ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ "КОЭФФИЦИЕНТАМИ"

И.В.Лизунова

Интегральные уравнения вида

$$(A\varphi)(x)=P(x)\varphi(x)+\int_0^\infty a_1(t)h_1(x-t)\varphi(t)dt+ \tag{I}$$
$$+\int_{-\infty}^0 a_2(t)h_2(x-t)\varphi(t)dt=f(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

$$(Б\varphi)(x)=\begin{cases} P_1(x)\varphi(x)+\int_{-\infty}^{\infty} a_1(t)h_1(x-t)\varphi(t)dt=f_1(x), & x>0,\\ P_2(x)\varphi(x)+\int_{-\infty}^{\infty} a_2(t)h_2(x-t)\varphi(t)dt=f_2(x), & x<0,\end{cases} \tag{2}$$

где $P(x)=\begin{cases}P_1(x), & x>0,\\ P_2(x), & x<0,\end{cases}$ $P_k(x)=\sum_{j=0}^{n} p_{kj}x^j$, $a_k(x)=\sum_{j=0}^{n} a_{kj}x^j$ $(k=1,2)$

рассматриваются в классе $L_p^n(R_1)$ [I]. Для изучения вопросов их разрешимости используются результаты по исследованию нетеровости операторов типа свертки с переменными "коэффициентами" [I].

С помощью оператора $sign$ уравнения (I) и (2) приводятся к виду

$$(H\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+\sum_{j=0}^{s}\int_{-\infty}^{\infty} b_j(x,t)k_j(x-t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{3}$$

где $a(x)$, $b_j(x,t)$, $k_j(x)$ ($j=0,1,\dots,s$) могут быть выписаны в явном виде для каждого из уравнений (I) и (2), для уравнения (I) $s=n$, для уравнения (2) $s=2n$.

Так как оператор H представим в виде $H=H_0+T$, где H_0 - особый оператор типа свертки, а T - вполне непрерывный, то в смысле разрешимости уравнения (I) и (2) равносильны полному уравнению

$$W = \frac{zu' - \alpha z + (1-\beta)u}{z^2 - u^2} \qquad (6'')$$

$$zu'' + (2-\beta)u' + u^2 - z^2 - \alpha = -(zuu' + \alpha u + (\beta-3)z)w \qquad (6''')$$

Из (6'') получим: $W = \frac{1}{u} + \frac{zuu' + (2-\beta)u^2 - \alpha z u - z^2}{u(z^2 - u^2)}$ (7)

В (7) для выполнения условия (4) при $C = 1$ имеем:

$$zuu' + (2-\beta)u^2 - \alpha z u - z^2 = 0 \qquad (8)$$

где $u \neq 0$; $u \neq \pm z$.

Тогда из (5) следует, что: $zw' = z + (2-\beta)w$ (9)

и $(uw)' = u + \alpha w + zw^2$ (10)

Из (9) и (10) при выполнении условия $uw = 1$ следует, что

$$\begin{cases} w' = 1 + \frac{2-\beta}{z} w \\ 1 + \alpha w^2 + z w^3 = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Система (11) определяет начальные условия для построения решений как (1), так и (6''') обладающих отмеченным свойством (4).

Замечание. Если в пункте (8):

1) $u = z$, то $zw' = z + (1-\beta)w + zw^2$ при $2-\beta-\alpha = 0$

2) $u = -z$, то $zw' = z + (1-\beta)w - zw^2$ при $2-\beta+\alpha = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Л.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков, ОНТИ, 1939.- С.463.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ P_3

Н.П.Зизелюк

В общем случае 3-е уравнение Пенлеве (P_3)

$$zww'' = zw'^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + \gamma z w^4 + \delta z \tag{I}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta - const$

не проинтегрировано в классических трансцендентных функциях.

Покажем, что при наложении некоторых ограничений на интеграл уравнения (I), оно имеет решение удовлетворяющее некоторым начальным условиям.

Выполним в (I) замену: $W = \frac{C_1}{y}$; $z = C_2 x$ (2)

получим:

$$xyy'' = xy'^2 - yy' - \alpha C_1 C_2 y - \beta \frac{C_2}{C_1} y^3 - \gamma C_1^2 C_2^2 x - \delta \frac{C_2^2}{C_1^2} x y^4 \tag{3}$$

где C_1 , C_2 $- const$

которое, с точностью до обозначения коэффициентов, совпадает с (I), а их интегралы удовлетворяют условию: $Wy = C_1$ (4)

Из (3) следует, что в уравнении (I) два отличных от нуля параметра всегда можно зафиксировать, т.е. пусть $\gamma = 1$, $\delta = -1$ в (I).

При таких значениях параметров γ и δ заменим (I) эквивалентной системой:

$$\begin{cases} zw' = z + (1-\beta) w + w^2 u \\ zu' = -\alpha z + z^2 w - (1-\beta) u - w u^2 \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) получим: (6)

$$u = \frac{zw' - z - (1-\beta) w}{w^2}$$

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ "ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ" в КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ВИГ

И.В.Лизунова

Тема "Элементы теории графов" включена в программу курса высшей математики на факультете ВИГ по предложению кафедры теплотехники, водоснабжения и канализации, так как при изучении ряда дисциплин по этой кафедре студенты имеют дело с водопроводными и гидравлическими сетями.

