В свою очередь рост популяции хищников зависит от количества пищи (жертв) x_1 и при отсутствии пищи (x_1 = 0) относительная скорость изменения (убывания) популяции хищников равна $-c(c>0)$. При наличии пищи в количестве $x_1(x_1>0)$ скорость убывания хищников компенсируется пропорционально количеству жертв с коэффициентом пропорциональности $d(d>0)$.

Решение. Используя лишь механический смысл производной как скорости изменения переменной и условия задачи, имеем для относительной скорости (прироста) жертв x_1 в отсутствии хищников $\frac{x_1'}{x_1}=a$ и $\frac{x_1'}{x_1}=a-bx_2$ в их присутствии. Аналогично для хищников имеем для относительной скорости их прироста, а фактически убывания $\frac{x_2'}{x_2}=-c$ в отсутствии пищи и $\frac{x_2'}{x_2}=-c+dx_1$ при наличии компенсации. Отметим, что штрих при переменной обозначает ее первую производную по времени. Объединяя оба равенства, имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, т.е. второго порядка, соответствующую модели Вольтерра-Лотка

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= (a-bx_2)x_1 \\ x_2' &= (-c+dx_1)x_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Записывая в стандартной форме Коши, имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что полученная система уравнений имеет многочисленные другие приложения, среди которых:

- поведение конкурирующих фирм,
- рост народонаселения,
- численность воюющих армий,
- изменение экологической обстановки,
- развитие науки и др.

Список цитированных источников

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.

УДК 372.85(035.3)

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ (ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ)

Гринько Е.П., Головач А.Г.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Одним из ярких представителей класса диофантовых уравнений второй степени является уравнение Пелля (его еще называют неопределённым уравнением Ферма), то есть уравнение: $x^2-ay^2=1$, где a – целое положительное число, не являющееся полным квадратом. Каждое уравнение Пелля имеет решение (±1;0), которое называется тривиальным. Все остальные решения называются нетривиальными. Наименьшим нетривиальным решением уравнения Пелля называется такое решение, при котором двучлен $x + \sqrt{a}y$ принимает наименьшее значение из всех возможных.

Решений уравнения Пелля бесконечно много. Доказывается это с помощью бинома Ньютона следующим образом. Двучлен $x_0 + \sqrt{a}y_0$, где x_0, y_0 – наименьшее нетривиальное решение, возводится в *n*-ю степень и раскладывается по биному Ньютона. Если привести подобные слагаемые, то получается выражение вида $x_n + \sqrt{a}y_n$, где x_n, y_n – целые числа. Далее надо провести аналогичные операции для сопряжённого двучлена. В результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases}(x_0 + \sqrt{a}y_0)^n = x_n + \sqrt{a}y_n,\\ (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n = x_n - \sqrt{a}y_n.\end{cases} \quad (1)$$

Далее следует перемножить эти равенства и «свернуть» по формуле разности квадратов. Так как число n может принимать бесконечное множество значений, то решений уравнения Пелля тоже бесконечное множество. Существует несколько методов нахождения «всех» решений уравнения Пелля. Первый метод основан на формулах (1). Доказывается, что все решения получаются в результате возведения в *n*-ю степень двучлена $x_0 + \sqrt{a}y_0$. Второй метод основан на операции "гиперболический поворот", переводящей одну целочисленную точку на графике в следующую, и основан на формулах:

$$\begin{cases}x_n = x_0x_{n-1} + ay_0y_{n-1},\\ y_n = x_0y_{n-1} + y_0x_{n-1}.\end{cases} \quad (2)$$

Суть индийского метода состоит в следующем: сначала берут два целых числа, подставляют в правую часть уравнения Пелля и находят результат. Выбирают такие числа, чтобы правая часть была близка к единице. Далее получившееся уравнение умножается на уравнение Пелля. Скобки раскрывают, выделяют полные квадраты и подбирают новые числа, удовлетворяющие неравенству. Далее сокращают обе части равенства на НОД и опять умножают на уравнение Пелля и так далее, пока в правой части не получится единица.

