

При введении функции напряжений (функции Эри) уравнения (15) и (16) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок (уравнения Кармана) [3]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 W - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h} q, \\ \nabla^2 F = L \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (17) совместно с граничными условиями представляют основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Решение системы в общем виде не получено, в настоящее время получен ряд частных решений.

Граничные условия зависят от условий закрепления пластинок на контуре.

Например, если края пластинки закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль осей X и Y невозможно, т. е.

$$\begin{aligned} U_{x=0} = U_{x=a} = 0, \\ V_{y=0} = V_{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

то граничные условия будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - E \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \\ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - E \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

**Заключение.** Представленные решения рассматривают упругую работу элементов. В железобетонных плитах при работе в предельной стадии наблюдается появление трещин, а следовательно и изменение жесткостных характеристик. Эти изменения следует учитывать путем модификации цилиндрических жесткостей плиты с учетом фактических диаграмм деформирования материалов.

#### Список цитированных источников

1. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов / В. И. Самуль — М.: Высш. шк., 1982. — 264 с.
2. Вольмир, А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. — М.: Гос изд., 1956. — 419 с.
3. Кончковский, З. Плиты. Статические расчеты / З. Кончковский. — М.: Стройиздат, 1984. — 481 с.

УДК 624.072.21.7

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОСНОВАНИЯ

Козунова О. В.

**Введение.** Из практики строительства зданий и сооружений известно, что нулевой цикл составляет около 30 % от объемов капитального строительства (на всех стадиях его реализации: от проекта до монтажа надземной части).

Фундамент – это связующая часть между сооружением и грунтом, и поэтому он должен без перенапряжения воспринимать все нагрузки, действующие на сооружение, и передавать их на грунт так, чтобы обеспечить сооружению требуемую прочность, жесткость и устойчивость.

Фундаменты большинства инженерных сооружений, опирающиеся на грунт, рассчитываются как балки, плиты или рамы, лежащие на упругом основании [1], и их работа существенным образом влияет на напряженно-деформированное состояние (НДС) связанной инженерной системы «балка (плита, рама) – основание».

В силу неоднозначности моделирования упругого основания первостепенным вопросом является выбор такой модели, которая приближала бы НДС этого основания к реальным условиям. В настоящее время в инженерной практике используются различные механические модели основания [2,3,4], краткий обзор которых приведен в публикациях [5,6,7]. Выбор модели упругого основания в большинстве случаев зависит от интуиции инженера – проектировщика и представляет довольно сложную задачу.

Существующие методы расчета фундаментов при их проектировании и обследовании базируются на использовании *теории линейно-деформируемой среды*. При этом предполагается, что сжатие основания от собственного веса и внешней нагрузки закончилось, нагружение основания производится без разгрузки, и внешнее давление на основание не превышает расчетного сопротивления. Методика такого расчета приводится в СНБ 5.01.01-99 [8] и в пособии [9].

В реальных условиях для неоднородных грунтов зависимость между нагрузкой и осадкой имеет *нелинейный характер*. Поэтому современные методы расчета, имея теоретическую ценность, не всегда пригодны для практического применения. В данной работе для инженерного расчета системы «фундамент–основание» предлагается новая модификация *вариационного метода*: в нелинейной постановке и с использованием метода конечных разностей (МКР), которая называется *вариационно-разностным подходом* (ВРП).

Теория расчета балок и плит на упругом основании с использованием ВРП была опубликована в работах [5,6]. Результаты нелинейного расчета для двухслойного основания приведены в статье [10], для двухслойного основания с учетом ослаблений – в сборнике статей [5], для многослойного основания со слабым слоем, с использованием *реальных данных* геологических испытаний, – в сборнике научных трудов [7]; для реального многослойного основания со слабым слоем и биогенными включениями – в материалах [11].

В продолжение исследований результатов нелинейных расчетов в предлагаемой работе рассматривается многослойное грунтовое основание, для  $k$ -того слоя которого выбрана модель упругого слоя (УС) конечной толщины с переменным модулем деформации слоя  $E_k$ . Коэффициент Пуассона этого слоя  $\nu_k$ , как и ранее, принимается постоянным.

В силу нелинейности рассматриваемая задача решается методом упругих решений А. А. Ильюшина [12], который предполагает итерационный процесс. Численная реализация указанного метода осуществляется методом конечных разностей (МКР) в программном пакете MATHEMATICA 6.0.

