

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Щетько Н.С.

Введение. Классическая динамика сооружений, как известно, базируется на теории линейных дифференциальных уравнений и рассматривает колебания конструкций относительно ненапряженного исходного состояния. Вместе с тем, практически все материалы, используемые в несущих элементах строительных конструкций, в той или иной степени физически нелинейны, и конструкция, нагруженная постоянной нагрузкой, имеет определенный уровень напряжений в характерных сечениях [1].

Линейные колебания. Наложение динамических усилий на усилия от нагрузок, приложенных статически, может приводить к тому, что возникающие в конструкциях напряжения и деформации превышают допустимые в предположении условно-линейной области работы материала (которую можно принять для статического и динамического расчета в первом приближении).

При линейных изгибных колебаниях вертикальных балок положение статического равновесия будет совпадать с продольной осью (ось x) балки. Схема вертикальной балки и графиков свободных линейных колебаний приведенной массы M представлены на рисунке 1.

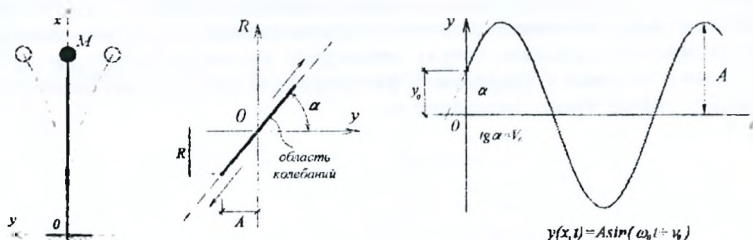


Рисунок 1 – Схема линейных колебаний вертикальной консольной балки

Линейные колебания горизонтальных балок будут совершаться около положения статического равновесия, т. е. относительно точки расположения приведенной массы (на расстоянии y_{cm} от горизонтальной оси). Схема горизонтальной балки, сил, действующих на балку, и графиков свободных линейных колебаний приведенной массы M представлены на рисунке 2.

Уравнение свободных линейных колебаний приведенной массы M горизонтальной балки

$$M \frac{d^2(y + y_{cm})}{dt^2} + R(y + y_{cm}) = Mg \quad (1)$$

после преобразования, с учетом $Mg = R(y_{cm})$, сводится к известному однородному уравнению:

$$M \ddot{y} + R(y_{cm})y = 0 \quad (2)$$

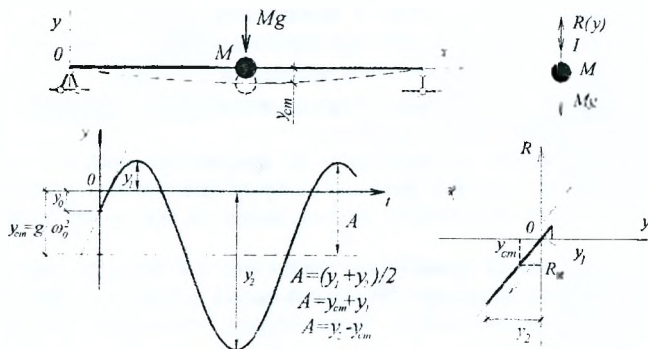


Рисунок 2 – Схема линейных колебаний горизонтальной свободно опертой балки

Таким образом, статический прогиб не входит в дифференциальное уравнение движения, если движение рассматривать от состояния статического равновесия, и линейные решения для частот свободных колебаний вертикальных и горизонтальных балок будут равны между собой.

Нелинейные колебания. При нелинейных изгибных колебаниях *вертикальных* балок положение статического равновесия будет также совпадать с продольной осью (ось x) балки. Схема вертикальной балки и график свободных нелинейных колебаний приведенной массы M представлены на рисунке 3.

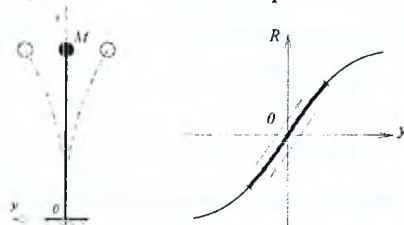


Рисунок 3 – Схема нелинейных колебаний вертикальной консольной балки

В случае нелинейных колебаний горизонтальных балок расстояние от горизонтальной оси опор до оси колебаний $z = y + y_{cm}$ (рисунок 4) приведенной массы M определится из решения нелинейного уравнения

$$\frac{R}{M} z - \beta z^3 = g \quad (3)$$

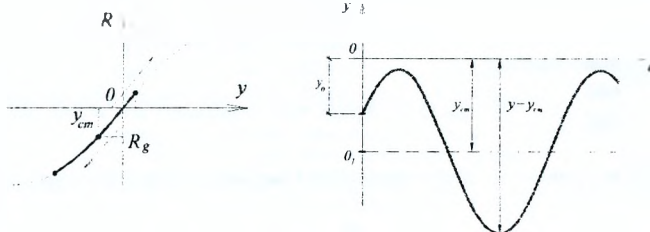


Рисунок 4 – Схема нелинейных колебаний горизонтальной свободно опертой балки

Статический прогиб входит в нелинейное дифференциальное уравнение движения, значит, будет входить и в решение (период, амплитуду). Причем y_{cm} одного порядка с y . Наличие Mg в уравнении колебаний смещает ось колебаний на y_{cm} и меняет амплитуду и период нелинейных колебаний по сравнению с колебаниями вертикального стержня.

