УДК 539.3

В.Л.Мартыновский аспирант КИСИ
Б.Ф.Власов д.ф.-м.н., проф. УДН
им. П.Лумумбы

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ВТОРОГО ВИДА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ (r,φ,z).

В статье "Вывод уравнений неразрывности деформаций в интегро-дифференциальной форме первого вида для цилиндрической системы координат (r,φ,z)" данного сборника показано, что неизоритивные трубы соответствуют модели толстых цилиндрических оболочек. Напряженное и деформированное состояние таких труб определяется с позиций трёхмерных соотношений механики сплошной среды. Рассмотрена одна группа уравнений в интегро-дифференциальной форме из полной системы уравнений теории упругости, которая названа первой.

В настоящей статье рассматривается вторая из оптимальных форм, которая наравне с первой может быть использована при видоизменении нагрузок и краевых условий. Естественно, что и вторая форма наряду с первой может оказаться эффективной при решении общей задачи при равновесии толстостенного цилиндра в напряжениях.

В работах [1, 2] прямым методом из уравнений Сен-Венана выводятся уравнения неразрывности деформаций, имеющих интегро-дифференциальную форму для декартовой системы координат (X,Y,Z). Для вывода аналогичных уравнений (цилиндрическая система координат) в качестве исходных берём формулы Коши.

$$\varepsilon_r=\frac{\partial U_r}{\partial r},\qquad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{U_r}{r},\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial U_z}{\partial z} \tag{1}$$

$$\gamma_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}U_\varphi\right),\qquad \gamma_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial U_\varphi}{\partial z},\qquad \gamma_{zr}=\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r} \tag{2}$$

Дифференцируем первое из уравнений группы (2) по – z второе – по r , третье – по φ .

$$\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial\varphi\partial z}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial z}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \gamma_{\varphi z}}{\partial r}=\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zr}}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2 U_r}{\partial z\partial\varphi}+\frac{\partial^2 U_z}{\partial r\partial\varphi} \tag{5}$$

Из соотношений (3) – (5) и (I), (2) получим выражения для перемещений U_i и деформаций ε_i ($i=r,\varphi,z$).

$$\begin{aligned}
U_r&=\frac{1}{2}\left(\int\gamma_{zr}\,dz+\int r\gamma_{r\varphi}\,d\varphi-\iint r\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial r}\,d\varphi\,dz\right)+\Psi_1(r,\varphi)+\Phi_2(z,r)\\
U_\varphi&=\frac{1}{2}\left(\int\gamma_{\varphi z}\,dz+\int\gamma_{r\varphi}\,dr-\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial\varphi}\,dz\,dr\right)+\Psi_2(r,\varphi)+F_1(\varphi,z)\\
U_z&=\frac{1}{2}\left(\int r\gamma_{\varphi z}\,d\varphi+\int\gamma_{zr}\,dr-\iint r\frac{\partial\gamma_{r\varphi}}{\partial z}\,dr\,d\varphi\right)+F_2(\varphi,z)+\Phi_1(z,r)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r&=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial r}dz+\int r\frac{\partial\gamma_{r\varphi}}{\partial r}d\varphi-\iint r\frac{\partial^2\gamma_{\varphi z}}{\partial r^2}d\varphi\,dz\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\Psi_1+\Phi_2\right)\\
\varepsilon_\varphi&=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial\varphi}dz+\int\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{r\varphi}}{\partial\varphi}dr-\iint\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\gamma_{zr}}{\partial\varphi^2}dz\,dr+\int\gamma_{r\varphi}d\varphi+\right.\\
&\left.+\int\frac{1}{r}\gamma_{zr}dz-\iint\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial r}d\varphi\,dz\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Psi_2+F_1\right)+\frac{1}{r}\left(\Psi_1+\Phi_2\right)\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{2}\left(\int r\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial z}d\varphi+\int\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial z}dr-\iint r\frac{\partial^2\gamma_{r\varphi}}{\partial z^2}dr\,d\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(F_2+\Phi_1\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставив (7) в уравнения неразрывности Сен-Венана, получим систему уравнений, связывающих между собой произвольные функции

Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3F_1}{\partial\varphi\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3F_2}{\partial z\partial\varphi^2}=0\\
&\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z\partial r^2}+\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial r\partial z^2}=0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial r\partial\varphi^2}+\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial\varphi\partial r^2}=0
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) обращаются в тождества лишь тогда, когда

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial^2F}{\partial z^2}\\
&\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial r}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\\
&\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

где F, Φ, Ψ – суть произвольные функции своих аргументов.

Согласно (9) получим систему соотношений в интегро-дифференциальной форме второго вида

$$\varepsilon_r=\frac{1}{2}\left(\int r\frac{\partial\gamma_{z\varphi}}{\partial r}d\varphi+\int\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial r}dz-\iint r\frac{\partial^2\gamma_{\varphi z}}{\partial r^2}d\varphi dz\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Phi+\Psi)$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial\varphi}dz+\int\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{r\varphi}}{\partial\varphi}dr-\iint\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\gamma_{zr}}{\partial\varphi^2}dz\,dr+\int\gamma_{r\varphi}d\varphi+\right.\qquad(10)$$

$$\left.+\int\frac{1}{r}\gamma_{zr}dz-\iint\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial r}d\varphi dz\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(\Psi-F)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\Phi-\Psi)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial z}dr+\int r\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial z}d\varphi-\iint r\frac{\partial^2\gamma_{r\varphi}}{\partial z^2}dr\,d\varphi\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(F-\Phi)$$

а компоненты вектора перемещений u_r, u_φ, u_z, будут

$$u_r=\frac{1}{2}\left(\int r\gamma_{r\varphi}d\varphi+\int\gamma_{zr}dz-\iint r\frac{\partial\gamma_{\varphi z}}{\partial r}d\varphi dz\right)+\frac{\partial}{\partial r}(\Phi-\Psi)+\bar{m}(\varphi,z)$$

$$u_\varphi=\frac{1}{2}\left(\int\gamma_{\varphi z}dz+\int\gamma_{r\varphi}dr-\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{zr}}{\partial\varphi}dz\,dr\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\Psi-F)+\bar{n}(z,r)\qquad(11)$$

$$u_z=\frac{1}{2}\left(\int\gamma_{zr}dr+\int r\gamma_{\varphi z}d\varphi-\iint r\frac{\partial\gamma_{r\varphi}}{\partial z}dr\,d\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}(F-\Phi)+\bar{p}(r,\varphi)$$

где $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ – имеет смысл перемещений тела как жёсткого целого [I].

Отметим, что уравнения (10) тождественны уравнениям неразрывности Сен-Венана. Доказательство проведено в работе Б.Ф.Власова [2] . Можно показать, что первая и вторая интегро-дифференциальные формы уравнений неразрывности не исключают возможности построения и других вариантов форм уравнений неразрывности интегро-дифференциального вида. Первую и вторую формы уравнений в интегро-дифференциальном виде также можно получить из вариационного принципа Кастильяно.

Литература:

I.Власов Б.Ф. Построение методом прямых двусторонних приближений по энергии и статике упругих элементов сооружений, докторская диссертация, М., 1974

2.Власов Б.Ф. О числе независимых уравнений неразрывности Труды УДН, т.XXIV, в.5, 1968