УДК 517.9

Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский

СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе рассматриваются неавтономные системы стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов. Исследуются процессы, ассоциированные с решениями систем в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Для этого рассматривается предельное поведение представителей указанных решений. Доказано, что пределом решений систем конечно-разностных уравнений являются решения систем стохастических интегральных уравнений с θ-интегралами, причем $\theta \in [0, 1/2]$. Если $\theta \in [1/2, 1]$, то решения систем стохастических уравнений могут быть приближены решениями систем конечно-разностных уравнений с опережением. Доказанные теоремы носят необходимый и достаточный характер. Также даны оценки скорости сходимости.

При исследовании аппроксимаций случайного процесса броуновского движения возникают трудности, связанные с тем, что соответствующие «приближенные» интегралы не сходятся к стохастическому интегралу Ито, если даже предел существует. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений. Предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует, как правило, является решением некоторого другого уравнения. Учитывая подобную неустойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито, которая впервые была отмечена Вонгом и Закаем [1], можно понять, почему в задачах подобного типа уравнения обычно рассматриваются в симметризованной форме. Важной оказывается «согласованность» симметризованных стохастических и обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [2] было предложено избавиться от вышеуказанных сложностей введением запаздывания. С другой стороны, было показано, что стохастические уравнения в смысле Ито могут быть аппроксимированы при помощи конечно-разностных уравнений.

На основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов в статье [3] предложен единый подход к аппроксимации стохастических дифференциальных уравнений, который позволяет исследовать довольно широкий класс уравнений. Используя этот подход, например, в работах [4; 5] исследованы стохастические уравнения, содержащие интегралы Ито, Стратоновича и стохастические θ-интегралы, где $\theta \in [0,1]$.

В данной работе рассматриваются неавтономные системы стохастических дифференциальных уравнений в указанной алгебре. В этом случае приходится исследовать процессы, ассоциированные с решениями систем в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. Для этого необходимо рассматривать предельное поведение представителей указанных решений. В статье [6] показано, что эти решения удовлетворяют конечно-разностным уравнениям с осреднением. В настоящей работе доказывается, что пределом решений систем конечно-разностных уравнений являются решения систем стохастических интегральных уравнений с θ-интегралами, причем $\theta \in [0, 1/2]$. Если $\theta \in [1/2, 1]$, то решения систем стохастических уравнений могут быть приближены решениями систем конечно-разностных уравнений с опережением. Доказанные теоремы носят необходимый и достаточный характер. Также даны оценки скорости сходимости.

На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dX^i(t) = f^i(t, X(t))dB(t) + g^i(t, X(t))dt,\ i = \overline{1,r},\ t \in [0, a], \tag{1}$$

с начальным условием $X^i(0) = x^i$.

В алгебре обобщенных случайных процессов $G(T,\Omega)$ [6] ей будет соответствовать следующая задача Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde h}\tilde X^i(\tilde t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde f^{ij}(\tilde t, \widetilde X(\tilde t))d_{\tilde h}\tilde B^j(\tilde t) + \tilde g^i(\tilde t, \widetilde X(\tilde t))d_{\tilde h}\tilde t, \\ \tilde X^i(\tilde t)|_{[\tilde 0, \tilde h)} = \tilde X^{0i}(\tilde t),\quad i = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde 0 = [(0)],\ \tilde h = [(h_n)] \in \widetilde T,\ \widetilde f^{ij} = [(f_n^{ij})] \in G(\tilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ и $\tilde g^i = [(g_n^i)] \in G(\tilde{\mathbb{R}}^{r+1})$ ассоциируют функции f^{ij} и $g^i,\ i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,m}$ соответственно, а $\tilde B^j = [(B_n^j)] \in G(\widetilde T, \Omega)$ – обобщенный процесс броуновского движения и «начальное условие» $\tilde X^{0i} = [(X_n^{0i})] \in G(\widetilde T, \Omega)$ – ассоциирует $x^i \in \mathbb{R}$.