Этот раздел изучается в конце Ш семестра в течение 4 часов лекционных и 2 часов практических занятий. Главная задача заключается в том, чтобы познакомить студентов с основными понятиями теории графов и подготовить их к работе с сетевыми моделями на занятиях по спецдисциплинам.

Изложение этой темы в лекционном курсе предполагает:

I) краткое обоснование необходимости изучения вопроса,
2) рассмотрение основных понятий теории графов, связывая их с конкретными сетевыми моделями,
3) рассмотрение способов задания графов (с помощью матрицы смежностей и матрицы инциденций),
4) изучение операций над графами (объединения, соединения, произведения и композиции),
5) постановку простейших задач сетевого проектирования и сетевого распределения.

На практическое занятие выносится закрепление основных понятий теории графов, способы задания графов и операции над ними. Для контроля усвоения темы рекомендуется самостоятельная работа на 15 минут в конце занятия.

Предположим, что в (3)

$$R(x,y,z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Тогда получим систему дифференциальных уравнений вида [2,3]

$$\frac{dx}{dz}=A(x,y,z)/R(x,y,z),\quad \frac{dy}{dz}=B(x,y,z)/R(x,y,z),$$

где A, B, R – полиномы относительно x и y, коэффициенты которых рационально выражаются через функции a_{ij}, a'_{ij}, b_{ij}, b'_{ij}.

Справедливо утверждение: для того, чтобы (I) $\in P$, необходимо, чтобы (4) $\in P$ и, кроме того, функции $x(z)$ и $y(z)$ из (4) не имели простых подвижных полюсов, [4].

ЛИТЕРАТУРА

I. Громак В.И. Нелинейные эволюционные уравнения и уравнения типа // Дифференц. уравнения. 1984.-Т.20,№12.- С.2042-2048.

2. Кондратеня С.Г., Яблонский А.И. Об особых точках решений систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения, 1970.- Т.6, №II.- С.1970-1975.

3. Лукашевич Н.А. О функциях, определяемых одной системой дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1969.- Т.5, №2.- С.379-381.

4. Голубев В.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.-Л.: ГНТИУ, 1950.- С.384.

О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЗНАЧНЫМИ ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

М.П.Сидоревич

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}(z)(u')^i(v')^j = L(u',v',z)=0, \\ \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij}(z)(u')^i(v')^j = M(u',v',z)=0, \end{cases} \tag{I}$$

где a_{ij}, b_{ij} - аналитические функции комплексной переменной z,

$$u'=\frac{du}{dz}, \quad v'=\frac{dv}{dz}.$$

Будем говорить, что система (I) принадлежит к классу систем P - типа, $(1)\in P$, если $u(z)$ и $v(z)$ в качестве своих подвижных особых точек могут иметь лишь только плюсы [I].

Ставится задача выделения всех классов систем вида $(1)\in P$.

Положим $u'=x$, $v'=y$, тогда (I) примет вид

$$L(x,y,z)=0, \quad M(x,y,z)=0. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) полным образом, будем иметь

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dz}+\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dz}=-\frac{\partial L}{\partial z}, \\ \frac{\partial M}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dz}+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dz}=-\frac{\partial M}{\partial z}. \end{cases} \tag{3}$$

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В НЕГОЛОНОМНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Н.И. Чопчиц, В.И. Гладковский

В научной и учебной литературе общепринятым является мнение, что определение характеристик диссипативных сил типа сил сухого трения в колебательных системах вообще, и при наличии неголономности в частности, возможно лишь на основе координатных измерений. Хорошо известно также, что координатные измерения сравнимой с временными измерениями точности организовать значительно сложнее, особенно при естественном условии невозмущаемости. В данной работе рассматривается простейшая неголономная колебательная система - наклонный маятник с трением качения. Показано, что для такой колебательной системы следует различать два квазипериода. Первый из них представляет время движения между двумя амплитудными отклонениями одного знака и не зависит от характеристик диссипативных сил, если они не зависят от скорости. Второй квазипериод, допускающий тривиальное высокоточное измерение, представляет собой время движения системы между двумя положениями равновесия в отсутствие диссипативных сил, в которых знаки проекций скорости одинаковы, и оказывается зависящим от этих характеристик. Несмотря на то, что эта зависимость квадратична по величине, представляющей отношение граничных координат области застоя к начальной амплитуде, вследствие легко реализуемой высокоточности измерений второго квазипериода, появляется возможность определения величин типа коэффициента трения качения на основе измерений времени. Представляется важным также то обстоятельство, что эта зависимость некогерентна с зависимостью квазипериода от амплитуды при учете ангармоничности, что позволяет организовать процедуру определения характеристик диссипативных сил при больших начальных амплитудах.

