

ратурных полей в получаемой пленке. Главной сложностью является то, что данная задача теплопроводности неразрешима классическими методами. Разработана методика и алгоритм численного решения данной задачи. При постановке математической модели процесса напыления рассматривается система уравнений нестационарной теплопроводности с учетом граничных условий. Решение проводится методом тепловых потенциалов. С помощью данного метода краевая задача теплопроводности сводится к системе уравнений Вольтера второго рода, которая решается численно с использованием ЭВМ. Распределение температуры учитывается в дальнейшем при расчете остаточных напряжений в покрытиях, которые, как известно, оказывают значительное влияние практически на все эксплуатационные характеристики напыленных деталей и могут быть причиной появления трещин и отслоений. С помощью метода граничных элементов ведется разработка программы для расчета температурных полей и остаточных напряжений в покрытиях на деталях различных размеров и формы.

### Выводы

1. Для повышения эффективности преобразования энергии и использования плазменных потоков и струй исследованы электрические и тепловые характеристики электрических дуг в продольном потоке различных газов. Разработана методика расчета генераторов плазменных струй – плазмотронов постоянного тока.
2. Созданы плазмотрон постоянного тока и установка для получения АПП для научных исследований и решения различных инженерных задач.

### Литература

1. Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. "Прикладная динамика термической плазмы" / «Наука» СО АН. Новосибирск. 1975. - 299 с.
2. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены и структуры углерода. // УФН, № 9. - 1995. - С. 977-1009.
3. Богданов А.А., Дайнингер Д., Дюжев Г.А. Перспективы развития промышленных методов производства фуллеренов. // ЖТФ, 2000. Т. 70, вып. 5.
4. Курочкин Ю.В., Пустогаров А.В. Исследования плазмотронов с подачей рабочего тела через пористую межэлектродную вставку / Экспериментальные исследования плазмотронов. Под ред. М.Ф. Жукова. - Новосибирск, 1977. - С. 82-104.

УДК 539.3

## МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСЧЕТАХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПЛАЗМЕННОМ УПРОЧНЕНИИ

*Веремейчик А.И.*

*Брестский государственный технический университет, г. Брест*

В любом процессе термообработки конструктивных элементов машин и механизмов (закалке, поверхностном плазменном напылении и т.д.) важнейшим фактором является исследование распространения полей температур и термонапряжений [1, 2].

Температурное поле является одной из основных физических характеристик поверхностного упрочнения высококонцентрированными источниками нагрева. Зная изменение температуры тела в зависимости от времени, ее установившиеся значения в определенной точке, можно судить (в зависимости от условий обработки, физических свойств тел, окружающей среды) о том, какие процессы термообработки могут быть реализова-

ны. Определение температурных полей и термонапряжений в теле детали при нагреве и охлаждении позволяет прогнозировать состав вещества после термообработки, его фазовое и структурное состояние. По значению температуры и напряжения в любой точке тела, можно создать конструктивные элементы с низкой материалоемкостью при достаточной их прочности и надежности. Кроме того, зная распределение температуры по глубине образца в различные моменты времени при его нагреве и последующем охлаждении за счет быстрого отвода тепла, можно прогнозировать изменение структурных характеристик сталей в рассматриваемой точке.

Для вычисления температурных полей и термонапряжений необходимо решить задачи теплопроводности и термоупругости при соответствующих краевых условиях. Для решения этих уравнений задаются параметры процесса упрочнения: скорость перемещения источника –  $V$ , плотность теплового потока –  $q$  и размеры анодного пятна, а также граничные и начальные условия задач теплопроводности и термоупругости.

Решение задачи термоупругости проводится в 2 этапа. На первом этапе решается задача теплопроводности по определению температурных полей. Для реализации задачи теплопроводности в случае движущегося источника нагрева нами был предложен следующий подход.

