Теорема. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta{}^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $S_p(A_\eta) \leq [0, M]$, $(0 < \eta < \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (2), (4), (5). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ в приближении (1) так, чтобы $(\delta + \eta)^{1/k}(\delta, \eta) \to 0$ при $n(\delta, \eta) \to \infty$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Тогда $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Список цитированных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест: Изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина. – 2008. – 196 с.

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

Гловацкая А.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Кожух И.Г., к.ф.-м.н., профессор

Основным объектом исследований в экологии является динамика или эволюция популяций. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. Эволюция популяции.

Составить дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию популяции при следующих предположениях: A – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а B – число особей, умирающих в единицу времени. Решить и проанализировать полученное решение.

Решение. Обозначим посредством $x(t)$ число особей в популяции в произвольный момент времени t. С достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения особей в популяции задается формулой:

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{1}$$

Случай 1. Линейная зависимость для скоростей рождения и умирания особей.

Простейшим случаем является ситуация, когда $A = ax$, $B = bx$. В этом случае уравнение (1) перепишется в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dx}{dt} = (a - b)x$. Разделяя переменные, находим $\frac{dx}{dt} = (a - b)dt$ и, интегрируя, получаем $\int \frac{dx}{dt} = (a - b)\int dt \to \ln|x| = (a - b)t + \ln|c| \to \ln\left|\frac{x}{c}\right| = (a - b)t \to x = ce^{(a-b)t}$.

Простейший анализ полученного выражения показывает, что если $a > b$, то при $t \to \infty$ число особей $x \to \infty$. При $a < b$, $x \to \infty$ при $t \to \infty$, и популяция становится вымирающей.

Случай 2. Нелинейная зависимость для скоростей изменения числа особей.

Более реальными случаями для описания эволюции популяций, по-видимому, будут являться модели, которые предполагают, что скорость изменения числа особей является нелинейной функцией. В таком случае скорость прибавления числа особей в популяции задается дифференциальным уравнением следующего вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция.

Пусть, например, $f(x) = ax - bx^2$, где $a > 0$, $b > 0$. В этом случае (2) преобразуем в так называемое дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2. \qquad (3)$$

В биологии это уравнение называется уравнением Ферхюльста-Перла. В уравнении учитывается так называемый «эффект самоотравления» популяции или, иначе говоря, внутривидовая борьба.

Причинами, снижающими рост популяции, могут являться конкурентная борьба за пищу, за место, распространение инфекции, из-за тесноты и т.д. Интегрируя уравнение (3), находим, что

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b}x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}, \qquad (4)$$

где $x_0 = x(t_0)$.

Из выражения (4) видно, что при $t \to \infty$ число особей в популяции имеет своим пределом $\frac{a}{b}$: $x(t) \to \frac{a}{b}$. При этом следует рассмотреть два случая: $\frac{a}{b} > x_0$ и $\frac{a}{b} < x_0$. Различие между ними хорошо видно из рис.1.

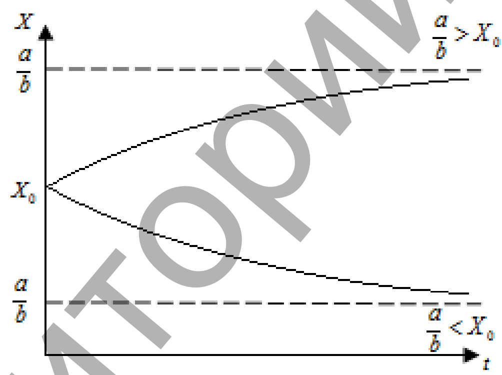

Рисунок 1

Рассмотренная модель описывает динамику популяции в ограниченной среде. Отметим, что уравнение (3) используется также и при моделировании социально-экономических процессов, например, распространение рекламы.

<u>Пример 2.</u> Динамика популяций, модель «хищник-жертва» Вольтерра-Лотка.

Получить систему дифференциальных уравнений, описывающих модель «хищник-жертва» Вольтерра-Лотка.

В динамике популяций часто исследуется взаимодействие хищников и их добычи (жертв) при всевозможных, достаточно общих предположениях.

В частности, рассмотрим модель взаимодействия хищников и добычи в предположении, что между особями одного вида (хищниками) нет соперничества. Пусть x_1 и x_2 – число жертв и хищников, соответственно.

Предположим, что в отсутствии хищников $(x_2 = 0)$ относительный прирост жертв происходит с постоянной скоростью, например, $a(a > 0)$. Наряду с этим жертвы несут потери, пропорциональные количеству хищников $x_2(x_2 > 0)$ с коэффициентом пропорциональности $-b(b > 0)$.

В свою очередь рост популяции хищников зависит от количества пищи (жертв) x_1 и при отсутствии пищи ($x_1 = 0$) относительная скорость изменения (убывания) популяции хищников равна $-c(c > 0)$. При наличии пищи в количестве $x_1(x_1 > 0)$ скорость убывания хищников компенсируется пропорционально количеству жертв с коэффициентом пропорциональности $d(d > 0)$.

Решение. Используя лишь механический смысл производной как скорости изменения переменной и условия задачи, имеем для относительной скорости (прироста) жертв x_1 в отсутствии хищников $\frac{x_1'}{x_1} = a$ и $\frac{x_1'}{x_1} = a - bx_2$ в их присутствии. Аналогично для хищников имеем для относительной скорости их прироста, а фактически убывания $\frac{x_2'}{x_2} = -c$ в отсутствии пищи и $\frac{x_2'}{x_2} = -c + dx_1$ при наличии компенсации. Отметим, что штрих при переменной обозначает ее первую производную по времени. Объединяя оба равенства, имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, т.е. второго порядка, соответствующую модели Вольтерра-Лотка

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (a - bx_2)x_1 \\ x_2' &= (-c + dx_1)x_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Записывая в стандартной форме Коши, имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что полученная система уравнений имеет многочисленные другие приложения, среди которых:

- поведение конкурирующих фирм,
- рост народонаселения,
- численность воюющих армий,
- изменение экологической обстановки,
- развитие науки и др.

Список цитированных источников

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.

УДК 372.85(035.3)

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ (ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ)

Гринько Е.П., Головач А.Г.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Одним из ярких представителей класса диофантовых уравнений второй степени является уравнение Пелля (его еще называют неопределённым уравнением Ферма), то есть уравнение: $x^2 - ay^2 = 1$, где a – целое положительное число, не являющееся