Для динамического расчета балок из физически-нелинейного материала с конечным числом степеней свободы автором предложена оригинальная методика, позволяющая определить законы движения всех колеблющихся масс на балке [2].

В качестве примера применения предложенной методики решим задачу определения закона нелинейных колебаний балки постоянного поперечного сечения с двумя степенями свободы относительно положения статического равновесия (рисунок 5).

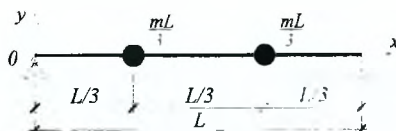


Рисунок 5 – Шарнирно опертая балка с двумя степенями свободы

Уравнение движения рассматриваемой балки примем в следующем виде:

$$y(x,t) = A_1(t) \sin \frac{\pi x}{L} + A_2(t) \sin \frac{2\pi x}{L}. \quad (4)$$

Тогда уравнение колебаний каждой из масс с учетом (1) запишется как:

$$\begin{aligned} -M_1 \left[\sin \frac{\pi x}{L} A_1(t) + \sin \frac{2\pi x}{L} A_2(t) \right] + \left[\alpha_{11} \frac{\partial U}{\partial A_1(t)} + \alpha_{21} \frac{\partial U}{\partial A_2(t)} \right] &= M_1 g, \\ -M_2 \left[\sin \frac{\pi x}{L} A_1(t) + \sin \frac{2\pi x}{L} A_2(t) \right] + \left[\alpha_{12} \frac{\partial U}{\partial A_1(t)} + \alpha_{22} \frac{\partial U}{\partial A_2(t)} \right] &= M_2 g. \end{aligned} \quad (5)$$

Потенциальная энергия балки при ее изгибе по форме $y(x,t)$ определится выражением:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{EI}{dx^2} \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (6)$$

После вычисления интеграла (6) для прямоугольной формы поперечного сечения с размерами $b \times h$ и нелинейного соотношения «напряжение – деформация» в виде кубической параболы

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}} \varepsilon^3, \quad (7)$$

получена зависимость:

$$U = -\frac{bEh^3\pi^4}{5760L^2\sigma_{\text{lim}}} (-120L^4\sigma_{\text{lim}}^2 A_1^2 + E^2 h^2 \pi^4 A_1^4 + 64(-30L^4\sigma_{\text{lim}}^2 + E^2 h^2 \pi^4 A_1^2) A_2^2 + 256E^2 h^2 \pi^4 A_2^4). \quad (8)$$

Запишем уравнения для определения перемещений точек расположения масс:

$$Y_1 = A_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad Y_2 = A_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (9)$$

и решим их относительно A_1, A_2

$$A_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{\sqrt{3}}, A_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

Тогда нелинейная сила упругости балки в местах расположения масс определится по формулам [3]:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial U}{\partial Y_1} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial U}{\partial A_2} \frac{\partial A_2}{\partial Y_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial U}{\partial A_2}, \\ R_2 &= \frac{\partial U}{\partial Y_2} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial Y_2} + \frac{\partial U}{\partial A_2} \frac{\partial A_2}{\partial Y_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial U}{\partial A_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial U}{\partial A_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

либо, после вычисления (11) с учетом (8), (9) и (10), по формулам

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{bEh^3\pi^4 \left(E^2 h^2 \pi^4 (-321Y_1^3 + 765Y_1^2 Y_2 + 255Y_2^3) + 180L^4 (17Y_1 - 15Y_2) \sigma_{lim}^2 \right)}{12960L^7 \sigma_{lim}^2}, \\ R_2 &= \frac{bEh^3\pi^4 \left(E^2 h^2 \pi^4 (-321Y_1^3 + 765Y_1^2 Y_2 + 255Y_2^3) + 180L^4 (17Y_1 - 15Y_2) \sigma_{lim}^2 \right)}{12960L^7 \sigma_{lim}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

По формулам (4) – (12) для балки, представленной на рисунке 5, при $E_{ред} = 3,5 \cdot 10^{10}$ Па, $\sigma_{lim} = 2 \cdot 10^7$ Па, $b = 0,5$ м, $h = 0,22$ м, $L = 6$ м получены силы нелинейной упругости и построены графики колебаний масс (рисунок 6).



Рисунок 6 – Графики колебаний точек расположения масс на свободно опертой балке при $y_1(0) = 0,01$ м; $y_2(0) = 0,015$ м; $V_1(0) = 1$ м/сек; $V_2(0) = 2$ м/сек.
а) колебания первой массы б) колебания второй массы

Численные исследования и построение графиков выполнены с использованием средств символьной математики и компьютерной алгебры Mathematica [4].

Заключение. В работе предложены новая методика динамического расчета балок из физически нелинейного материала с конечным числом степеней свободы, позволяющая определить законы движения всех колеблющихся масс на балке.

Список цитированных источников

1. Агапов, В.П. О влиянии статических нагрузок на частоты и формы собственных колебаний шарнирно-стержневых систем / В.П. Агапов, А.В. Стрелин, В.А. Коротков // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 5. – С. 43–46.
2. Босаков, С.В. Нелинейные колебания однопролетных балок / С.В. Босаков, Н.С. Щетько // Проблемы современного бетона и железобетона: сборник трудов. В 2 ч. / М.Ф. Марковский (отв. ред.) [и др.] – Минск: Стринко, 2007. – Ч. 1. – С. 77–95.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 6-е изд. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Кулешов, А.А. Уравнения математической физики в системе Mathematica / А.А. Кулешов. – Мн.: БГУ, 2004. – 294 с.