УДК 539.4.019 : 620.178.7

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО СТЕРЖНЮ ИЗ РЕОНОМНОГО МАТЕРИАЛА

Холодарь Б.Г.

Введение. Склерономный подход не позволяют адекватно описать развитие напряженно-деформированного состояния (НДС) при ударных нагрузках, так не учитывает зависимости свойств материала от скорости нагружения. С этих позиций представляет интерес задача о продольном ударе жесткой массой по незакрепленному торцу стержня, рассматриваемая с учетом реологических свойств материала.

Постановка задачи и анализ результатов. Для отражения указанных выше особенностей можно использовать уравнение Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{\sigma}{\eta}, \tag{1}$$

где σ, ε – напряжение и деформация; t – время, E – модуль упругости; $\eta = \eta_0 \, exp(\psi(\sigma,\varepsilon,\theta))$ – вязкость материала; η_0 – начальная вязкость (константа), $\psi(\sigma,\varepsilon,\theta)$ – функция, описывающая зависимость энергии активации процессов течения материала от НДС и температуры θ. В простейшем случае ее можно принять в виде $\psi = -\alpha|\sigma|$. При этом расчетные диаграммы растяжения и сжатия материала при деформировании с постоянной скоростью будут одинаковыми, близкими к диаграмме Прандтля.

Направим ось X вдоль стержня, поместив начало отсчета на ударяемом торце стержня. Примем обозначения: L – длина стержня, A – площадь сечения, ρ – плотность материала, E – модуль упругости, M – масса ударяющего груза, V_0 –скорость груза в момент соприкосновения со стержнем. Конец $x=L$ считаем защемленным.

Кратко отметим особенности поведения идеально-упругой системы.

В безынерционном стержне напряжения изменяются по закону $\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{M}{m}} \, Sin\,kt$, где $k^2=EA/(LM)$, $m=\rho AL$ – масса стержня, $\sigma_0=c\rho V_0=\sqrt{E\rho}V_0$,

$c=\sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне. Учет инерционных свойств материала стержня можно провести, считая, напри-мер, деформацию во всех точках стержня одинаковой. При этом получим для напряжений выражение

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{1+\mu/3}{\mu}} \cdot Sin\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu/3}}\tau \tag{2}$$

где $\mu = m/M$, а $\tau = t\frac{c}{L}$ – безразмерное время. Для системы с распределеными параметрами строится волновое решение с помощью разрывных (кусочно-непрерывных) функций [1,2]. Для иллюстрации на рис. 1 приведены кривые $\sigma(\tau)/\sigma_0$ для нескольких значений параметра μ.

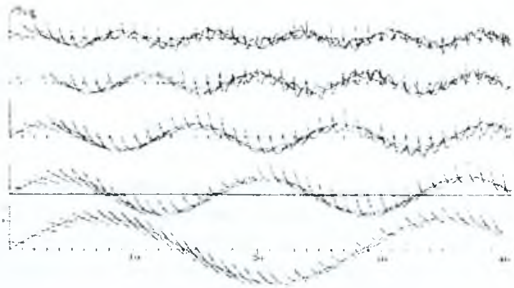

Рисунок 1 – Напряжения на торцах стержня при упругом подходе для μ =0.05, 0.15, 0.30, 0.60, 1.0 (снизу вверх). Сплошные линии соответствуют (2)

Напряжения на ударяемом торце стержня при $t=0$ составляют $\sigma=\sigma_0$ и экспоненциально уменьшаются в течение первого прохода волны по стержню. Форма разрывных кривых определяется отношением масс ударника и стержня $\mu=m/M$ и трансформируется со временем тем заметнее и быстрее, чем больше это отношение. Максимальные напряжения на торцах имеют место в момент, когда целое число времен прохода волны вдоль стержня совпадает со временем одного из экстремумов на периодической кривой. Наиболее нагруженным оказывается закрепленый торец стержня. Длительность удара зависит только от соотношения масс и не зависит от скорости соударения V_0. Из графиков на рис.1 видно, что максимум напряжений может реализоваться и за пределом времени до первой смены знака напряжений (момент отскока ударника), так как разрывные кривые с течением времени становятся круче. С ростом μ отличия волнового и периодического решений увеличиваются, а общий уровень напряжений падает.

При использовании вместо закона Гука реологического уравнения (1) получим для напряжений дифференциальное уравнение

$$p'' + \chi\big(1+abs(p)\big)\exp\big(abs(p)\big)\,p' + \frac{\mu}{1+\mu/3}\,p = 0. \tag{3}$$

где $p=\alpha\sigma$, $\chi=\dfrac{L\sqrt{E\rho}}{\eta_0}$, штрихами обозначены производные по безразмерному времени τ.

