

УДК 551.492

А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна – Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание и моменты распределения вероятностей изменения речного стока. Эти параметры являются решением системы дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера – Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности. В отличие от использования численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений в работе получено решение, представленное в виде степенных рядов. Для этого были исследованы функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Приведен пример с использованием предлагаемого решения рассматриваемой модели стохастической гидрологии.

Введение

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть \bar{V} – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t . Тогда, полагая $X_t = (V_t - \bar{V}) / \bar{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна – Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V \sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t, x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t, x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера – Планка (т. е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial y} (yp) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид e^{-kr} , а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ сток равен x , а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*, \infty)$ при условии, что $x \in [x_*, +\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = -kx \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*, +\infty)$. Тогда

$$prob(T \geq t) = G(t, x), G(t, x) = \int_{x_*}^{+\infty} p(t, x, y) dy.$$

Интегрируя (2) по y на интервале от x_* до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = -kx \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x = x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(t, x)|_{x=x_*} = 0, \left. \frac{\partial G(t, x)}{\partial x} \right|_{x=+\infty} = 0.$$

Так как функция $1 - G(t, x)$ является распределением случайной величины T , то моменты n -ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями

$$T_k = - \int_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} dt = \int_0^{+\infty} kt^{k-1} G(t, x) dt$$

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение $nt^{n-1} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} = -kx \frac{\partial}{\partial x} (nt^{n-1} G(t, x)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} (nt^{n-1} G(t, x))$ и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} dt = G(+\infty, x) - G(0, x) = -1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_n :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 T_1}{dx^2} - kx \frac{dT_1}{dx} &= -1, \quad \text{при } \frac{dT_1}{dx}(+\infty) = 0, T_1(x)|_{x=x_*} = 0, \\ \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 T_n}{dx^2} - kx \frac{dT_n}{dx} &= -nT_{n-1}, \quad \text{при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0, T_n(x)|_{x=x_*} = 0. \end{aligned}$$

Введем безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1, \quad k^2T_2 = \theta_2, \\ x \frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi, \quad x_* \frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi} (+\infty) = 0, \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0, \\ \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{d\xi} (+\infty) = 0, \theta_2(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0. \quad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

Решение уравнений модели.

Найдем точное решение первого уравнения системы (3).

Введем замену $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ с начальным условием $f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$.

Тогда $f_1(\xi) = (C - \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие

$$f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0, \text{ имеем } f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем:

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и } e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда $\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$ и, следовательно, $f_1(\xi)$ можно

$$\text{представить в виде } f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$ для любого натурального m .

Доказательство. Используя бином Ньютона, $x^m(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k+m}$

и интегрируя, имеем

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k+m} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}.$$

Заметим, что, с другой стороны,

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} d(1-x^2)^n = \frac{2n}{m+1} I_{m+2,n-1}.$$

$$\text{Тогда } I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^n (m+2k-1)} I_{m+2n,0}.$$

Учитывая, что $I_{m+2n,0} = \int_0^1 x^{m+2n} dx = \frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+2n+1}$, имеем

$$I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^{n+1} (m+2k-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!} \quad \text{для любого}$$

натурального m и $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией

$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ соотношением:

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^n dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $B(p, q)$ и гамма-функции