**Общая постановка задачи для нелинейных расчетов.** В настоящей работе рассматривается контактная задача нелинейной теории упругости (плоская деформация): *линейно-упругая* балка или плита на *нелинейно-упругом* многослойном основании, имеющем биогенные включения в несущих слоях и без них. Каждый слой грунта и биогенные включения описываются, как *нелинейно-деформируемая* однородная среда.

В нелинейных расчетах грунты соответствуют результатам геологических изысканий в н.п. Тихиничи, Жлобинского района, Гомельской области: пример 1 – скв.1 (рис. 1, а), пример 2 – т.з. 1а (рис. 1, б) [13].

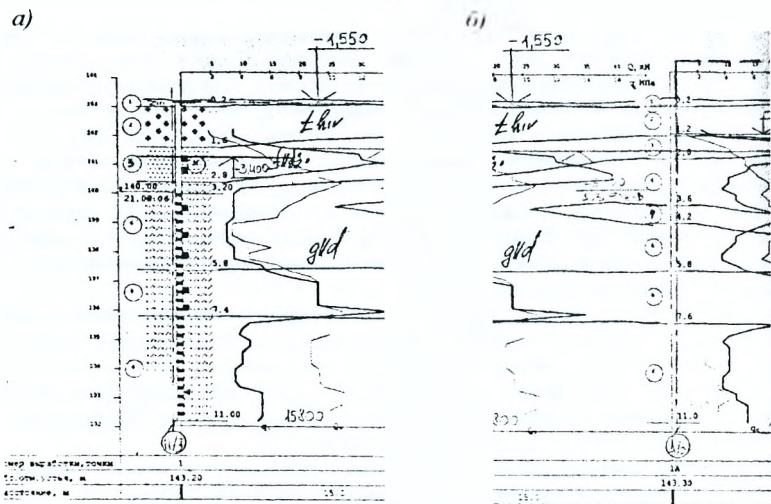


Рисунок 1- Инженерно-геологический разрез: а) буровая скважина №1, б) точка статического зондирования №1а

В общей постановке задачи балка (плита) находится под действием произвольной внешней нагрузки  $q(x)$ ,  $P$ . Геометрические и физические параметры плиты (плоская задача): высота  $h$ , длина балки (ширина плиты)  $2l$ , изгибная жесткость  $EJ$  (рис. 2, а).

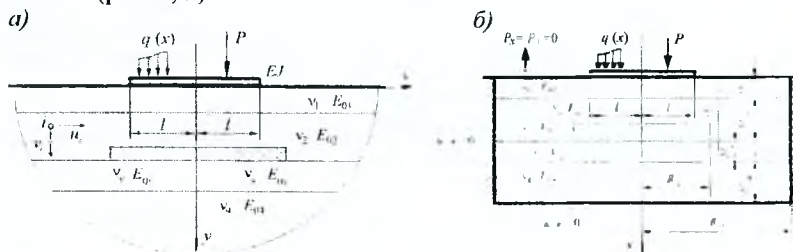


Рисунок 2 – Упругая балка (плита) на многослойном основании, ослабленном биогенными включениями

При расчете многослойное основание заменяется прямоугольной расчетной областью (рис. 2, б), размеры которой: по оси  $X$  – ширина  $2R_0=10l$ ; по оси  $Y$  – глубина  $H_0=4l$ , где  $H_0 = \sum H_{0k}$ ,  $k$  – номер упругого слоя. Слабый слой расположен между двумя несущими слоями (средним и нижним) и имеет размеры:  $2R_s=10l$ ;  $H_s=2/3l$ . Область биогенных включений размерами:  $2R_v=3l$ ;  $H_v=2/3l$ , расположена под плитой в среднем слое.

Основание аппроксимируется симметричной разбивочной сеткой (рис. 3) конечных размеров (29x7) с постоянным шагом по осям:  $X \Delta x, Y \Delta y$ . Точки 12 - 18 – это точки контактной зоны расчетной модели «плита-основание».