Английский метод: алгоритм, основанный на цепных дробях, выполняется следующим образом: $\sqrt{a}$ раскладывается в цепную дробь, которая будет периодична со второго полного частного. Далее находится период *k* и вычисляется выражение *kn*, где *n* – такое наименьшее натуральное число, что *kn* чётно. Далее находится подходящая дробь с таким индексом, числитель и знаменатель которой и будут наименьшим решением.

Пример 1. Решить уравнение Пелля: $x^2 - 8y^2 = 1$

Решение. 1) найдём наименьшее (x_0, y_0), так как $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = [2; 1,4,1,4, \dots]$;

2) S = 2; 3) $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$, следовательно, $x_0 = 3, y_0 = 1.$ Остальные решения найдём по формулам:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n + \left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right],$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n - \left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right]. \quad (3)$$

В 1842 г. бельгийский математик Эжен Шарль Каталан сформулировал утверждение: уравнение $x^a - y^b = 1$, где x, y, a, b >1 имеет единственное решение в натуральных числах: x = 3, y = 2, a = 2, b = 3 (гипотеза Каталана). Гипотеза Каталана говорит о том, что разность между двумя числами, возведёнными в степень, не может быть равной 1, за исключением $3^2 - 2^3$. Это утверждение было доказано в 2002 г. румынским математиком Преда Михайлеску. Доказательство использует методы из теории круговых полей.

Для решения уравнения $x^a - y^b = 1$, где x, y, a, b >1, можно рассмотреть случаи: 1) x – чётное число, y – нечётное число; 2) x – нечётное число, y — чётное число. Каждый из вариантов распадается еще на два случая: 1) x > y, a < b;2) x < y, a> b. Кроме этого, требуется перебрать комбинации a, b – чётные (нечётные) числа. Всего 16 вариантов перебора.

Уравнение $x^n+y^n=z^n$ не может быть решено в целых ненулевых числах относительно *x*, *y* и *z* при натуральных значениях показателя *n*, больших 2; (Великая теорема Ферма). При *n* = 2 данное уравнение имеет решение, к примеру, 3, 4, 5. Эйлер доказал неразрешимость указанного уравнения при *n* = 4 (1738 г.) и при *n* = 3 (1770 г.), Г. Ламе – при *n* = 7 (1839 г.). В 1995 году Эндрю Уайлс, используя достижения современных ученых, сумел завершить доказательство великой теоремы Ферма.

С решением диофантовых уравнений связана одна из знаменитых проблем Давида Гильберта, сформулированных на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1990 году: пусть дано произвольное диофантово уравнение; требуется указать общий метод, следуя которому, можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли оно решение в целых числах. В 1970 году ленинградский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что такого общего метода не существует.

УДК 519.1

О СЛОЖНОСТИ ТЬЮРИНГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ

Даудов Д.Д.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Будько А.Е., к. ф.-м. н., доцент

В [1] была рассмотрена классификация машин Тьюринга по степени сложности их программ, заданных ориентированными графами. Там же было начато исследование сложности вычислений на машинах Тьюринга в зависимости от сложности их программ. В [2] это исследование было продолжено. В данных работах рассматриваются машины Тьюринга с внешним алфавитом $\{0,1\}$ и программы машин задаются ориентированными графами, вершины которых соответствуют внутренним состояниям, а дуги определяют команды. Будем считать, что в каждый момент времени лента имеет конечную длину, и к ней могут пристраиваться пустые ячейки. Длину ленты, имеющуюся в начальный момент, обозначим через n. Вершины соответствующие, начальным и конечным состояниям, называются соответственно начальной и конечной.

Поскольку программа задается графом, то сложность программы будет определяться сложностью соответствующего графа. Путь, начало и конец которого совпадают, называется циклом. Цикл называется элементарным, если все его вершины, за исключением начальной и конечной, различны. Кустом называется неконечная вершина вместе с выходящими из нее двумя дугами. Цикл называется *m*-циклом, если в нем можно выделить ровно *m* различных элементарных циклов. Машина называется *m*-цикловой, если в ее графе имеются *m*-циклы, возможно *c*-циклы и нет *d*-циклов, где $c < m$, $d > m$. Граф может содержать кусты, дуги которых не входят ни в какой цикл. Класс *m*-цикловых машин обозначается через L_m. Таким образом, сложность структуры программы характеризует *m*-цикловость: чем больше *m*, тем сложнее структура программы.