НЕКОТОРЫЕ ПОРЯДКОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА В КЛАССЕ $C(-\infty,\infty)$.

В.И.Калинчук, Н.П. Семенчук

В [I] для функций f класса $L_p(-\infty,\infty)$, $1\le p<\infty$, установлены порядковые соотношения через $\| f(x)-Z_\sigma^{(\nu)}(f;x)\|_{L_p}$ и модули гладкости порядка ν, $\nu\in N$, где

$$Z_\sigma^{(\nu)}(f;x):=\frac{1}{\pi}\int_0^\sigma\left(1-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^\nu\right)du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt \quad (1)$$

- нормальные средние Зигмунда (типичные средние), построенные на базе интеграла Фурье.

В настоящей работе указанный результат обобщается на пространство функций $C(-\infty,\infty)=:C$ - пространство всех ограниченных равномерно-непрерывных на всей числовой прямой функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_C:=\sup_{x\in R^1}|f(x)| \quad (2)$$

Доказаны:

Лемма I. Для любой функции $f(x)\in C$ справедлива оценка

$$\| f(x)-Z_\sigma^{(2g)}(f;x)\|_C\le \mathcal{D}_{2g}\,\omega_{2g}\left(f;\frac{1}{\sigma}\right)_C ,$$

где

$$\omega_\nu(f;t)_C:=\sup_{|h|\le t}\|\Delta_h^\nu f(x)\|_C -$$

модули гладкости порядка ν, а

$$\Delta_h^\nu f(x):=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^{\nu-i}C_\nu^i\, f(x+ih) -$$

конечные разности, ϱ - любое фиксированное натуральное число.

Лемма 2. Если $g_\sigma(x) \in \mathcal{B}_\sigma$, то справедливо неравенство

$$\| g_\sigma^{(\nu)}(x) \|_C \geq \frac{M_\nu}{\delta^\nu} \omega_\nu \left(g_\sigma; \frac{1}{\sigma}\right)_C,$$

где $0 < \delta \leq \sigma^{-1}$; M_ν - константа, зависящая от ν; $\mathcal{B}_\sigma$ - класс целых функций $g_\sigma(z)$ экспоненциального типа с показателем $\leq \sigma$.

Теорема I. Для любой функции $f(x) \in C$ справедливо порядковое соотношение

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho)}(f;x) \|_C \asymp \omega_{2\varrho}\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_C.$$

Лемма 3. Если $f(x) \in C$, то

$$f(x) - Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x) = \frac{(-1)^{\varrho+1}\, \overline{g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)}}{\sigma^{2\varrho+1}} + O\left(A_\sigma(f)_C\right),$$

где $\overline{g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)}$ - функция, тригонометрически сопряженная к функции $g_\sigma^{(2\varrho+1)}(f;x)$; $A_\sigma(f)_C$ - наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства C посредством функций $g_\sigma(x) \in \mathcal{B}_\sigma$.

Лемма 4. Если $f(t) \in C$, то $Z_\sigma^{(\nu)}(f;x) \in \mathcal{B}_\sigma$.

Лемма 5. Справедливо тождество

$$\frac{1}{\sigma^{2\varrho+1}} \cdot \frac{d^{2\varrho+1}}{dx^{2\varrho+1}} Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(\widetilde{F};x) = (-1)^{\varrho+1}\Big(Z_\sigma^{(2\varrho+2)}(f;x) -$$

$$- Z_\sigma^{(2\varrho+2)}\left(Z_\sigma^{(2\varrho+1)}(f);x\right)\Big),$$

если $f(x)\in C$ и $\widehat{F}(x)\in C$, а интеграл Фурье для функции будет:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

Теорема 2. Если выполняются условия леммы 5, то справедлива оцен...

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x)\|_C \le C_{2\rho+1}\Big(\omega_{2\rho+2}(f;\tfrac{1}{\sigma})_C +$$

$$+\sigma\,\omega_{2\rho+2}(\widehat{F};\tfrac{1}{\sigma})_C\Big).$$

Лемма 6. Если $f(x)\in C$, то справедливы тождества

$$Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x) - Z_{\sigma,1}^{(2\rho+1)}(f;x) - Z_\sigma^{(2\rho+1)}(Z_\sigma^{(1)}(f);x) +$$

$$+ Z_{\sigma,1}^{(2\rho+1)}(Z_\sigma^{(1)}(f);x) = \frac{(-1)^{\rho+1}}{\sigma^{2\rho+2}}\cdot\frac{d^{2\rho+2}}{dx^{2\rho+2}}Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x)$$

и

$$Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x) + Z_\sigma^{(1)}(f;x) - Z_\sigma^{(1)}(Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f);x) =$$

$$= Z_\sigma^{(2\rho+2)}(f;x),$$

где $$Z_{\sigma,1}^{(\nu)}(f;x) := Z_\sigma^{(\nu)}(Z_\sigma^{(\nu)}(f);x).$$

Теорема 3. Если выполняются условия леммы 5 и $f(x)\in L(-\infty,\infty)$, то справедливо порядковое соотношение

$$\| f(x) - Z_\sigma^{(2\rho+1)}(f;x)\| \asymp \omega_{2\rho+2}(f;\tfrac{1}{\sigma})_C +$$

$$+\sigma\,\omega_{2\rho+2}(\widetilde{F};\tfrac{1}{\sigma})_C.$$

1. Семенчук Н.П. Некоторые порядковые соотношения для приближения функций, представимых интегралами Фурье, нормальными средними Зигмунда. Изв. АН БССР, сер.физ.-мат.наук, 1976, №5, с.50-56.