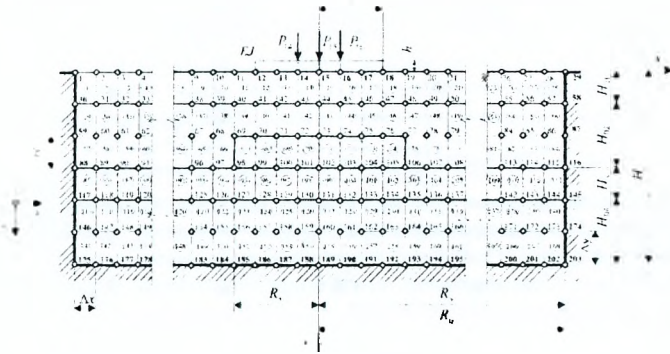


Рисунок 3 – Разбивочная сетка расчетной области

*Граничные условия задачи:* на контакте балки (плиты) с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегаем. Для балки (плиты) справедливы гипотезы теории изгиба; на границах принятой расчетной области перемещения принимаются равными нулю  $u = 0, v = 0$  (см. рис. 2, б); в контактной зоне справедливо равенство осадок основания  $v$ , прогибам плиты в  $k$ -том сечении

$$v_k = y_k \quad (1)$$

За *неизвестные* принимаем:  $u_i(x), v_i(y)$  – компоненты вектора перемещения  $i$ -той узловой точки основания;  $p_y^{(k)}(x, y)$  – реактивные давления в контактной зоне.

*Результаты расчета:* перемещения и напряжения узловых точек упругого основания, осадки верхнего слоя основания, реактивные давления в контактной зоне балки (плиты) с основанием, внутренние усилия в сечениях фундаментной балки или плиты.

**Алгоритм расчета в нелинейной постановке.** Физическое соотношение  $\sigma(x)$  для нелинейно-упругого многослойного основания (рис. 4) будем определять формулой, предложенной в работе [14] и исследуемой на сходимость в работе [15]

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{ик} \operatorname{th} \left( \frac{E_{0k}}{\sigma_{ик}} \varepsilon_i^{(k)} \right), \quad (2)$$

где  $\sigma_{ик}, E_{0k}$  – предел текучести и начальный модуль деформации  $k$ -того слоя основания.

Каждому слою неоднородного основания соответствуют свои значения упругих характеристик  $\sigma_{ик}, E_{0k}$  в формуле (2). Их значения для слабых полостей на порядок ниже аналогичных для несущих слоев грунтового основания. В расчете приняты следующие обозначения:  $\sigma_{ик}, E_{0k}$  (слабый слой);  $\sigma_{ик}, E_{0k}$  (биоогенные включения).

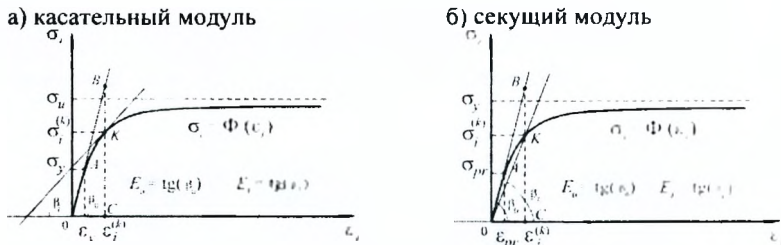


Рисунок 4 – Зависимость  $\sigma_i(\epsilon_i)$  для упругого слоя основания

В нелинейных расчетах системы «балка (плита)–основание» методом упругих решений [12] используется итерационный алгоритм. При каждой итерации модуль деформации в  $i$ -той точке основания изменяется, поэтому при вычислениях используется два варианта: а) *касательный модуль* деформации, который в соответствии с формулой (2), равен

$$E_i^{(n)} = \operatorname{tg} \beta = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i} = \frac{E_{0i}}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{E_{0i}}{\sigma_u} \epsilon_i^{(n-1)} \right)} \quad (3)$$

б) *секущий модуль*

$$E_i^{(n)} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_i^{(n)}}{\epsilon_i^{(n)}} = \frac{\sigma_{im}}{\epsilon_i^{(n-1)}} \operatorname{th} \left( \frac{E_{0im}}{\sigma_{im}} \epsilon_i^{(n-1)} \right) \quad (4)$$

где  $n$  – номер последующей итерации, с учетом того, что в первом приближении  $n = 1$ . То есть, зависимость  $\sigma_i(\epsilon_i)$  и  $(\epsilon_i)$  отождествляется аналогичной при простом сжатии, а диаграмма  $\sigma_i(\epsilon_i)$  приближается к диаграмме упругопластического тела.

Для решения сформулированной задачи в нелинейной постановке используется функционал полной энергии, величина которого получена суммированием функционала энергии деформаций упругого основания  $U_r$ , функционала энергии изгиба плиты  $\Omega$ , и потенциала работы внешней нагрузки  $\Pi$ , и имеет вид

$$\mathcal{E} = U_r + \Omega_b + \Pi, \quad (5)$$

где каждое из слагаемых справа определяется соотношениями теории упругости [12]. Их дифференциальный и конечно-разностный вид приведены в работах [5, 6, 7].