При плазменной обработке поверхности тепловая нагрузка на обрабатываемую деталь передается ограниченной площадке. Если струя ориентирована перпендикулярно поверхности, то на ней образуется участок оплавленного материала, размеры которого можно измерить. Поскольку при этом получение оплавленной зоны не является целью данного процесса, а плазматрон непрерывно перемещается вдоль детали с заданной скоростью, то можно в первом приближении считать, что в пятне нагружения на поверхности достигается температура, равная температуре плавления материала и дальнейшего разогрева этого уже жидкого металла не происходит. В этом случае фазовые превращения можно считать отсутствующими и для определения температурного поля обрабатываемой детали можно применить классические уравнения теплопроводности твердого тела с граничными условиями первого рода [7]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $T = T(t, x, y, z)$  – искомая температура,  $a$  – коэффициент температуропроводности материала,  $x, y, z$  – координаты расчетной точки тела.

В качестве математического аппарата для решения поставленной задачи в данной работе используется метод граничных элементов (или граничных интегральных уравнений), имеющий ряд преимуществ по сравнению с другими широко распространенными в инженерных расчетах численными методами (конечных элементов, конечных разностей):

- 1) снижается размерность полученных интегральных уравнений;
- 2) исключается необходимость дискретизации внутренней части области;
- 3) уменьшается количество узлов (размерность матрицы системы линейных алгебраических уравнений);
- 4) повышается точность расчетов, что подтверждено многочисленными результатами;
- 5) понижаются требования к ресурсам компьютера.

Для решения задачи теплопроводности используется метод тепловых потенциалов [5]. Решение ищется в виде потенциалов простого (2) или двойного слоя (3), которые вне точек поверхности, по которой проводится интегрирование, являются решениями уравнения теплопроводности:

$$V(x, t) = \int_0^t a d\tau \left[ \int T(x, t, y, \tau) v(y, \tau) \right] dl, \quad (2)$$

$$W(x, t) = \int_0^t ad\tau \left[ \int_L \frac{\partial T}{\partial n} \mu(y, \tau) \right] dl. \quad (3)$$

Выражение (3) используется в случае рассмотрения задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода, выражение (2) – в случае решения краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода.

При задании на поверхности тела граничных условий первого рода  $F = F(y, t)$ , что соответствует рассматриваемой задаче, получено интегральное уравнение для определения плотности теплового потока двойного слоя  $\mu(y, \tau)$ :

$$-\frac{1}{2} \mu(x, t) + \frac{4a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{2a(t-\tau)}} \int_L K(y, x, t-\tau) \mu(y, \tau) dl = F(y, t). \quad (4)$$

Ядро  $K(y, x, t-\tau) = e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} [cl_0(B) - bl_0(B)]$  интегрального уравнения представляет собой произведение показательной функции на функцию Бесселя первого рода.

Уравнение (4) является линейным интегральным уравнением второго рода. Оно носит Фредгольмов характер по переменной  $L$  и имеет признак уравнения Вольтерра по переменной  $t$ . В результате решения этого уравнения будет найдена плотность  $\mu$  потенциала двойного слоя, что даст возможность найти распределение температуры в любой точке рассматриваемой области  $L$  в данный момент времени путем подстановки данной плотности в выражение (3) потенциала двойного слоя. Необходимо отметить также, что ядро уравнения (4) имеет сингулярную особенность в точке  $x = y, t = \tau$ .

Из приведенных формул видно, что ядра интегральных уравнений имеют весьма сложный характер. Наличие двойных интегралов также значительно усложняет решение задачи. Поэтому применяется численное решение с использованием современных достижений ЭВМ. Область интегрирования разбивается по времени  $t$  на  $n$  не обязательно равных между собой частей. Принимается также условие, что на каждом интервале  $(t_{j-1}, t_j)$  неизвестная плотность  $\mu(y, \tau)$  является постоянной, т.е. можно считать, что  $\mu(y, \tau)$  является кусочно-непрерывной функцией. С учетом сказанного, проводя разложение функций Бесселя и необходимые преобразования, можно получить следующее интегральное уравнение:

$$-\eta \mu(x, t) - \frac{1}{\pi} \int_L C_n \mu(P, \bar{\tau}_n) dl = f, \quad (5)$$

где  $f = F(P, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \sum_{j=1}^{n-1} \mu(P, \bar{\tau}_j) C_j \left] dl, C_j = \{ [FM(x) + f_1 Q_1(x)] - [FF(x) - f_2 Q_2(x)] \} A_0 r$ .

