УДК 624.072

Л.И.Коршун, к.т.н., доц.
ГИСИ

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ УНИФИКАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЗДАНИЙ

Одним из требований реального проектирования, которое существенно влияет на результаты оптимизации, является требование унификации поперечных сечений элементов. При решении задачи оптимальной унификации наиболее общей и наиболее сложной для реализации является постановка, при которой неизвестными являются как количество типо-размеров u, так и распределение стержней по группам (сериям). С учетом реальных условий проектирования и возведения сооружений вполне обоснованной и естественной является постановка, в соответствии с которой число u считается известным и равным $u = \bar{u}$.

При разработке алгоритма оптимальной унификации сечений будем предполагать, что начальное состояние системы, соответствующее оптимальному решению при неучете ограничения на количество типо-размеров, известно, т.е. известны значения целевой функции V^* и площадей поперечных сечений $F_j^*, j = \overline{1,\tau}$. Кроме того, будем иметь в виду, что при переходе от одного состояния системы к другому, характеризуемуся уменьшением количества типо-размеров, допустимо лишь увеличение площадей поперечных сечений. Возможность снижения площадей поперечных сечений отдельных групп стержней может быть обеспечена при решении задачи оптимизации с учетом выявленного распределения стержней по группам [2].

С учетом сказанного задачу оптимальной унификации сечений будем интерпретировать как многошаговый процесс перехода системы из начального состояния $V^*(F^*)$ характеризующегося соотношением $u = \tau$, в конечное $V^T(F^T)$, характеризующееся соотношением $u = \bar{u}$, при котором приращение значения целевой функции будет минимальным, т.е. при котором

$$V^T(F^T) - V^*(F^*) \rightarrow min. \qquad (1)$$

Будем предполагать также, что на каждом шаге структура системы характеризуется уменьшением количества типо-размеров элементов на единицу, а, следовательно, размерность многошагового процесса будет равна $\tau - \bar{u}$.

При такой формулировке задачи на каждом (К-ом) шаге процесса за единственную управляющую переменную следует принять возможное приращение целевой функции при объединении одного из стержней или одной из групп в общую группу с другим стержнем или группой стержней, т.е. величину

$$\Delta V_{js}^{(k)} = (F_s^{(k-1)} - F_j^{(k-1)}) S_j c_j \gamma_j . \tag{2}$$

$$j = \overline{1, r-(k-1)}, \quad s = \{s \mid F_s > F_j\},$$

где $F_s^{(k-1)}$, $F_j^{(k-1)}$ - площади стержней или групп стержней с номерами s и j, полученные на предыдущем шаге; S_j - длина стержня или сумма длин стержней одной группы, площади которых могут быть повышены; $c_j \gamma_j$ - переводные коэффициенты целевой функции.

Так как исходные значения F_j^{*} являются дискретными, то дискретные значения на каждом шаге будет принимать и переменная $\Delta V_{js}^{(k)}$. Использование прямого перебора всех дискретных значений $\Delta V_{js}^{(k)}$ приводит к непреодолимым вычислительным трудностям, связанным с исключительно быстрым ростом количества рассматриваемых состояний системы на каждом шаге. При К=I и $F_1^* = \min\{F_j^*, j=\overline{1,r}\}$ количество дискретных значений $\Delta V_{js}^{(1)}$ равно

$$m_1 = \sum_{j=1}^{r-1} (r-j).$$

на К -ом шаге количество значений $\Delta V_{js}^{(k)}$, приходящееся на одно значение $\Delta V_{js}^{(k-1)}$, определяется выражением

$$m_k = \sum_{j=1}^{r-k} (r+1-k-j),$$

а суммарное их число равно

$$m^n = \prod_{k=1}^{r-\bar{u}} \sum_{j=1}^{r-k} (r+1-k-j). \tag{3}$$

Так для системы с $r=4$, $\bar{u}=2$ имеем $m^n=18$, а для системы с параметрами: $r=6$, $\bar{u}=3$ $m^n=900$.

С целью построения эффективного алгоритма оптимальной унификации сечений проанализируем возможность использования принципа оптимальности Беллмана.

Каждое состояние системы на К -ом шаге будет определяться зависимостью

$$V_{i_k}^{(k)} = V_{i_{k-1}}^{(k-1)} + \Delta V_{js}^{(k)}, \tag{4}$$

где i_k, i_{k-1} -номера состояний системы на соответствующих шагах.

Из выражений (4) и (2) вытекает, что состояние системы на K -ом шаге зависит от состояния на $(K-1)$-ом шаге и от управления (величины управляющей переменной) на K -ом шаге. Этот вывод и составляет по существу основное требование применимости принципа Беллмана [1] .

