УДК 539.3

В.Л.Мартиновский аспирант
МИСИ

Б.Ф.Власов д.ф.-м.н., проф.
УДН им. П.Лумумбы

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ПЕРВОГО ВИДА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ (r,φ,z)

Современная техника мелиоративных работ предусматривает широкое использование коротких цилиндрических труб относительно большой толщины. Характерные размеры (длина ℓ, внутренний радиус $- r_{вн}$, толщина $- \delta$) соответствуют модели толстых цилиндрических оболочек $\delta / r_{вн} \approx 1/5$. Учитывая то, что и $\ell / r_{вн} \approx 1/3$ расчётная модель таких труб не вписывается в модель тонкостенной длинной оболочки. В связи с этим возникает необходимость построения решений для определения напряжённого и деформированного состояний используемых в мелиоративном хозяйстве труб с позиций трёхмерных соотношений механики сплошной среды. При оценке упругих деформаций целесообразно принять в качестве исходной системы уравнений полную систему уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат.

В данной работе впервые рассмотрена одна группа этих соотношений – уравнения неразрывности деформаций. Им в соответствии с постановкой исследуемой задачи в напряжениях придаётся интегро-дифференциальный вид. В настоящей статье даётся вывод этой группы соотношений в одной из наиболее удобных форм, которую авторы называют первой.

Прежде всего уясним, что будет важным для дальнейшего, понятие неопределённого интеграла от непрерывной функции $f(\alpha,\beta,\gamma)$.

Известно, что [4]

$$\int f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha = F(\alpha,\beta,\gamma) + \eta(\beta,\gamma) \qquad (1)$$

Выделяя всякий раз аддитивную функцию $\eta(\beta,\gamma)$, примем в последующем обозначение [I] :

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\overset{\cdot}{\int} f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha \qquad (2)$$

тогда вместо (I) будем иметь

$$\int f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha=\overset{\cdot}{\int} f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha+p(\beta,\gamma) \qquad (3)$$

Переходим к выводу уравнений неразрывности первого вида. Исходным материалом будут служить формулы Коши:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial U_r}{\partial r} \qquad\qquad \gamma_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}U_\varphi\right)$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{U_r}{r} \qquad (4) \qquad \gamma_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} \qquad (5)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial U_z}{\partial z} \qquad\qquad \gamma_{zr}=\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r}$$

Интегрируем в смысле (3) формулы (4) , получим

$$\begin{aligned}
U_r&=\overset{\cdot}{\int}\varepsilon_r\,dr+\frac{\partial f(\varphi,z)}{\partial\varphi}\\
U_\varphi&=\overset{\cdot}{\int} r\varepsilon_\varphi\,d\varphi-\overset{\cdot\cdot}{\iint}\varepsilon_r\,dr\,d\varphi-f(\varphi,z)+\xi(r,z)\\
U_z&=\overset{\cdot}{\int}\varepsilon_z\,dz+\Psi(r,\varphi)
\end{aligned} \qquad (6)$$

где f , ξ , Ψ – суть произвольные функции своих аргументов.

Из второй группы формул Коши (5) с учётом соотношений (6) получим уравнения неразрывности деформаций в интегро-дифференциальной форме первого вида

$$\begin{aligned}
\gamma_{r\varphi}&=\overset{\cdot}{\int} r\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial r}\,d\varphi+\overset{\cdot}{\int}\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\varphi}\,dr-\overset{\cdot}{\int}\varepsilon_r\,d\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}-f\right)+\frac{\partial\xi}{\partial r}\\
\gamma_{\varphi z}&=\overset{\circ}{\int}\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial\varphi}\,dz+\overset{\cdot}{\int} r\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial z}\,d\varphi-\overset{\cdot\cdot}{\iint}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial z}\,dr\,d\varphi+\frac{\partial}{\partial z}(\xi-f)+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\\
\gamma_{zr}&=\overset{\cdot}{\int}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial z}\,dr+\overset{\cdot}{\int}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial r}\,dz+\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\,\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}
\end{aligned} \qquad (7)$$

Как известно [2], уравнения неразрывности (уравнения Сен-Венана) в цилиндрических координатах имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2}-2\frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{\partial z\,\partial r}=0\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{r^2\partial \varphi^2}+\frac{\partial \varepsilon_z}{r\,\partial r}+\frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial z^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \gamma_{\varphi z}}{\partial \varphi\,\partial z}-\frac{2}{r}\frac{\partial \gamma_{\varphi z}}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{r^2\partial \varphi^2}-\frac{\partial \varepsilon_r}{r\,\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \varphi}\right)=0\\
&\frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{r\,\partial \varphi\,\partial z}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{z\varphi}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 \gamma_{r\varphi}}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varphi}\right)=0 \qquad (8)\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\gamma_{\varphi z}\right)\right]-\frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r^2\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi\,\partial z}=0\\
&\frac{\partial}{r^2\partial r}\left(r\frac{\partial \gamma_{z\varphi}}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \gamma_{z\varphi}}{\partial \varphi\,\partial z}-\frac{\partial^2 \gamma_{zr}}{r^2\partial \varphi^2}-\frac{\partial}{r\,\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z}=0
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что система шести уравнений Сен-Венана (6) эквивалентна системе лишь трёх уравнений неразрывности в интегро-дифференциальной форме (7). При подстановке (7) в (8) последние обращаются в тождества.

Использование трёх интегро-дифференциальных уравнений вида (7) позволяет совместно с тремя уравнениями равновесия определить шесть неизвестных компонент тензора напряжений. Это означает, что при решении задач статики сплошной среды в напряжениях нет необходимости в привлечении дополнительных условий совместности.

Отметим, что и сами по себе уравнения неразрывности в интегральной форме могут быть полезны при решении конкретных задач вариационными методами, например, методом Кастильяно [3].

Литература:

1. Власов Б.Ф. Об уравнении неразрывности деформаций сплошной среды (лекция), УДН, М., 1969
2. Колтунов М.А. и др. Упругость и прочность цилиндрических тел. М., "Высшая школа", 1975
3. Лейбензон Л.С. Собрание трудов, т.I, Изд-во АН СССР, М., 1951
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.I, "Наука", М., 1965