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии  $\mathcal{E}$  должен иметь минимум, то неизвестные перемещения  $u_i(x), v_i(y)$  будут найдены из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (6)$$

где  $N$  – число узловых точек основания. В ходе преобразований (6) получается система дифференциальных уравнений, порядок которой равен  $2N$ , т. е. числу неизвестных перемещений.



**Расчет контактной зоны и внутренних усилий в упругой балке (плите).** Зная перемещения  $u_i(x), v_i(y)$ , согласно условию (1), определяются прогибы фундаментной плиты  $y_i$ , соответствующие осадкам основания  $v_i$  под плитой; а также: вертикальные напряжения упругого основания и реактивные давления в контактной зоне «балка (плита)–основание».

Вертикальные напряжения упругого основания  $\sigma_v^{(k)}$  в  $k$ -том центре  $j$ -той сечеточной ячейки основания (см. рис. 3) определяются из обобщенного закона Гука в предположении однородности основания в ее области

$$\sigma_v^{(k)} = \frac{E_s v_i}{(1 - 2\nu_s) \mu(1 + \nu_s)} (r_{ij}^{(k)} + e_{ij}^{(k)}) + \frac{E_s}{(1 + \nu_s)} (r_{ij}^{(k)} - 1) \quad (7)$$

Конечно-разностный вид формулы (7) приведен в работах [5, 6]. По полученным ординатам  $\sigma_v^{(k)}$  строятся графики распределения напряжений в вертикальных и горизонтальных срезах основания.

Реактивные давления в контактной зоне фундаментной плиты с основанием определяются по прогибам плиты  $y_i$  (рис. 5). При этом используется дифференциальная зависимость при изгибе

$$p_v^{(i)} - q_k(x) = -EJ \frac{d^4 y_i}{dx^4} \quad (8)$$

где  $p_v^{(i)}$  – реактивное давление в  $i$ -той контактной точке основания;  $q_k(x)$  – внешняя нагрузка, действующая на плиту в области  $k$ -того сечения плиты,  $q_k(x) = q_i(x)$

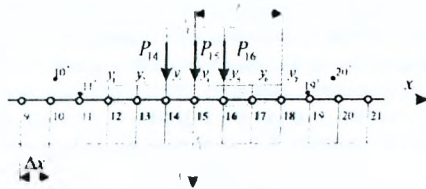


Рисунок 5 – Контактная зона «балка (плита)–основание»

Для крайних точек  $k$  фундаментной плиты вводятся статические граничные условия

$$Q^{(k)} \Big|_{x=0} = -EJ \frac{d^3 y_i}{dx^3} = 0; \quad M^{(k)} \Big|_{x=0} = -EJ \frac{d^2 y_i}{dx^2} = 0. \quad (9)$$

Вывод и вид формул реактивных давлений в контактной зоне, полученных на основании соотношения (8) и записанных в конечно-разностном виде с учетом условий (9), приведен в работах [5,6]. По результатам расчета строится эпюра  $p_v^{(i)}$  в контактной зоне.

Внутренние усилия в сечениях фундаментной плиты. По перемещениям  $v_i(y)$  с учетом условия (1) определяются внутренние усилия в сечениях плиты. При этом используются дифференциальные соотношения при изгибе

$$Q^{(k)} = -EJ \frac{d^3 y_i}{dx^3} \pm q_k(x) \cdot \Delta x_k, \quad M^{(k)} = -EJ \frac{d^2 y_i}{dx^2} \quad (10)$$

где  $\Delta x_k$  – участок плиты под действием внешней нагрузки  $q_k(x)$ ; знак «+» – для левых сечений плиты, знак «-» – для правых сечений плиты. В ненагруженных точках плиты  $q_k(x) = 0$ . В контактных точках основания нагрузка  $q_k(x)$  заменяется сосредоточенной силой  $P_i(x)$ .

Вывод и вид формул внутренних усилий в сечениях фундаментной плиты, полученных на основании соотношений (10) с учетом условий (9), приведен в работах [5, 6]. По результатам расчета строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях плиты.

**Модельная задача.** Выполнен нелинейный расчет фундаментной плиты на многослойном основании с природными ослаблениями (точка статического зондирования 1а) [13]. Расчет проведен аналогично расчетам фундаментных балок и плит на слоистых основаниях, рассмотренных в работах [6, 7, 10, 11].