На уровне представителей задача (2) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n(t))[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t))h_n, \\ X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_n^{0i}(t),\quad i = \overline{1,r},\ t \in [0;T], \end{cases} \tag{3}$$

где $\overline{B}_n^j(t) = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,\ \rho_n^j(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \rho_n^j \ge 0,\ supp\ \rho_n^j(t) \subset [0, 1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s)ds = 1,\quad j = \overline{1,m},\quad B(t) = (B^1(t), ..., B^m(t))$ – m-мерный стандартный процесс броуновского движения, $f_n^{ij} = (f^{ij} * \overline{\rho}_n),\ g_n^i = (g^i * \overline{\rho}_n),\ f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1}),\ g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, а $\overline{\rho}_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0, 1/n]^{r+1}$ и $\int_0^{1/n} ... \int_0^{1/n} \overline{\rho}(s, s_1, ... s_r)dsds_1...ds_r = 1$.

Система уравнений, ассоциированных системе (3), имеет вид:

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^{m} (\theta_j)\int_0^t f^{ij}(s, X(s))dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s))ds,\ i = \overline{1,r}, \tag{4}$$

где $X(t) = (X^1(t), X^2(t), ..., X^r(t)), x = (x^1, x^2, ..., x^r) \in R^r,\quad g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1}),\ f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,m}$, стохастические интегралы в правой части (4) – это стохастические θ-интегралы, $\theta \in [0,1]$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда имеют место следующие представления: $t = \tau_t' + k_t h_n = \tau_t + m_t\delta$, $\delta_1 = \lambda h_n$, $\lambda \in N$, $1/n \le \delta_1 \le 1/n + h_n$, где $\tau_t = \tau_t' + k'_t h_n$, $0 \le \tau_t < \delta$, $1/n < \delta = lh_n < 1$, $l, m_t, k_t, k'_t \in \mathbb{N}$.

Используя эти обозначения, решение системы (3) можно записать в виде:

$$X_n^i(t) = X_n^{0i}(\tau_t') + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_t-1} f_n^{ij}(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n)) \times$$

$$\times [B_n^j(\tau_t' + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau_t' + kh_n)] + \sum_{k=0}^{k_t-1} g_n^i(\tau_t' + kh_n, X_n(\tau_t' + kh_n))h_n. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение последовательности $K^i(n,h_n)$ [7], с помощью которых будут сформулированы необходимое и достаточное условия сходимости последовательностей X_n^i к решениям системы (4):

$$K^i(n,h_n)=\iint\limits_{\substack{0\le s,\tau\le 1/n,\\ |s-\tau|\le h_n}}\left(1-\frac{|s-\tau|}{h_n}\right)\rho_n^i(s)\rho_n^i(\tau)dsd\tau.$$

Можно показать справедливость следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть* $f^{ij}\in\mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i\in\mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,m}$, *тогда для решения задачи (3)* $X_n(t)$ *и всех* $t\in T$ *справедливо следующее неравенство:*

$$E[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n^j(\tau+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)]-\sum_{j=1}^{m}(I)\int_{\tau_t}^{t}f^{ij}(s,X(s))dB^j(s)]\le$$

$$\le\frac{C}{n^4\delta^2h_n}+\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^j(\tau_t+k\delta)-X^j(\tau_t+k\delta)\right]^2.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любого* $t\in T$ *справедливо следующее неравенство:*

$$E[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{\alpha=1}^{r}f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)]^2-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{\tau_t}^{t}f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds]^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n^i(\tau_t+k\delta)-X^i(\tau_t+k\delta))^2.$$

Лемма 3. *Пусть* $X_n(t)$ *решение задачи (3), причем* $f^{ij}\in\mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g^i\in\mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$. *Тогда для всех* $t\in T$ *будет справедливо неравенство:*

$$E[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$

$$\times([B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n)]^2-h_nK^j(n,h_n))]^2\le C\delta+\frac{C}{n^2\delta^2}.$$

Лемма 4. *Пусть выполняются условия предыдущих лемм. Тогда для всех* $t\in T$ *будет справедливо неравенство:*

$$E[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1}g_n^i(\tau_t+k\delta+ph_n,X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))h_n-\int_{\tau_t}^{t}g^i(s,X(s))ds]^2\le$$

$$\le\frac{C\delta^2}{h_n}+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E[X_n^i(\tau_t+k\delta)-X^i(\tau_t+k\delta)]^2.$$

Теорема 1. *Пусть* $\theta_j\in[0;1/2]$, $f^{ij}\in\mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g^i\in\mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, *«начальное условие» задачи Коши (3)* $X_n^{0i}(t)$ *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$ *и является* $\mathcal{F}_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t\in[0,h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (3)* $X_n^i(t)$ *и решения системы (4)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-X(t)\|^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}E\|X_n^0(t)-x\|^2+C\gamma_n+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n)-(1-2\theta_j))^2,$$

где $\gamma_n=1/(n^{3/2}h_n)$ *если* $1/n^{3/2}<h_n<1/n^{5/4}$, $\gamma_n=1/(n^{2/3}h_n^{1/3})$ *если* $1/n^{5/4}\le h_n\le 1/n^{1/2}$, $\gamma_n=h_n$ *если* $1/n^{1/2}\le h_n$.

