Т.А. Тузик, ст.преподаватель (БрПИ)

ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ВНУТРЕННОСТИ УГЛА

Пусть область $\mathcal{D}$ определена неравенствами $0 < x < \infty$, $0 < \varphi < \alpha$, $\alpha = const < 2\pi$. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в области $\mathcal{D}$, принадлежащую $\mathcal{L}_2$, удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi(x) + A(x)\,\Phi(x e^{i\alpha}) = B(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

где функция А (x) непрерывна на полуоси и А (x) $\neq$ 0 при $x \in [0, \infty]$; В (x) $\in \mathcal{L}_2 (0, \infty)$.

Приведем задачу Карлемана (1) к задаче Римана для плоскости с разрезом $\arg \zeta = 0$. Для этого используем конформное отображение $\zeta = z^{2\pi/\alpha}$ (Область Д переходит в плоскость ζ с разрезом $\arg \zeta = 0$) и введем новую неизвестную функцию

$$\omega(\zeta) = \frac{\Phi(\zeta^{\alpha/2\pi})}{\sqrt{\zeta^{1-\alpha/2\pi}}} \tag{2}$$

Функция $\omega(\zeta)$ аналитична на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с разрезом $\arg \zeta = 0$, так как этим свойством обладают ветви функций $\zeta^{\alpha/2\pi}$ и $\sqrt{\zeta^{1-\alpha/2\pi}}$. Обозначим через $\omega^+(\xi)$ предельное значение этой функции на верхнем берегу разреза, а через $\omega^-(\xi)$ – на нижнем берегу.

Выпишем формулы для предельных значений

$$\omega^+(\xi) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\xi^{1-\alpha/2\pi}}}, \quad \omega^-(\xi) = -\frac{\Phi(x e^{i\alpha})}{e^{-i\alpha/2}\sqrt{\xi^{1-\alpha/2\pi}}}, \quad \xi = x^{2\pi/\alpha} > 0. \tag{3}$$

Нетрудно доказать, что функции $\omega^{\pm}(\xi) \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$.

С помощью равенств (3) получаем задачу Римана для полуоси

$$\omega^+(\xi) = A(\xi^{\alpha/2\pi})\, e^{-i\alpha/2}\, \omega^-(\xi) + H(\xi), \quad \xi > 0, \tag{4}$$

где $H(\xi)$ – известная функция из $\mathcal{L}_2 (0, \infty)$.

Запишем формально задачу (4) как задачу Римана на всей оси

$$F^+(\xi) = a(\xi)\, F^-(\xi) + b(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \tag{5}$$

где

$$a(\xi)=\begin{cases} e^{-i\alpha/2}\,\lambda(\xi^{\ldots}), & \xi>0\\ e^{-i\alpha/2}\,\lambda(0), & \xi\le 0\end{cases},\quad b(\xi)=\begin{cases} \dfrac{B(\xi^{\ldots})}{\sqrt{\xi^{1-\ldots}}}, & \xi>0,\\ 0, & \xi<0.\end{cases}$$

$$\mathcal{F}^+(\xi)=\omega^+(\xi),\qquad \mathcal{F}^-(\xi)=\omega^-(\xi),\quad \xi>0,$$
$$\mathcal{F}^+(\xi)=\mathcal{F}^-(\xi),\qquad \xi<0.$$

Применим к задаче (5) известные формулы [I - 2] , выпишем ее решение, а с учетом соотношений (2) и (3) и решение исходной краевой задачи (1)

$$\Phi(z)=\sqrt{z^{2\pi/\alpha-1}}\cdot X(z^{2\pi/\alpha})\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\tau^{2\pi/\alpha-1}}}{X^+(\tau^{2\pi/\alpha})}\cdot\frac{B(\tau)\,d\tau}{\tau^{2\pi/\alpha}-z^{2\pi/\alpha}}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_{\varkappa-1}(z^{2\pi/\alpha})}{(z^{2\pi/\alpha}+i)^{\varkappa}}\right],\quad \text{если}\quad \varkappa=\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\lambda(\tau)\right\}\Big|_0^\infty>0, \tag{6}$$

где $P_{\varkappa-1}(\xi)$ – многочлен степени не выше $\varkappa-1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Если $\varkappa\le 0$, то $P_{\varkappa-1}\equiv 0$ и для разрешимости краевой задачи (I) необходимы и достаточны условия

$$\int_0^\infty\frac{B(s)}{X^+(s^{2\pi/\alpha})}\cdot\frac{\sqrt{s^{2\pi/\alpha-1}}}{(s^{2\pi/\alpha}+i)^k}\,ds=0,\quad k=1,2,\ldots,-\varkappa.$$

$$\ln X^+(\xi)=(\xi+i)\,P^+\left(\frac{1}{\xi+i}\ln\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^{\varkappa}a(\xi)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки.-М.:Наука,1978.-296 с.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.