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ – интегралов Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{m,n} = I_{2i,n} = \frac{1}{2} B\left(i + \frac{1}{2}, n+1\right) = \frac{\Gamma\left(i + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(i + \frac{1}{2} + n+1\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{j=1}^i \left(i + \frac{1}{2} - j\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) n!}{2 \prod_{j=1}^{i+n+1} \left(i + \frac{1}{2} + n + 1 - j\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^i \prod_{j=1}^i \left(i + \frac{1}{2} - j\right) 2^n n!}{2^{i+n+1} \prod_{j=1}^{i+n+1} \left(i + \frac{1}{2} + n + 1 - j\right)} = \\
&= \frac{\prod_{j=1}^i (2i + 1 - 2j)(2n)!!}{\prod_{j=1}^{i+n+1} (2i + 1 + 2n + 2 - 2j)} = \frac{(2i - 1)!!(2n)!!}{(2i + 1 + 2n)!!} = \frac{(m - 1)!!(2n)!!}{(m + 1 + 2n)!!} \\
I_{m,n} = I_{2i-1,n} &= \frac{B(i, n + 1)}{2} = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n + 1)}{2\Gamma(i + n + 1)} = \frac{2^{i-1}(i - 1)!2^n n!}{2^{i+n}(i + n)!} = \\
&= \frac{(2i - 2)!!(2n)!!}{(2i + 2n)!!} = \frac{(m - 1)!!(2n)!!}{(m + 2n + 1)!!}.
\end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Следовательно, $f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n + 1)!!}$.

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n + 1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n + 1)!!(2n + 2)} + C -$$

решение уравнения $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1$.

Учитывая начальное условие $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \quad (4)$$

где $S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n + 1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n + 1)!!(2n + 2)}$ или

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k - 1)!!k}, \text{ а } \{t\} - \text{дробная часть числа } t.$$

Используя предлагаемую методику, найдем решение уравнения:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} - \xi \frac{dG}{d\xi} = -S_1(\xi), \quad \left. \frac{dG}{d\xi} \right|_{\xi=+\infty} = 0, \quad G(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0.$$

Введя замену $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному

уравнению первого порядка $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$, с начальным условием

$$f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0.$$

Аналогично, как и для первого уравнения системы (3), получим $f_2(\xi) = (C - \int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi).$$

Учитывая начальное условие $f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$, имеем

$$f_2(\xi) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt - \int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Учитывая, что $S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k}{2} \right\}} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!! k}$, найдем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k}{2} \right\}}}{(k-1)!! k} \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Заметим, что для любого $n \geq 2$ выполняется

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = -t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-2} dt = (n-1) J_{n-2}.$$

Учитывая, что, $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $J_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t dt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1$,

имеем $J_{2k} = (2k-1)!! J_0 = (2k-1)!! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $J_{2k+1} = (2k)!! J_1 = (2k)!!$, для любого натурального k .

Заметим, что значения J_n связаны с гамма-функцией соотношением:

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-p} (2p)^{\frac{n-1}{2}} dp = \sqrt{2^{n-1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Тогда, используя свойства гамма-функции, получим

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, J_1 = \Gamma(1) = 0! = 1 \text{ и}$$

$$J_{2k} = \frac{2^k}{\sqrt{2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{2}} \prod_{i=1}^k \left(i + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2k+1)!!,$$

$$J_{2k+1} = 2^k \Gamma(k+1) = 2^k k! = (2k)!!.$$

Следовательно, $J_k = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{k-1}{2} \right\}} (k-1)!!$ и

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \theta_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k}{(k-1)!!k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2, \text{ так как}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Таким образом, $f_2(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t) dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\frac{df_2}{d\xi} - \xi f_2 = -S_1(\xi)$, удовлетворяющее начальному условию $f_2(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$.

Заметим, что

$$J_k(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int_0^{\frac{\xi^2}{2}} e^{-x} (2x)^{\frac{k-1}{2}} dx = \sqrt{2^{k-1}} \Gamma_{\frac{\xi^2}{2}} \left(\frac{k+1}{2} \right), \quad \text{где}$$

$\Gamma_z(p) = \int_0^z e^{-t} t^{p-1} dt$ – неполная гамма-функция.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем

$$J_k(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = \int_0^{\xi} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^m m!} \right) t^k dt = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \xi^{2m+1+k}}{(2m)!!(2m+1+k)}$$

$$\int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} \theta_1(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k} \int_0^{\xi} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi)}{(k-1)!!k}$$

$$\text{Тогда } f_2(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}.$$

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$J_m(\xi) \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \xi^{2n+1+m}}{2^n n! (2n+1+m)} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \xi^{2n+1+m}}{2^k k! (2k+1+m) 2^{n-k} (n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} \right) \frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!}.$$