Доказательство. В дальнейших выкладках воспользуемся тем, что система уравнений (4) с θ-интегралами эквивалентна следующей системе уравнений с интегралами Ито (см., например, [8]):

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^{m}(I)\int_0^t f^{ij}(s, X(s))dB^j(s) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_j\int_0^t f^{\alpha j}(s, X(s))\partial_\alpha f^{ij}(s, X(s))ds +$$

$$+\int_0^t g^i(s, X(s))ds, \quad i = \overline{1,r}\,.$$

Используя эту связь и формулу (5), представим разность $X_n^i(t) - X^i(t)$ в следующем виде:

$$X_n^i(t) - X^i(t) = X_n^{0i}(\tau'_t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k_t-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n) + \sum_{k=0}^{k_t-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n))h_n -$$

$$-x^i - \sum_{j=1}^{m}(I)\int_0^t f^{ij}(s, X(s))dB^j(s) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_j\int_0^t f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s, X(s))ds - \int_0^t g^i(s, X(s))ds =$$

$$= [X_n^{0i}(\tau'_t) - x^i + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k'_t-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n)] - \sum_{j=1}^{m}(\theta)\int_0^{\tau_t} f^{ij}(s, X(s))dB^j(s) +$$

$$+\sum_{k=0}^{k'_t-1} g_n^i(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n))h_n - \int_0^{\tau_t} g^i(s, X(s))ds] +$$

$$+[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))[B_n^j(\tau + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta)] -$$

$$-\sum_{j=1}^{m}(I)\int_{\tau_t}^{t} f^{ij}(s, X(s))dB^j(s)] +$$

$$+[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1}(f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + ph_n, X(\tau_t + k\delta + ph_n))) - f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau + k\delta + (p+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + ph_n)] - \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_j\int_{\tau_t}^{t} f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s, X(s))ds] +$$

$$+[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1} g_n^i(\tau_t + k\delta + ph_n, X_n(\tau_t + k\delta + ph_n))h_n - \int_{\tau_t}^{t} g^i(s, X(s))ds] =$$

$$= H_0(t) + H_1(t) + H_2(t) + H_3(t).$$

Рассмотрим $H_0(t)$. Несложно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$H_0(t) = \left[X_n^{0i}(\tau'_t) - x^i\right] + \{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{k'_t-1} f_n^{ij}(\tau'_t + kh_n, X_n(\tau'_t + kh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau'_t + (k+1)h_n) - B_n^j(\tau'_t + kh_n)]\} - \{\sum_{j=1}^{m}(\theta_j)\int_0^{\tau_t} f^{ij}(s, X(s))dB^j(s)\} +$$

$$+\{\sum_{k=0}^{k'_t-1} g_n^i(\tau'_t+kh_n, X_n(\tau'_t+kh_n))h_n\} - \{\int_0^{\tau_t} g^i(s,X(s))ds\} =$$

$$=\left[X_n^{0i}(\tau'_t)-x^i\right]+A_1(t)-A_2(t)+A_3(t)-A_4(t).$$

Используя ограниченность функций f^{ij}, а так же представления h_n и δ, можно показать, что для слагаемого $A_1(t)$ справедлива оценка:

$$E(A_1(t))^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n}. \tag{6}$$

Для оценки $A_2(t)$ воспользуемся связью между θ-интегралом и интегралом Ито, а также свойствами интеграла Ито.

$$E(A_2(t))^2 = E[\sum_{j=1}^{m}(I)\int_0^{\tau_t} f^{ij}(s,X(s))dB^j(s)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_j\int_{\tau_t}^{t} f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds]\le C\delta. \tag{7}$$

Исходя из ограниченности функций g^i, получим оценки для $A_3(t)$ и $A_4(t)$:

$$E(A_3(t))^2 = E[\sum_{k=0}^{k'_t-1}\int_0^{1/n}\int_0^{1/n} g(\tau'_t+kh_n+s, X_n(\tau'_t+kh_n)+u)\ \rho(s,u)dsdu\cdot h_n]^2 \le C\delta^2. \tag{8}$$

$$E(A_4(t))^2 = E\left[\int_0^{\tau_t} g^i(s,X(s))ds\right]^2 \le C\delta^2. \tag{9}$$

