(\alpha, \beta) = t(\alpha + \beta) + c \tag{36}$$

и в угловых точках пластины $h(\alpha, \beta)$ принимает значения

$$h(A) = c\,; \qquad h(C) = 2t + c\,;$$

$$h(B)=t+c; \quad h(D)=t+c \tag{37}$$

Безразмерная цилиндрическая жесткость пластины $\overline{D}$ (α,β) определяется выражением

$$\overline{D}(\alpha,\beta)=\frac{h^3(\alpha,\beta)}{h_0^3}=\frac{[t(\alpha,\beta)+c]^3}{h^3} \tag{38}$$

Гидростатическое давление, действующее на пластинку представим в виде

$$\bar{q}=q_0\frac{\alpha}{E} \tag{39}$$

С учетом (38) и (39) ненулевые элементы матриц коэффициентов уравнения (24) примут вид

$$a_{11}=-\frac{t^2[t(i+j)+NC]}{2(1+\nu)a^2h_0N}; \quad b_{11}=a_{11};$$

$$c_{11}=-2a_{11}; \quad q_{11}=-4a_{11}; \tag{40}$$

$$q_{12}=-\frac{12(1-\nu^2)a^2h_0N}{[t(i+j)+NC]^3}; \quad z_1=\frac{q_{0i}b^2}{Eh_0^2N^2}.$$

Численные результаты получены для пластинок переменной толщины со следующими параметрами

$\lambda^{-1}=\frac{b}{a}=1,5;$ $h_0=1$ мм; $t=0,1;\ 0,3;\ 0,7$ при С = I мм а также для пластинки постоянной толщины

Во всех рассматриваемых примерах принималось q =0,023 МПа; ν = 0,3; Е = 2 · I0^5 МПа. При этом использовалась конечно-разностная сетка 8 х 8, позволяющая получить численные результаты для пластинки постоянной толщины, отличающиеся от известных справочных данных на 0,0I %.

На рис.4 приведено распределение нормального прогиба вдоль сеточных линий α = 0,5 (сплошные кривые и β = 0,5 (штриховые

