УДК 624.04

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сидорович Е. М.

Введение. Как известно, все конструкционные материалы в той или иной мере характеризуются нелинейной зависимостью между деформациями и соответствующими им усилиями (напряжениями), т.е. обладают физической нелинейностью (рис. 1,а). Более того, современные нормативные документы рекомендуют (в некоторых случаях требуют) при расчетах сооружений вести учет нелинейных и неупругих свойств конструкционных материалов. Если расчеты нелинейно-упругих систем (как геометрически, так и физически) разработаны достаточно полно [1, 2], то в расчетах конструкции из неупругих материалов существует еще много вопросов, требующих дополнительных исследований.

Описание нелинейных и неупругих свойств материалов. Исторически сложилось так, что с целью упрощения расчетов нелинейной зависимостью между деформациями и усилиями (напряжениями) часто пренебрегали, полагая деформации элементов строительных конструкций прямо пропорциональными действующим в них усилиям. В тех случаях, когда физической нелинейностью пренебречь было нельзя, применялись упрощенные диаграммы деформирования, удобные для описания более-менее простыми математическими зависимостями, как правило, билинейные с упрочнением (рис. 1,б), билинейные идеально упругопластические (рис. 1,в), параболические с площадкой текучести (рис. 1,г) и иные.

Дополнительно для неупругих материалов вводились гипотезы о простом нагружении и активной деформации. Это означало, что в процессе нагружения конструкции, вплоть до разрушения, усилия и деформации в ее элементах должны изменяться строго монотонно. Другими словами, реальные упругопластические материалы полагались нелинейно-упругими. Это позволяло расчет нелинейно-упругих систем (физически нелинейных), как и геометрически нелинейных, сравнительно легко выполнять на компьютерах с помощью известных шаговых методов или методов продолжения по параметру (непрерывных или дискретных) [1, 2].

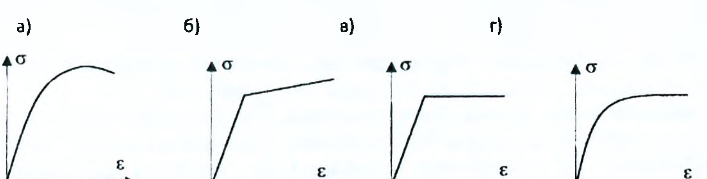

Рисунок 1

В настоящее время при современном уровне развития вычислительной техники в расчете может быть учтена любая диаграмма деформирования, описывающая физические свойства материала конструкции, заданная как аналитически, так и графически. График любой функции всегда можно задать в табличной форме, т.е. описать функцию как кусочно-линейную. Обработка кусочно-линейной функции на компьютере выполняется даже проще, чем заданной аналитически. Более того, как физически нелинейные могут быть рассмотрены конструктивные элементы с зазорами и перескоками, т.е. конструктивная нелинейность может быть учтена в расчетах как частный случай физической нелинейности [2].

Значительно более трудоемким в расчетах является учет реально существующих в конструкциях явлений разгрузки, приводящих к появлению остаточных пластических деформаций. Разгрузка того или иного упругопластического элемента (растянутого или сжатого стержня, волокна в изгибаемом стержне) характеризуется переломом на кривой деформирования (рис. 2,а) и соответственно разрывными жесткостными параметрами.

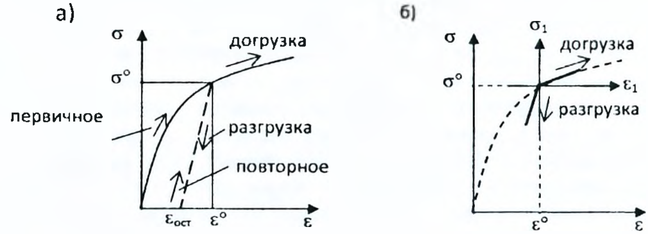

Рисунок 2

Если в процессе нелинейного деформирования деформации и напряжения в некотором элементе достигли уровня (ε°, σ°), то при дальнейшем нагружении в соответствии с теорией шагового нагружения приращения деформаций и напряжений могут быть рассмотрены как конечные малые. В пределах малых приращений любую нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями можно аппроксимировать билинейной зависимостью либо с помощью касательных, либо с помощью секущих, угловые коэффициенты которых (мгновенные модули деформирования, жесткости) различны при догрузке и разгрузке (рис. 2,б). Билинейная аппроксимация одинаково применима в пределах малых приращений как к неупругим материалам, так и к нелинейно-упругим.