Из оценок (6) – (9) получим оценку для $H_0(t)$:

$$E(H_0(t))^2 \le C\left(X_n^{0i}-x^i\right)^2+\frac{C\delta^2}{h_n}. \tag{10}$$

По лемме 1 для слагаемого $H_1(t)$ имеем:

$$E(H_1(t))^2 \le \frac{C}{n^4\delta^2 h_n}+\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^j(\tau_t+k\delta)-X^j(\tau_t+k\delta)\right]^2. \tag{11}$$

Для оценки слагаемого $H_2(t)$ воспользуемся видом $X_n(t)$ из равенства (5).

$$H_2(t)=\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}(f_n^{ij})'_t(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))h_n\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r} f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\,[B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n)]-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\theta_j\int_{\tau_t}^{t} f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds\}+$$

$$-\{\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\gamma}}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}[f_n^{\alpha\gamma}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))-$$

$$-f_n^{\alpha\gamma}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n-\delta_1, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n-\delta_1))]\times$$

$$\times[B_n^\gamma(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^\gamma(\tau_t+k\delta+qh_n)]\,[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\gamma}}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r} f_n^{\alpha\gamma}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))\times$$

$$\times[B_n^\gamma(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^\gamma(\tau_t+k\delta+qh_n)]\,[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r} g_n^i\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))$$

$$[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}(f_n^{ij})''_{tt}(\tilde{s},X(\tilde{s}))h_n^2[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}\partial_\alpha(f_n^{ij})'_t(\tilde{s},X_n(\tilde{s}))h_n\,(X_n^\alpha(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-X_n^\alpha(\tau_t+k\delta+qh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\partial^2_{\alpha,\beta}f_n^{ij}(\tilde{s},X(\tilde{s}))(X_n^\alpha(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-$$

$$-X_n^\alpha(\tau_t+k\delta+qh_n))(X_n^\beta(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-X_n^\beta(\tau_t+k\delta+qh_n))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\}=$$

$$=J_1(t)+J_2(t)+J_3(t)+J_4(t)+J_5(t)+\frac{1}{2}J_6(t)+\frac{1}{2}J_7(t)+\frac{1}{2}J_8(t),$$

где $\tilde{s}$ принадлежат полуинтервалу $[\tau_t+k\delta+qh_n,\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)$.

Рассмотрим слагаемое $J_1(t)$. Для его оценки воспользуемся ограниченностью функции $(f_n^{ij})'_t$ и тем, что (см. например, [7]) для процесса $B_n(t)$ и любых $t_1, t_2\in T$ и $n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства $E\left(B_n(t_1)-B_n(t_2)\right)^{2p}\le C\,|\,t_1-t_2\,|^p$; $E\left(B_n(t)-B(t)\right)^{2p}\le C/n^p$, $p=1,2,\ldots$. Тогда:

$$E(J_1(t))^2\le Cmm_t(l-1)h_n^2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}E[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]^2\le C\delta. \quad (12)$$

Представим слагаемое $J_2(t)$ в следующем виде:

$$J_2(t)=\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r} f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n))-\sum_{j=1}^{m}\theta_j\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{\tau_t}^{t}f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds\}+$$

$$+\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}[f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta+qh_n, X_n(\tau_t+k\delta+qh_n))-f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta, X_n(\tau_t+k\delta))]\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)]\,[B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n))\}=$$

$$=J_{21}(t)+J_{22}(t).$$

Для оценки $J_{21}(t)$ воспользуемся тождеством:

$$[B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+ph_n)]^2-\sum_{j=p+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)]^2=$$

$$=2\sum_{j=p+1}^{l}[B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)-B_n(\tau_t+k\delta+(j-1)h_n)][B_n(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n(\tau_t+k\delta+jh_n)]. \quad (13)$$