Рассматривая стержень как систему с равномерно-распределенными параметрами, будем иметь уравнения:

$$v_0' = \frac{\mu}{\rho E}\,p_0, \quad p'' + \chi\big(1+abs(p)\big)\exp\big(abs(p)\big)p' - p^{**} = 0 \tag{4}$$

где дополнительно к принятому ранее обозначено $v=V/c$, V – скорость ударника, индексом “0” отмечены параметры на ударяемом торце стержня, p^{**} – вторая производная по безразмерной продольной координате $\xi=x/L$.

Ниже на рис.2 кривыми 1,2 показано изменение напряжений во времени в точках $x=0$ и $x=L$. На этих же рисунках кривыми 3,4 показаны напряжения и поглощенная энергия, построенные по уравнению (3). При вычислениях использованы значения постоянных: $M=1.0Кг$, $E=2e11Па$, $\eta_0=1e11$ $Па/с$, $\rho=7.8e3Кг/м^3$, $d=5e\text{-}3м$, $L=1.0м$. Для указанных значений M, ρ, d (диаметр стержня) и L имеем $\mu\sim0.153$.

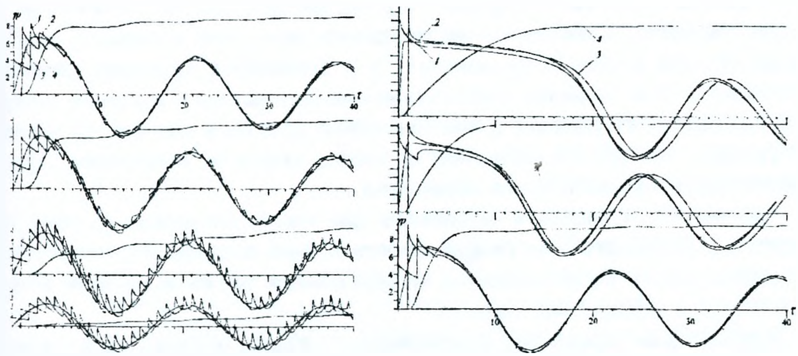

Рисунок 2 – Изменение напряжений (кривая 1– ударяемый торец, 2– закрепленный торец, 3– одномассовое решение) и поглощенная энергия (кривая 4) при скоростях соударения V_0=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 5.0, 10.0

При небольших скоростях соударения поведение реономного материала мало отличается от упругого. С ростом V_0 отличия нарастают, — на ударяемом конце стержня пиковые напряжения непосредственно после удара все более отличаются от "идеально-упругого" значения $\sigma^{max}-\sigma_0$, длительность спада напряжений увеличивается, процессы отражений от торцов сказываются все в меньшей степени, а решение переходит в квазипериодическое с медленно нарастающим периодом. Эти особенности связаны с тем, что доля энергии, поглощаемая материалом стержня на начальном участке движения, нарастает с ростом скорости соударения V_0.

По проведенным вычислениям видно, что наличие рассеяния энергии в реальном материале приводит к тому, что максимумы напряжений и деформаций по времени не уходят далее первой четверти периода собственных колебаний системы. При небольших скоростях удара они имеют место на закрепленном торце стержня, но переходят на ударяемый торец с возрастанием V_0. Как идет процесс перемещения максимума, можно проследить по рис. 2. При уменьшении массы ударника кривые заметно изменяются, поглощение энергии стержнем идет медленнее. В качестве примера на рис. 3 показаны кривые напряжений и деформаций при массе ударника, равной массе стержня (остальные числовые данные приняты, как на рис. 2).

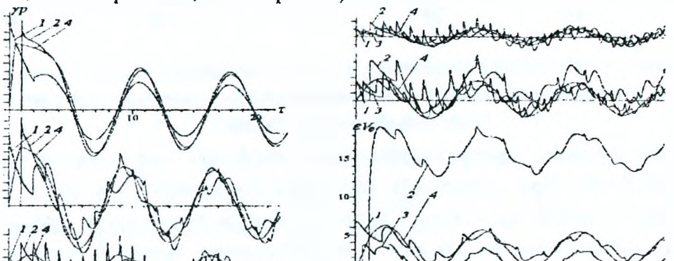

Рисунок 3 – Изменение напряжений (V_0=1.0, 5.0, 10.0) и деформаций (V_0=5.0, 2.5, 1.0) при μ=1 (снизу вверх). 1– ударяемый торец, 2– закрепленный торец, 3– середина стержня, 4– одномассовое решение

С ростом скорости соударения V_0 решения по (3) и (4) сближаются, и поэтому становится возможным анализировать поведение материала, используя более простой подход по уравнению (3). К сожалению, сравнивая решения по уравнениям (3) и (4), нельзя сделать однозначного вывода о числовом соответствии одномассового решения с многомассовым хотя бы в одной точке стержня – результаты зависят от координаты точки, скорости соударения, массово-инерционных и реологических параметров.

Независимо от скорости соударения при некотором уровне η_0 имеет место переход в апериодический режим движения, при котором отсутствует отскок ударника (рис.4). Сравнительно с колебательным режимом уровень напряжений падает, а деформаций – растет.