В нелинейных задачах, численно апробированных ранее, переменный модуль деформации представлен в виде *касательного модуля*. В предлагаемой работе расчет ведется с применением *секущего модуля* деформации. В численный счет использовались упругие параметры системы «плита–основание», приведенные в статьях [7, 11].

Результаты расчетов показывают, что с ростом глубины основания максимальные напряжения  $\sigma^k$  уменьшаются, и опасные сечения в горизонтальном срезе под плитой перераспределяются. Максимальные напряжения и характер эпюр практически не зависят от вида модуля деформации. Следовательно, секущий и касательный модуль деформации одинаково приемлемы для нелинейных расчетов слоистых оснований по *несущей способности* основания.

Распределение вертикальных напряжений *по глубине расчетной области* подтверждает то, что с ростом глубины основания значения напряжений уменьшаются. Несмотря на числовые различия в результатах расчетов в зависимости от вида модуля деформации, эпюры напряжений в этих срезах имеют похожую геометрию, что не характерно для эпюры напряжений в срезе за плитой.

Из полученных результатов следует, что: итерационный процесс сходится быстрее при расчете *осадок* с использованием *секущего* модуля деформации, а при расчете реактивных давлений и внутренних напряжений – с использованием *касательного* модуля деформации. В связи с этим, при расчете НДС контактной зоны системы «плита–основание» следует различать применение *секущего* и *касательного* модулей деформации.

Результаты свидетельствуют о наличии *распределительной способности грунта* (деформации и напряжения возникают не только под нагруженными участками, но и в соседствующих с ними областях). Эта способность полностью соответствует гипотезе упругого полупространства, подтверждается экспериментами и всем строительным опытом.

Эпюры напряжений  $\sigma_v^k$  во всех срезах имеют одинаковую или подобную геометрию, однако некоторые характерные значения отличительны. Это особо заметно в срезе над природными полостями. Следовательно, вид модуля деформации оказывает существенное влияние на результаты нелинейных расчетов напряжений с учетом природных ослаблений в виде биогенных включений.

Получено, что вид и характер эпюр внутренних сил полностью соответствуют результатам теоретических расчетов [1, 2]. Несмотря на одинаковый характер, эпюры различны при разных видах модуля деформации, что практически невозможно при одних и тех же исходных данных нелинейных расчетов.

*Следовательно*, выбор модуля деформации влияет на правильное математическое обследование прочностных свойств упругого основания и фундаментной плиты.

**Лотковый эксперимент.** Модельное испытание фундаментной плиты на упругом многослойном основании с природным ослаблением проведено в малом лотке с прозрачными стенками и масштабной сеткой. Размеры лотка 26,6 см × 13,5 см, глубина лотка – 3,8 см. Грунт укладывался послойно (6 слоев) с окрашенными прослойками из мела. Природное ослабление моделировалось под плитой в третьем несущем слое, в виде поролоновой прокладки. Нагрузка передавалась симметрично с помощью жесткого штампа.

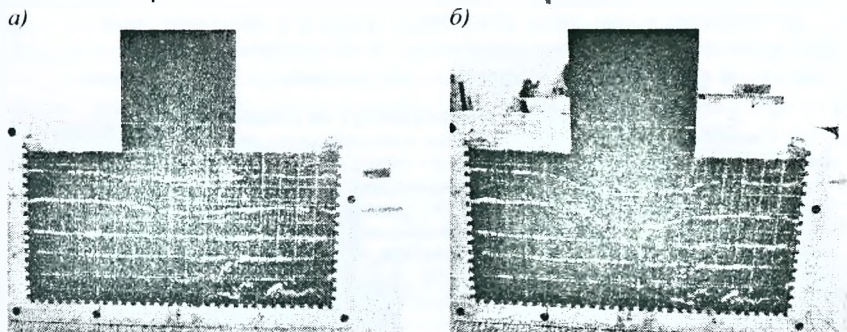


Рисунок 6 – Общий вид лотка после испытания штампа весом: а) 2 кг; б) 4 кг.