Применяя тождество (13) при p=0, преобразуем выражение $J_{21}(t)$ к виду:

$$J_{21}(t)=\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{\alpha=1}^{r}f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$

$$\times[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)]^2-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{\tau_t}^{t}f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds\}-$$

$$-\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\times$$

$$\times([B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n)]^2-h_nK^j(n,h_n))\}-$$

$$-\{\sum_{j=1}^{m}\frac{K^j(n,h_n)}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{\alpha=1}^{r}f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t+k\delta,X_n(\tau_t+k\delta))\delta-\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{\tau_t}^{t}f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{1-2\theta_j-K^j(n,h_n)}{2}\sum_{\alpha=1}^{r}\int_{\tau_t}^{t}f^{\alpha j}\partial_\alpha f^{ij}(s,X(s))ds=J_{211}(t)+J_{212}(t)+J_{213}(t)+J_{214}(t).$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$E(J_{211}(t))^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n^j(\tau_t+k\delta)-X^j(\tau_t+k\delta))^2. \quad (14)$$

Лемма 3 дает следующую оценку для слагаемого $J_{212}(t)$:

$$E(J_{212}(t))^2\le C\delta+\frac{C}{n^2\delta^2}. \quad (15)$$

Используя теорему Лагранжа и представление f_n^{ij}, получим оценку для слагаемого $J_{213}(t)$:

$$E(J_{213}(t))^2\le\frac{C}{n^2}+C\delta+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n^i(\tau_t+k\delta)-X^i(\tau_t+k\delta))^2. \quad (16)$$

Т.к. $f^{ij}\in\mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, то для слагаемого $J_{214}(t)$ справедливо:

$$E(J_{214}(t))^2\le C\sum_{j=1}^{m}\left(K^j(n,h_n)-(1-2\theta_j)\right)^2. \quad (17)$$

Таким образом, из формул (14) – (17) вытекает, что

$$E(J_{21}(t))^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E(X_n^i(\tau_t+k\delta)-X^i(\tau_t+k\delta))^2+$$

$$+\frac{C\delta^2}{h_n}+C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n)-(1-2\theta_j))^2. \quad (18)$$

Рассмотрим слагаемое $J_{22}(t)$. Для его оценки применим теорему Лагранжа о конечных приращениях, неравенство Коши – Буняковского и тождество (13).

$$E(J_{22}(t))^2 = \frac{1}{4} E\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{r}[f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta + qh_n, X_n(\tau_t + k\delta + qh_n)) -$$
$$-f_n^{\alpha j}\partial_\alpha f_n^{ij}(\tau_t + k\delta, X_n(\tau_t + k\delta))]\,([B_n^j(\tau_t + (k+1)\delta) - B_n^j(\tau_t + k\delta + qh_n)) -$$
$$-\sum_{s=q}^{l-1}[B_n^j(\tau_t + k\delta + (s+1)h_n) - B_n^j(\tau_t + k\delta + sh_n))^2)\}^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n}. \qquad (19)$$

Окончательная оценка для $H_2(t)$ получается из оценок (18) и (19).

$$E(H_2(t))^2 \le \frac{C}{n\delta} + C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1} E(X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta))^2 +$$
$$+\frac{C\delta^2}{h_n} + C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2. \qquad (20)$$

Лемма 4 дает оценку слагаемого $H_3(t)$:

$$E(H_3(t))^2 \le \frac{C\delta^2}{h_n} + C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1} E[X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta)]^2. \qquad (21)$$

Окончательно из формул (10), (11), (20), (21) следует неравенство:

$$E(X_n^i(t) - X^i(t))^2 \le C\left(X_n^{0i} - x^i\right)^2 + \frac{C\delta^2}{h_n} + \frac{C}{n^4\delta^2 h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta +$$
$$+C\delta\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1} E\left[X_n^i(\tau_t + k\delta) - X^i(\tau_t + k\delta)\right]^2 + C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2.$$

Применив дискретный аналог неравенства Гронуола к предыдущему неравенству, получаем:

$$E\,\|X_n(t) - X(t)\|^2 \le C\,\|X_n^0 - x\|^2 + \frac{C\delta^2}{h_n} + \frac{C}{n^4\delta^2 h_n} + \frac{C}{n\delta} + C\delta + C(K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2. \qquad (22)$$

Если $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$, то, положив в (22) $\delta = h_n n^{1/2}$, получим первое неравенство из условия теоремы, если $1/n^{5/4} \le h_n \le 1/n^{1/2}$, тогда выбрав $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$, получим второе неравенство, при $1/n^{1/2} \le h_n$ взяв $\delta = h_n$, получим третье неравенство.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если* $\sup\limits_{t\in[0,h_n)} E\left[X_n^{0i}(t) - x^i\right]^2 \to 0$ *для любого* $i = \overline{1,r}$ *и* $K^j(n,h_n) \to (1-2\theta_j)$, *при* $\theta_j \in [0,1/2]$, $j = \overline{1,m}$, $n \to \infty$, $h_n \to 0$, *так что* $1/n^{3/2} = o(h_n)$, *то* $\sup\limits_{t\in T} E\left\|X_n(t) - X(t)\right\|^2 \to 0$.