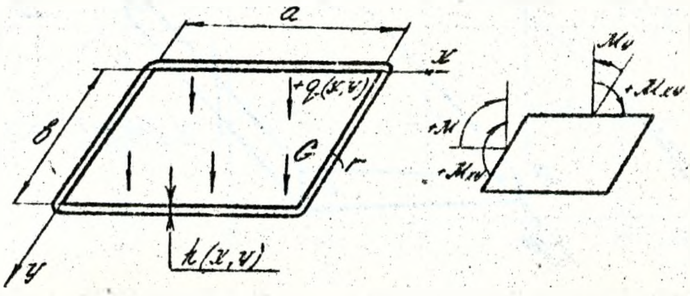

Рис. I Пластинка произвольной толщины

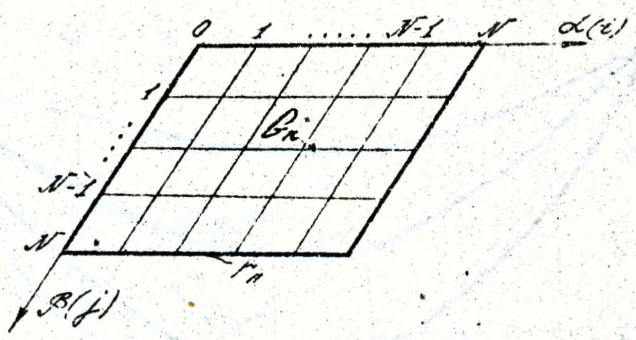

Рис. 2 Аппроксимация пластинки сеточной областью

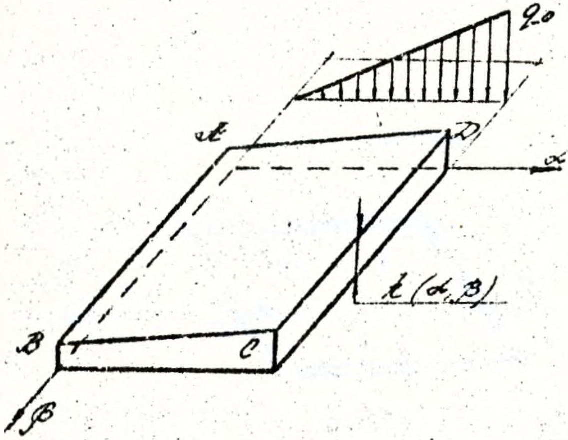

Рис. 3 Пластинка при гидростатическом нагружении

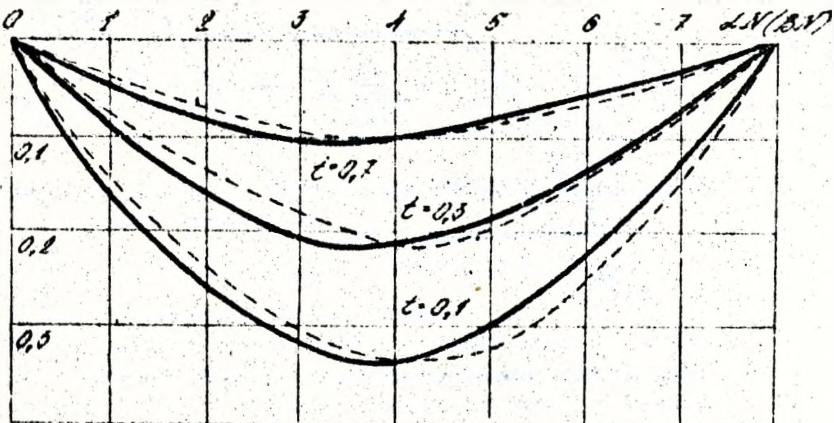

Рис. 4 Нормальный прогиб пластинки

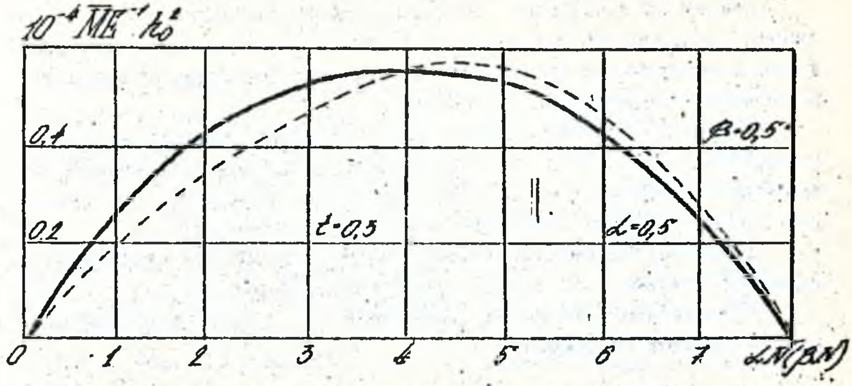

Рис. Б Изменение приведенного момента вдоль координатных осей линий

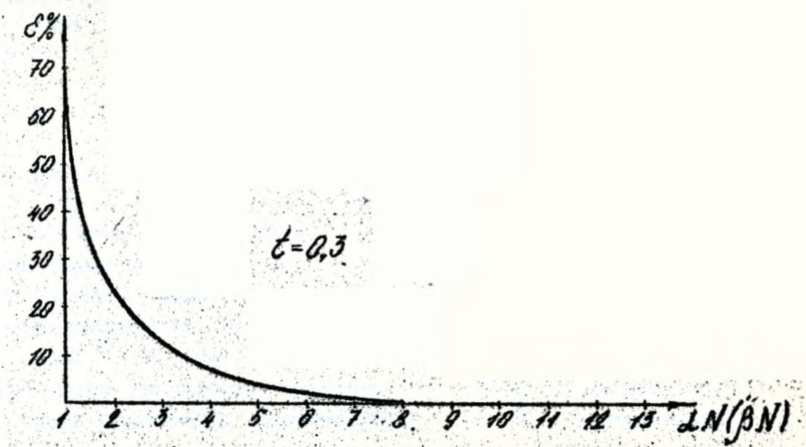

Рис. 6 График сходимости итерационного процесса

кривые).

Как видно из графика, незначительная непараллельность образующих поверхностей пластинки приводит к качественному (смещение точки максимального прогиба W_{max}) и значительному количественному изменению нормального прогиба.

На рис. 5 показано изменение приведенного момента вдоль координатных линий α , β , проходящих через центр пластинки, при значении параметра t = 0,3. Варьирование параметра t не приводит к существенному изменению приведенного момента $\overline{M}$.

Характер сходимости итерационного процесса для пластинки переменной толщины (t = 0,3) представлен на рис. 6.

Относительная точность вычислений ε = 0,001 достигается уже на восьмой итерации.

Литература

1. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. -М.: Изд-во Московского университета, 1958. -512с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. -М.: Гостехиздат, 1948. - 412с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах./Под ред. Н.А.Биргера и Я.Т.Пановко. - М.: Машиностроение, 1968. - Том 2, 478с.