Ф-ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ПАРОЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.И.Ковалевич

Изучение однородных Ф-пространств, которые являются естественным обобщением симметрических пространств, связывается с изучением групп Ли G и их произвольных эндоморфизмов Ф. Большое количество работ посвящено изучению однородных пространств, порожденных группой автоморфизмов группы Ли.

Рассмотрим группу Ли

$$G = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ F & U_n \end{bmatrix},$$

где $U \in O(n)$, $F = (\bar{a}_1, \ldots, b_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, b_j, \ldots)$; $i = \overline{1,k}$; $j = \overline{1, m-k}$;
$b_j = \sum_{i=1}^{k} c_j^i a_i$, (c_j^i) – фиксированная матрица.

Построим глобальную пару (G, Γ), где $\Gamma = \{\Phi_0, \Phi_i\}$, $i = \overline{1, n-1}$,

$$\Phi_0(g) = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & U_n \end{bmatrix}, \quad \Phi_i(g) = \varepsilon_i g \varepsilon_i^{-1} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ \omega_i F & \omega_i U \omega_i \end{bmatrix},$$

$$g \in G, \quad \varepsilon_i = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & \omega_i \end{bmatrix}, \quad \omega_i = \begin{bmatrix} E_m & \\ & -E_{n-i} \end{bmatrix}.$$

Несложно показать, что (G, Γ) полная минимальная глобальная пара, т.е. подгруппа $H^{\Gamma} = \{h \in G \mid \Phi(h) = h, \forall \Phi \in \Gamma\}$ группы G является дискретной, в то время как для любой подгруппы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ H^{Γ_1} – не дискретная под группа.

Глобальная пара (G,Γ) порождает следующие Φ-пространства:

$$M_0=\{x_0 \mid x_0=g\Phi_0(g^{-1})\},$$

$$M_1=\{x_1 \mid x_1=g\Phi_1(g^{-1})\},$$

$$M=\{x \mid x=g\Phi_1\cdot\Phi_0(g^{-1})\}.$$

Группа G действует на этих пространствах естественным образом:

$$T_g(x_0)=gx_0\Phi(g^{-1}),\ i=\overline{1,3},\ \Phi\in(\Phi_0,\Phi_1,\Phi_1\cdot\Phi_0).$$

Отображение $(x,y) \longrightarrow x\Phi_0(y)\Phi_0(x^{-1})y^{-1} = z$, $x,y\in M$, – есть морфизм из M_0, M_1 в пространство матриц L, в котором группа G действует по закону $T_g(z)=gzg^{-1}$, $z\in L$

$$L=\left\{ z \mid z=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ Z & E_n \end{bmatrix} \right\} \text{ – векторное неоднородное пространство.}$$

Инварианты его относительно действия группы G:

a) $\mathrm{rank}(Z)$; b) определитель ма $|Z'Z|$.

Рассмотрим следующие орбиты пространства L:

$$O_l=\{z\in L,\ \mathrm{rank}(Z)=l\}.$$

Построим изоморфизм

$$O_l \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} E_l & 0 \\ Z_1 & E_n \end{bmatrix} \mid \mathrm{rank}(Z_1)=l \right\},$$ где Z_1 – матрица полученная из Z выбрасыванием всех линейно-зависимых столбцов, связанных с остальными фиксированной матрицей C. Находясь в пространстве матриц C, можно изучать орбиты пространства L с Z полного ранга. В этом случае $Z'Z$ есть невырожденная матрица, а пространство всех таких орбит есть пространство Штифеля.

Имеет место

Теорема 1.

Существует морфизм из пространства Штифеля в пространство Грассмана S, задаваемый отображением:

$$\alpha : X \longrightarrow \alpha(X) = -((-X^{-1})^2 X')^2, \quad X \in L.$$

Любой ортогонально проектирующий оператор P такой, что $PZ=Z$, где Z матрица полного ранга размерности (n,n), может быть представлен в виде

$$P = Z(Z'Z)Z'.$$

Рассмотрим оператор $S=2P-E$, матрица которого, как известно, является ортогонально симметричной. Отображение

$$Z \longrightarrow S=2P-E$$

есть морфизм, если S преобразуется как аффинор.

Теорема 2.

Операторы S определяют пространство m-плоскостей в L.

На основании последней теоремы строится геометрия m-плоскостей. Так оператор E-P, проектирующий на Ker(P), определяет (n-m)-плоскость, ортогональную данной m-плоскости. S есть симметризатор относительно m-плоскости.

Расстояние от точки до плоскости находится по формуле

$$w^2 = ((E-P)\bar{X})^2 = X'(E-P)\bar{X}.$$

Стационарный угол на m-плоскостях z_1 и z_2 определяется системой уравнений

$$\begin{cases} P_1\bar{b} = \lambda_1\bar{a}, \\ P_2\bar{a} = \lambda_2\bar{b}, \end{cases}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in R/\{0\}$, P_1, P_2 -ортогональные проекторы соответственно на z_1, z_2.

Аналогично определяются изоклинные и вполне перпендикулярные m-плоскости.