Комплексным параметром, определяющим характер процесса, является величина $\lambda^2 = \frac{\chi^2(1+\mu/3)}{\mu} = \frac{(1+\mu/3)LEM}{A\eta_0^2}$. Значение $\lambda\sim 2$ может быть использовано для предварительного назначения условий проведения соответствующих технологических операций. Рассматривая $(1+\mu/3)$ как поправку, можно сказать, что переход к апериодическому режиму зависит от параметра $\frac{LEM}{A\eta_0^2}$. Начальная вязкость η_0 экспоненциально зависит от абсолютной температуры, поэтому именно она и определяет характер поведения материала. Однако аналогичного результата можно добиться и путем изменения массы ударника — абсолютно неупругий удар гарантировано будет иметь место при условии $M > 2\frac{A\eta_0^2}{LE}$ или $mM \geq (2\frac{A\eta_0}{c})^2$.

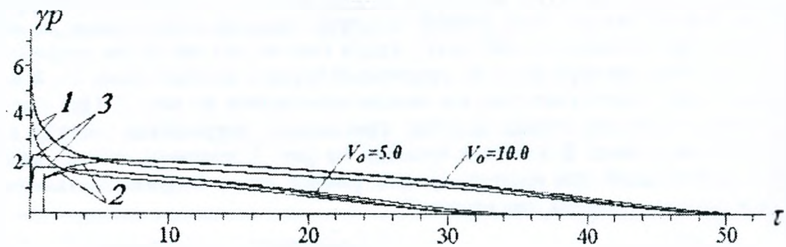

Рисунок 4 – Изменение напряжений в стержне при апериодическом режиме для случая μ~0.306 (L=2.0). 1– ударяемый торец, 2–закрепленный торец, 3– одномассовое решение

На рис.5 показано распределение максимальных деформаций вдоль оси стержня для $T=20$. При невысоких скоростях соударения для обоих режимов характерным является достаточно равномерное распределение деформаций с некоторым повышением их уровня к закрепленному торцу. С ростом V_0 уровень деформаций возле ударяемого торца быстро нарастает как по абсолютной величине, так и относительно уровня деформаций противоположного конца стержня.

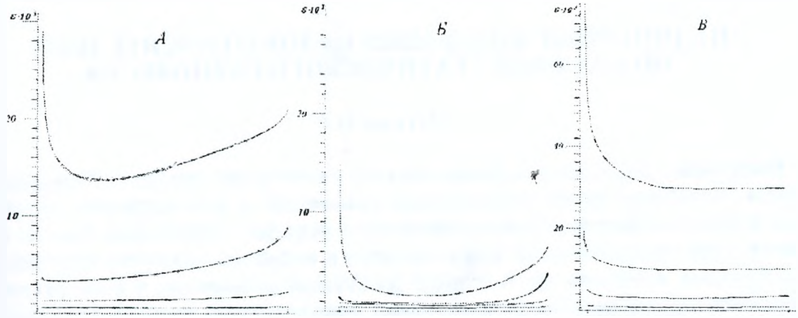

Рисунок 5 – Распределение деформаций вдоль стержня при V_0=1.0, 2.5, 5.0, 10.0 (снизу вверх). Расчетные параметры: А – μ=0.153, Б – μ =1.0, В – μ=0.306; А, Б – η_0=1e11; В – η_0=1e8 (апериодический режим)

Графики $\varepsilon(\xi)$ дают представление и о характере формоизменения стержня, так как с учетом равенства нулю объемной пластической деформации имеем выражение для радиального перемещения точек поверхности стержня в виде

$$u = \frac{d}{4}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)\right).$$

На рис.6 приведены графики коэффициента восстановления $k_v=|V_k/V_0|$, где V_k – скорость ударника в момент смены знака напряжений на ударяемом торце стержня. Как видим, учет инерционных свойств материала по многомассовой модели дает существенное отличие от одномассового подхода – коэффициент восстановления ограничен сверху некоторым уровнем, зависящим от соотношения масс стержня и ударника. С уменьшением вязкости материала этот предельный уровень также уменьшается.

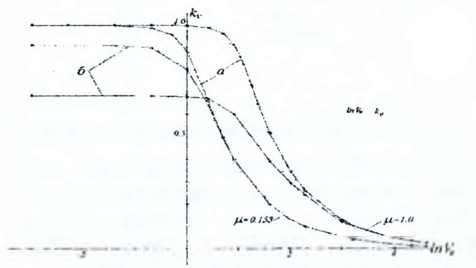

Рисунок 6 – Зависимость коэффициента восстановления от скорости соударения (а – одномассовая, б – многомассовая модель)

Заключение. Уравнение Максвелла с нелинейной вязкостью позволяет адекватно описать поведение реального упруго-пластического материала при ударе и может быть использовано для построения прогноза поведения такого материала при интенсивных динамических нагрузках.

Список цитированных источников

1. Лурье, А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики / ГИТТЛ. – М.-Л.,1951. – 432 с.
2. Кильчевский, Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев: Наукова думка, 1975. – 319 с.