В новой системе координат ε_1 - σ_1 (рис. 2,б) в пределах малых деформаций нелинейно деформируемый элемент ведет себя как линейно упругий, если удается предугадать направление деформирования этого элемента. В этом случае определение жесткостных характеристик элементов сводится к взятию производных по направлению от билинейных зависимостей.

Колебания в неупругих конструкциях. На основании вышеизложенного в нелинейно-упругой системе с билинейными элементами могут совершаться малые периодические собственные колебания, но с разными полупериодами и амплитудами. В неупругой билинейной системе малые колебания будут уже характеризоваться разными "четвертьпериодами" ($T^+/4$ или $T^-/4$) и разными амплитудами (A^+ и A^-) в зависимости от направления движения и, следовательно, в зависимости от знака приращения деформаций и модулей деформаций (E^+ и E^-). По истечении первого “четвертьпериода” или первого полупериода эти малые периодические колебания относительно достигнутого состояния равновесия (ему отвечают деформации и напряжения ε°, σ°) становятся линейными гармоническими со смещенным центром колебаний A^0 и собственной частотой ω, соответствующей модулю деформаций при разгрузке:

$$S(t) = A^0 + A\sin\omega t,$$

где $S(t)$ – некоторый характерный параметр.

На рис. 3,а представлена схема деформирования при свободных колебаниях в неупругом элементе при начальном возмущении, вызвавшем разгрузку. Участки ОС и СО соответствуют первому "полупериоду" (модуль деформаций E^-), участок ОА соответствует третьему "четвертьпериоду" (модуль деформаций E^+), участок АВ соответствует установившимся гармоническим колебаниям с модулем деформаций, равным модулю при разгрузке E^-.

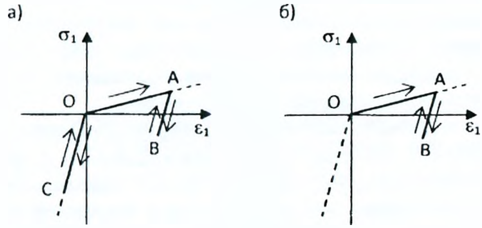

Рисунок 3

Схема колебаний при начальном возмущении, вызвавшем догрузку, показана на рис. 3,б. Участок ОА отвечает первому "четвертьпериоду" при догрузке (модуль деформаций E^+). Участок АВ отвечает установившимся гармоническим колебаниям с модулем деформаций, равным модулю при разгрузке E^-.

Таким образом, в неупругой системе, находящейся в равновесии в деформированном состоянии, при любом начальном возмущении возможны установившиеся малые гармонические колебания, с собственными частотами, отвечающими модулю деформаций материала при разгрузке.

Устойчивость неупругих конструкций. Переходя к вопросу устойчивости равновесия конструкций из неупругих материалов, следует упомянуть об известной дискуссии [3, 4] по теории продольного изгиба прямых стержней при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, начало которой связано с именами Ф. Энгессера, Ф. С. Ясинского и Т. Кармана. Объектом дискуссии служил сжатый прямолинейный стержень из упругопластического материала, диаграмма деформирования которого была принята билинейной с упрочнением (рис. 1,б). Предметом дискуссии служил ответ на вопрос, какой модуль упругости следует подставить в формулу Эйлера для вычисления критической силы. Касательный или приведенный? Общее мнение склонилось в пользу приведенного модуля. Но впоследствии Ф.Р. Шенли обосновал [3], что в случае продолжающегося нагружения допустимо применение касательного модуля упругости. "Касательная" критическая сила при этом меньше "приведенной" критической силы, асимптотически приближаясь к последней при варьировании соотношения между модулями.

При исследовании устойчивости равновесия многоэлементных неупругих систем будем исходить из предположения, что система уже находится в равновесии в некотором деформированном состоянии при конкретном уровне внешних воздействий (силовых, тепловых и иных). Все элементы системы удовлетворяют условиям прочности. Требуется исследовать устойчивость данного состояния равновесия.

На основании качественного (динамического) метода исследования устойчивости равновесия [2, 4], сооружение следует подвергнуть малым (теоретически бесконечно малым) случайным возмущениям (по всем возможным направлениям), а затем снять эти возмущения. Другими словами, в сооружении необходимо вызвать малые (теоретически бесконечно малые) свободные колебания. Если сооружение способно сопротивляться малым возмущениям и малые свободные колебания (затухающие при наличии сил сопротивления) вблизи исследуемого состояния равновесия возможны (участок АВ на рис. 3), то исследуемое состояние равновесия устойчиво. Если еще на участках ОС или ОА (рис. 3) сооружение, потеряв способность сопротивляться малым возмущениям, начинает удаляться от исследуемого состояния равновесия за счет больших перемещений, то исследуемое равновесие неустойчиво.