Доказательство. Получается предельным переходом в неравенстве (22).

Теорема 2. *Пусть* $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,m}$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^{3/2} = o(h_n)$, *причем* $\sup\limits_{t\in[0,h_n)} E\left[X_n^{0i}(t) - x^i\right]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (3) в* $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности* $K^j(n,h_n)$, $j = \overline{1,m}$.

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (5) в случае когда $\theta \in [1/2,1]$, рассмотрим следующую задачу Коши с опережением:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t+h_n, X_n(t+h_n))[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t+h_n, X_n(t+h_n)); \\ X_n^i(t)|_{[0,h_n)} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1,r}, t \in [0;T]. \end{cases} \qquad (23)$$

С помощью принципа сжимающих отображений несложно показать, что данная задача имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Но, и в этом случае справедлива теорема, аналогичная предыдущей.

Теорема 3. *Пусть* $\theta_j \in [1/2, 1]$, $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ *и* $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, *«начальное условие» задачи Коши (3)* $X_n^{0i}(t)$, *принадлежит* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *и является* $F_{t+1/n}$ *измеримым для любого* $t \in [0, h_n)$. *Тогда для решения задачи Коши (3)* $X_n(t)$ *и решения уравнения (4)* $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} E\| X_n(t) - X(t)\|^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} E\| X_n^0(t) - x\|^2 + C\gamma_n + C\sum_{j=1}^{m}(K^j(n,h_n) - (1-2\theta_j))^2,$$

где $\gamma_n = 1/(n^{3/2}h_n)$, *если* $1/n^{3/2} < h_n < 1/n^{5/4}$, $\gamma_n = 1/(n^{2/3}h_n^{1/3})$, *если* $1/n^{5/4} \le h_n \le 1/n^{1/2}$, $\gamma_n = h_n$ *если* $1/n^{1/2} \le h_n$.

Теорема 4. *Пусть* $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$, $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,m}$. *Если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^{3/2} = o(h_n)$, *причем* $\sup_{t\in[0,h_n)} E\left[X_n^{0i}(t) - x^i\right]^2 \to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши (3) в* $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t \in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности* $K^j(n,h_n)$, $j = \overline{1,m}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wong, E. On the relationship between ordinary and gap between determenistic and stochastic ordinary and stochastic differential equations / E. Wong, M. Zakai // Internat.J.Engin.Sci. – 1965. – Vol. 3. – P. 213–229.
2. Мацкявичюс, В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений / В. Мацкявичюс // Литовский математический сборник. – 1978. – Т. 18, № 3. – С. 101–108.
3. Лазакович, Н.В. Аппроксимация стохастических дифференциальных уравнений конечно-разностными / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1995. – Т. 39, № 3. – С. 20–22.
4. Русина, Т.И. Аппроксимация стохастических интегралов в неоднородном случае / Т.И Русина, О.Л. Яблонский // Весці НАН Беларусі. – 2004. – № 1. – С. 21–26.
5. Lazakovich, N.V. On the approximation of solutions of stochastic equations with θ-integrals / N.V. Lazakovich, A.L. Yablonski // Stochastics and Stoch. Rep. – 2004.–V. 76, № 2. – P. 135–145.
6. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.
7. Яблонский, О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов / О.Л. Яблонский // Доклады НАН Беларуси. – 2000. –Т. 44, № 2. – С. 22–26.

8. Пугачев, В.С. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын – М., 1990.

T.I. Karimava, A.L. Yablonski. **System of Nonautonomous Stochastic Differentials Equations in Algebra of Generalized Stochastic Processes**

The paper deals with stochastic differentials equations in the algebra of generalized stochastic processes. According to this approach one has to investigate limiting behavior of solutions of corresponding finite difference equations with averaging. The main goal of the article is to find necessary and sufficient conditions implying convergence of solutions of nonautonomous multidimensional finite difference equations with averaging. The rate of convergence is estimated.