Перед укладкой в лоток грунт тщательно перемешивался с добавлением необходимого количества воды для достижения оптимальной влажности уплотнения  $W_{\text{опт}} = 3-5\%$ . Далее производилась укладка грунта слоями толщиной 1–3 см. После отсыпки каждого слоя грунт уплотнялся ручной трамбовкой. Легкое трамбование производилось по длине лотка ударами штампа. Для эксперимента использовались: в несущих слоях – песок средней крупности, увлажненный ( $\varphi = 28$ ;  $\gamma = 16 \text{ кН/м}^3$ ); окраска слоев – мел, толщиной 1–2 мм; природное ослабление – поролон размерами 6,5 см × 3 см ( $\gamma = 0,6 \text{ кН/м}^3$ ).

На рис. 6 показаны послойные осадки грунта (вертикальное смещение мелких прослоек) от разного веса штампа: а) 2 кг; б) 4 кг соответственно. С ростом внешней нагрузки осадки увеличиваются, но только в верхних (1–3) слоях грунта, над поролоновой прокладкой. Нижние слои визуально не деформируются, в силу своей большей жесткости.

Проведенный эксперимент подтверждает качественную картину деформированного состояния многослойного основания, ослабленного природными полостями (биогенными включениями).

**Закключение.** В работе предложена новая модификация вариационно-разностного подхода к расчету фундаментных балок и плит на физически нелинейном слоистом основании с природными ослаблениями, который позволяет полностью найти НДС основания, исследовать контактную зону, вычислить внутренние усилия и осадки плиты.

Преимущество вариационно-разностного подхода состоит в том, что граничные условия удовлетворяются автоматически. Как известно, одной из главных причин неустойчивости МКР является различие разностных уравнений внутри области и на ее границе.



Вычисления показали, что:

а) применение вариационного подхода в решении контактной задачи вместе с итерациями по А. А. Ильюшину приводит к быстрой сходимости расчета (максимум – три итерации), особенно в напряжениях;

б) наличие распределительной способности грунта очевидна и неоспорима, поэтому в инженерных расчетах необходим учет этой способности, особенно в условиях плотной застройки города;

в) характер и вид эпюр внутренних усилий в сечениях линейно упругой фундаментной плиты, расположенной на физически нелинейном основании, полностью соответствует гипотезам и допущениям теории упругости.

### Список цитированных источников

1. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. – М.: Высш. шк., 1973. – 480 с.

2. Горбунов-Посадов, Н. И. Расчет конструкций на упругом основании / Н. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

3. Федоровский, В. Г. Прогноз осадок фундаментов мелкого заложения и выбор модели основания для расчета плит / В. Г. Федоровский, С. Г. Безволев // Основания, фундаменты и механика грунтов – 2000 – № 4 – С. 10–18

4. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Мн. БНТУ, 2002. – 127 с.

5. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета Часть 1 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.

6. Козунова, О. В. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями / О. В. Козунова // Геотехника Беларуси: теория и практика – Минск: БНТУ, 2008. – С. 37–65.

7. Босаков, С. В. Нелинейный расчет фундаментных плит на многослойном основании со слабым слоем / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь. – Полоцк: ПГУ, 2008. – С. 175–184.

8. СНБ 5.01.01-99 «Основания и фундаменты зданий и сооружений» – Мн.: Мин-во арх и стр-ва РБ, 1999. – 36 с.

9. Основания, фундаменты и подземные сооружения / М. И. Горбунов-Посадов, В. А. Ильчев, В. И. Крутов [и др.]; под общ. ред. Е. А. Сорочана и Ю. Г. Трофименкова. – М.: Стройиздат, 1985. – 480 с. – (Справочник проектировщика).

10. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Результаты расчета Часть 2 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 2. – С. 15–19.

11. Козунова, О. В. Влияние биогенных включений на результаты нелинейных расчетов фундаментных плит на грунтовых основаниях / О. В. Козунова // Актуальные научно-технические проблемы современной геотехники – Т. 2 – Санкт-Петербург: СПбГАСУ, 2009. – С. 165–172.

12. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Погапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 398 с.

13. Технический отчет об инженерно-геологических изысканиях для физкультурно-оздоровительного комплекса в н.п. Тихиничи Рогачевского р-на Гомельской обл-ти / Под рук. В. П. Устинова // – Жлобин: Жлобинский АКМ, 2006. – 20 с.

14. Босаков, С. В. Расчет балки на упругой физически нелинейной полуплоскости / С. В. Босаков, О. В. Машкова (Козунова) // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь. – Гомель: БелГУТ, 2005. – С. 40–43.

15. Козунова, О. В. Применение МКР в нелинейных расчетах балок на однородном упругом слое / О. В. Козунова // Ресурсоэкономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Ровно, Україна, 2008. – Вып 17 – С. 373–381