если $f(x)\in C$ и $\widehat{F}(x)\in C$, а интеграл Фурье для функции будет:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

Теорема 2. Если выполняются условия леммы 5, то справедлива оценка

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)\|_C \le C_{2\varrho+1}\Big(\omega_{2\varrho+2}(f;\tfrac{1}{\sigma})_C +$$

$$+\sigma\,\omega_{2\varrho+2}(\widehat{F};\tfrac{1}{\sigma})_C\Big).$$

Лемма 6. Если $f(x)\in C$, то справедливы тождества

$$Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x) - Z_{\sigma,1}^{(2\varrho+1)}(f;x) - Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(Z_\sigma^{(1)}(f);x) +$$

$$+ Z_{\sigma,1}^{(2\varrho+1)}(Z_\sigma^{(1)}(f);x) = \frac{(-1)^{\varrho+1}}{\sigma^{2\varrho+2}}\cdot\frac{d^{2\varrho+2}}{dx^{2\varrho+2}} Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)$$

и

$$Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x) + Z_\sigma^{(1)}(f;x) - Z_\sigma^{(1)}(Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f);x) =$$

$$= Z_\sigma^{(2\varrho+2)}(f;x),$$

где $$Z_{\sigma,1}^{(\nu)}(f;x) := Z_\sigma^{(\nu)}(Z_\sigma^{(\nu)}(f);x).$$

Теорема 3. Если выполняются условия леммы 5 и $f(x)\in L(-\infty,\infty)$, то справедливо порядковое соотношение

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)\| \asymp \omega_{2\varrho+2}(f;\tfrac{1}{\sigma})_C +$$

$$+\sigma\,\omega_{2\varrho+2}(\widetilde{F};\tfrac{1}{\sigma})_C.$$

1. Семенчук Н.П. Некоторые порядковые соотношения для приближения функций, представимых интегралами Фурье, нормальными средними Зигмунда. Изв. АН БССР, сер.физ.-мат.наук, 1976, №5, с.50-56.

конечные разности, ϱ - любое фиксированное натуральное число.

Лемма 2. Если $g_\sigma(x) \in \mathcal{B}_\sigma$, то справедливо неравенство

$$\| g_\sigma^{(\nu)}(x) \|_C \geqslant \frac{M_\nu}{\delta^\nu} \omega_\nu \left(g_\sigma; \frac{1}{\sigma}\right)_C,$$

где $0 < \delta \leq \sigma^{-1}$; M_ν - константа, зависящая от ν; $\mathcal{B}_\sigma$ - класс целых функций $g_\sigma(z)$ экспоненциального типа с показателем $\leq \sigma$.

Теорема I. Для любой функции $f(x) \in C$ справедливо порядковое соотношение

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho)}(f; x) \|_C \asymp \omega_{2\varrho}\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_C.$$

Лемма 3. Если $f(x) \in C$, то

$$f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f; x) = \frac{(-1)^{\varrho+1}\, \overline{g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f; x)}}{\sigma^{2\varrho+1}} + O\left(A_\sigma(f)_C\right),$$

где $\overline{g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f; x)}$ - функция, тригонометрически сопряженная к функции $g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f; x)$; $A_\sigma(f)_C$ - наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства C посредством функций $g_\sigma(x) \in \mathcal{B}_\sigma$.

Лемма 4. Если $f(t) \in C$, то $Z_\sigma^{(\nu)}(f; x) \in \mathcal{B}_\sigma$.

Лемма 5. Справедливо тождество

$$\frac{1}{\sigma^{2\varrho+1}} \cdot \frac{d^{2\varrho+1}}{dx^{2\varrho+1}} Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(\tilde{F}; x) = (-1)^{\varrho+1}\Big(Z_\sigma^{(2\varrho+2)}(f; x) - Z_\sigma^{(2\varrho+2)}\big(Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f); x\big)\Big),$$

НЕКОТОРЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА В КЛАССЕ $C(-\infty,\infty)$.

В.И.Каланчук, Н.П. Семенчук

В [I] для функций f класса $L_p(-\infty,\infty)$, $1\le p<\infty$, установлены порядковые соотношения через $\| f(x)-Z_\sigma^{(\nu)}(f;x)\|_{L_p}$ и модули гладкости порядка ν, $\nu\in\mathcal{N}$, где

$$Z_\sigma^{(\nu)}(f;x):=\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma\left(1-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^\nu\right)du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt \quad (1)$$

- нормальные средние Зигмунда (типичные средние), построенные на базе интеграла Фурье.

В настоящей работе указанный результат обобщается на пространство функций $C(-\infty,\infty)=:C$ - пространство всех ограниченных равномерно-непрерывных на всей числовой прямой функций $f(x)$ с нормой

$$\| f\|_C:=\sup_{x\in R^1}|f(x)| \quad (2)$$

Доказаны:

Лемма I. Для любой функции $f(x)\in C$ справедлива оценка

$$\| f(x)-Z_\sigma^{(2\ell)}(f;x)\|_C\le \mathcal{D}_{2\ell}\,\omega_{2\ell}\left(f;\frac{1}{\sigma}\right)_C,$$

где

$$\omega_\nu(f;t)_C:=\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h^\nu f(x)\|_C -$$

модули гладкости порядка ν, а

$$\Delta_h^\nu f(x):=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{\nu-i}C_\nu^i f(x+ih) -$$