Учитывая сказанное, для выбора оптимального решения на K -ом шаге рекурентное соотношение, основанное на принципе Беллмана, принимает вид

$$V^{(k)*} = V^{(k-1)*} + \Delta V^{(k)*}, \tag{5}$$

где

$$\Delta V^{(k)*} = \min_{j,s} \left\{ \Delta V^{(k)} \right\}. \tag{6}$$

В случае $K=1$ $V^{(k-1)*} = V^*(F^*)$ – известное начальное решение. При использовании рекурентного соотношения (5) число рассматриваемых состояний системы существенно сокращается. Суммарное его количество с учетом всех шагов равно количеству рассматриваемых дискретных значений управляющей переменной $V_{js}^{(k)}$ и определяется зависимостью

$$m^{4} = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-k} (r+1-k-j). \tag{7}$$

С целью еще большего упрощения вычислительного процесса и сокращения затрат машинного времени до минимума, учтем следующее обстоятельство.

Так как $V^{(k)} = \sum_{j=1}^{r-k} V_j^{(k)}$, то на каждом шаге можно расположить $V_j^{(k)}$ в порядке убывания и выполнить заново нумерацию элементов так, чтобы возрастание номеров соответствовало убыванию $V_j^{(k)}$. При этом становится ясным, что минимальными из всех возможных будут приращения $\Delta V_{jj-1}^{(k)}$, соответствующие объединению лишь смежных стержней или групп стержней. Приращения, соответствующие объединению других стержней или их групп, можно исключить из рассмотрения.

С учетом данного обстоятельства определение оптимального решения на каждом шаге осуществляется по той же рекурентной зависимости (5) с тем лишь отличием, что

$$\Delta V^{(k)*} = \min_{j} \left\{ \Delta V_{jj-1}^{(k)} \right\}, \tag{8}$$

где

$$\Delta V_{jj-1}^{(k)} = \left(F_{j-1}^{(k-1)} - F_j^{(k-1)}\right) S_j c_j \gamma_j, \qquad j = \overline{1,\ r-(k-1)}. \tag{9}$$

При этом суммарное число рассматриваемых состояний системы (точнее, дискретных значений приращения целевой функции) составляет

$$m^* = \sum_{k=1}^{r-\bar{u}} (r-k). \qquad (10)$$

Для системы с r=6 и $\bar{u}$ =3 имеем m^*=12 (вместо 31 при использовании соотношений (5), (6) и вместо 900 при полном переборе). Эффективность использования соотношений (5), (8), (9) по сравнению с предыдущими вариантами оптимальной унификации возрастет исключительно быстро с ростом значения r.

Учитывая все изложенное, предлагаемый алгоритм оптимальной унификации сечений сводится к следующему.

1. Используя известное решение $V^*(F^*)=\sum V_j^*$, стержни системы располагаются и нумеруются в порядке убывания величин V_j^*.

2. На основе рекуррентного соотношения (5) с использованием выражений (8), (9) осуществляется многошаговый процесс перехода системы из начального состояния $V^*(F^*)$ в конечное $V^r(F^r)$, характеризующееся значением $u=\bar{u}$. При выполнении каждого шага фиксируются стержни, объединяемые в одну группу. Алгоритм приводит к оптимальному разбиению стержней на группы, характеризующиеся одинаковыми площадями поперечных сечений стержней одной группы.

Из описания алгоритма и анализа соотношений (3), (7), (10) вытекает, что данный алгоритм характерен исключительно вычислительной простотой и минимальными затратами машинного времени на его реализацию.

При дальнейшей оптимизации системы с учетом найденного оптимального разбиения стержней на группы эффективно решение F^r принять за исходное. Для дальнейшей оптимизации необходимо выделить определяющий (P_k-ый) стержень каждой группы и выполнить нумерацию как определяющих стержней группы ($P_k=\overline{P_1,P_{\bar{u}}}$), так и стержней в пределах каждой группы ($\xi_k=\overline{1,P_k}$). За определяющий стержень K-ой группы, учитывая, что условия прочности составляются для всех стержней каждой группы, принципиально может быть принять любой стержень этой группы. Удобно в качестве такого принимать стержень, характеризующийся максимальной площадью среди стержней этой группы в решении F^*.

Литература

1. Беллман Р. Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.

2. Коршун А.И. Задача статического расчета оптимальных упругих стержневых конструкций на произвольные внешние воздействия. "Строительство и архитектура Белоруссии", 1972, № 3.