Следовательно, используя утверждение, для любого натурального m выполняется $J_m(\xi) \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} \right) \frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(m-1)!! \xi^{2n+1+m}}{(2n+1+m)!!}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f_2(\xi) &= e^{\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} J_k(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}. \end{aligned}$$

Производя преобразования повторного ряда, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k} = \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

Тогда

$$f_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n}}{(2n)!!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\frac{dG}{d\xi} = f_2(\xi)$, то, учитывая начальное условие $G(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$,

получаем, что $G(\xi) = S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$,

$$\begin{aligned} \text{где } S_2(\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1}\right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{2m}\right) \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)} \text{ или} \end{aligned}$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \left[\ln\left(2 - 2^{\left\{\frac{k-1}{2}\right\}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}} \right] \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k},$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная части числа t соответственно.

Так как, учитывая (4), $H(\xi) = -S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)$ – решение уравнения

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - \xi \frac{dH}{d\xi} = S_1(\xi_*), \quad \frac{dH}{d\xi} (+\infty) = 0, \quad H(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0, \text{ то}$$

$$\theta_2(\xi) = 2(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)), \quad (5)$$

Таким образом, соотношения (4), (5) – решение системы дифференциальных уравнений (3).

Примеры и выводы.

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\bar{V} = 239 \text{ км}^3/\text{год}$ (объем выборки $n = 113$), среднеквадратичное отклонение равно $46 \text{ км}^3/\text{год}$. Тогда $C_v = 0,19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен $0,42$, тогда $k = -\ln 0,42 \cong 0,9 \text{ год}^{-1}$, $\sigma = 0,257 \text{ год}^{-0,5}$,

$\sigma^2 = 0,066$ год⁻¹. Предположим, что в начальный момент времени $V = 377$ км³/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км³/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км³/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

Таблица – Решение системы (3)

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5 (85,6)	84,8 (86,1)	86,9 (86,2)	87,8 (86,2)	88,4 (86,2)	88,7 (86,2)
-2		8,3 (10,0)	10,4 (10,3)	11,3 (10,3)	11,9 (10,3)	12,2 (10,3)
-1			2,1 (2,4)	3,0 (2,6)	3,5 (2,6)	3,9 (2,6)
0				0,9 (0,9)	1,4 (1,0)	1,8 (1,1)

В соответствии с таблицей 1, полученной с использованием решения системы (3), $\theta_1 = 88,7$, а размерное время составляет $m_T = \frac{\theta_1}{k} = 88,7 : 0,9 \approx 99$ лет. Так как

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86,2 : 0,9 \approx 95,8, \quad \text{то} \quad \text{доверительный} \quad \text{интервал}$$

$(m_T - t \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}; m_T + t \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$ для оценки математического ожидания с надежностью

$$\gamma = 0,95 \quad (t = 1,96, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\gamma}{2}) \quad \text{определяется} \quad \text{неравенством}$$

$$81 < m < 117.$$

По известным значениям C_V и r можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Т. 29, № 1. – М., 2002. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2006. – № 5 – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – 2008. – № 5 – С. 83–87.

A.A. Volchek, L.P. Makhnist, V.S. Rubanov. About the Solution to the Set of Differential Equations, One of the Models of Several Years' Fluctuation of the River Flow

The article deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein-Uhlenbeck. The process under

consideration is the homogeneous in terms of time Markov process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moment of frequency distribution of the river flow. The parameters are the solution to the set of second-order differential equations with boundary condition received by applying Fokker-Planck equation and by Kolmogorov's backward equation for transition probability density. In contrast to the use of numeric integration of the set of differential equations our article gives the solution presented in power series. For this purpose we have studied the functions of a special type related to Euler integrals of the first and second genus and incomplete gamma function. We give an example with the use of proposed solution to the model of stochastic hydrology.