Критерием устойчивости равновесия в деформированном состоянии, как известно [2, 4], является положительная определенность матрицы мгновенной жесткости сооружения в исследуемом состоянии равновесия.

В устойчивом состоянии все собственные значения матрицы мгновенной жесткости положительны. Следовательно, действительны и положительны все собственные частоты исследуемой системы. Нулевые и отрицательные собственные значения (нулевые и мнимые собственные частоты) свидетельствуют о критическом или неустойчивом равновесии.

Алгебраическая проблема собственных значений для матрицы мгновенной жесткости $R(E^-, E^+)$, элементы которой зависят от направления деформаций (догрузка или разгрузка), заключается в исследовании ненулевых решений системы однородных алгебраических уравнений:

$$[R(E^-, E^+) - \lambda E]X = 0, \tag{1}$$

где λ – собственное значение, X – собственный вектор.

Умножим равенство (1) слева на X^T и определим λ, применив метод скалярных произведений:

$$\lambda = \frac{X^T[R(E^-, E^+)X]}{X^T X}. \tag{2}$$

Если наименьшее из всех возможных значений λ окажется положительным, то равновесие неупругой системы устойчиво. Если наименьшее из собственных значений окажется нулевым или отрицательным, то равновесие соответственно критическое или неустойчивое.

Таким образом, исследование устойчивости равновесия неупругой системы свелось к минимизации параметра λ как функции многих переменных (2). От стандартной алгебраической проблемы собственных значений данная задача отличается тем, что элементы матрицы мгновенной жесткости зависят от знака компонент собственного вектора, что влияет на знак деформаций элементов неупругой системы и, следовательно, на выбор соответствующего модуля деформаций E^+ или E^-. То есть собственные значения зависит от знаков соответствующих собственных векторов.

Минимизация функции (2) автоматически дает ответ на вопрос, какой модуль следует применять. Поиск ответа носит итерационный характер с заранее неизвестным результатом. При этом следует понимать, что в некотором деформированном состоянии каждый элемент конструкции, каждое волокно каждого изгибаемого стержня будут иметь свои мгновенные модули деформаций в зависимости от направления деформаций.

Заключение. 1. Компьютерные технологии позволяют учесть нелинейно-упругие свойства материалов, характеризуемые произвольной диаграммой деформирования.

2. В неупругой системе установившиеся малые колебания совершаются как в линейной системе с модулями деформации, соответствующими модулям разгрузки.

3. Наименьшая критическая нагрузка в неупругой системе соответствует форме деформаций, обладающих наименьшей отпорностью (жесткостью).

Список цитированных источников

1. Шалашилин, В.И. Оптимизация параметра продолжения решения уравнений нелинейного деформирования упругих систем / В.И. Шалашилин // Статика и динамика гибких систем. – М.: Наука, 1987. – С. 81–104.

2. Сидорович, Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем / Е.М. Сидорович. – Мн.: БГПА, 1999. – 200 с.

3. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

4. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.

УДК 624.04

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ МОСТА ЧЕРЕЗ РЕКУ ЗАПАДНАЯ ДВИНА НА ЮГО-ЗАПАДНОМ ОБХОДЕ Г. ВИТЕБСКА НА СТАДИИ МОНТАЖА ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ

Босаков С.В., Караткевич С.Г., Федоров А.Г.

Введение. Мост через реку Западная Двина на юго-западном обходе г. Витебск (дороге II категории) был запроектирован и построен под автомобильное движение с двумя полосами проезда шириной по 3.75 м, с двумя полосами безопасности шириной по 2.0 м и двумя тротуарами шириной по 1.5м (Габарит - Г-11,5+2× 1.5).

Расчетная нагрузка – А14, НК-112 согласно СНиП 2.05.03-84* «Мосты и трубы».

Мост имеет три пролета, перекрываемых неразрезным сталежелезобетонным пролетным строением с расчетной схемой 63+126+63 м. Береговые безростверковые опоры выполнены из монолитного железобетона на основании из буронабивных свай диаметром 1,2 м. Промежуточные опоры – монолитные железобетонные на фундаментах с основанием из буронабивных свай диаметром также 1,2 м.

Пролетное строение, рассматриваемое ниже, имеет строительную высоту 3.6 м и состоит из 2-х стальных главных балок коробчатого сечения, объединенных