Для численной реализации нестационарной задачи теплопроводности на ЭВМ необходимо неоднократно решить интегральное уравнение (5), т.к. с течением времени правая часть уравнения (5) будет меняться. Ось времени разбивается на  $n$  шагов, поэтому решение уравнения (5) осуществляется  $n$  раз. Точность будет зависеть от частоты данного разбиения, которая в свою очередь зависит от времени исследуемого процесса нагревания (охлаждения). Приближенное решение уравнения и вычисление температур и фиктивных массовых сил основывается на замене интегралов конечными суммами. В результате такой замены вместо уравнения (5) получаем систему линейных алгебраических уравнений. Контур интегрирования  $L$  представляется в виде ломаной линии, состоящей из большого числа  $N$  прямолинейных отрезков  $\Delta L_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Функции  $C_n$  зависят от координат точек  $x$  и  $y$  и времени  $\tau$ . При интегрировании точка  $x$  пробегает весь контур  $L$ , переходя через точку  $y$ , а время  $\tau$  пробегает отрезок  $t_{n-1} \leq \tau \leq t_n = t$ . В том случае, когда  $x$  проходит через  $y$  и  $\tau \rightarrow t_n = t$ , функции  $C_n$  имеют сингулярную особенность сложного типа [5], что требует применения к интегралам от указанных функций формул механических квадратур с учетом этой особенности.

Для решения поставленной задачи интеграл в (5) заменяется конечной суммой. Интеграл по длине отрезка представляется как произведение  $C_n^0 \mu_n^0 \Delta t_n^0$ , где  $C_n^0 = \frac{1}{\Delta t_n^0} \int_{\Delta t_n^0} C_n dt$  -

среднее значение интеграла по длине  $\Delta t_n^0$ . Разбивая длину участка на 10 равных частей, определяется значение  $C_n^0$  в центре каждого из участков и по формуле прямоугольников

$C_n^0 = 0,1 \sum_{j=1}^{10} (C_n)_j$ . После решения системы алгебраических уравнений порядка  $N$  полу-

чаем дискретный ряд значений искомой функции  $\mu$  в точках контура  $L$  в момент  $\bar{\tau}_j$  ( $t_{j-1} \leq \bar{\tau}_j \leq t_j$ ). Для решения задачи в момент  $\bar{\tau}_{j+1}$  ( $t_j \leq \bar{\tau}_{j+1} \leq t_{j+1}$ ) необходимо вычислить новое значение функции  $f$  в (5). Получаем новый дискретный ряд значений функции  $\mu$  для данного момента времени, и процесс повторяется. Имея значения  $\mu$  для  $N$  точек контура  $L$ , можно определить температуру или составляющие ее градиента в любой внутренней точке области, заменяя интегралы конечными суммами.

После определения температурного поля на втором этапе определяется соответствующее ему напряженно-деформированное состояние. Необходимо найти решение дифференциальных уравнений равновесия [4]:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } u_i = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \text{grad}(T - T_0), \quad (6)$$

при соответствующих граничных условиях.

С помощью метода граничных интегральных уравнений дифференциальные уравнения в частных производных заменяются интегральными уравнениями типа Фредгольма 2-го рода, которые удобны для численной реализации. Краевая задача в виде (6) сводится к задаче изотермической теории упругости.

Решение (6) разыскивается в виде, предложенном Гудьером:

$$u_i = u_i^0 + u_i^T, \quad (7)$$

где  $u_i^0$  - решение однородного дифференциального уравнения, а  $u_i^T$  - частное решение уравнения (6), которое разыскивается в виде градиента некоторой бигармонической функции

$$u_i^T = \text{grad } W \quad (8)$$

Функция  $W$  удовлетворяет уравнению (6) в виде:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (T - T_0). \quad (9)$$

Для определения напряжений можно использовать формулу:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T, \quad (10)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  соответствует  $u_{ij}^0$ ,  $\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right)$  - температурные добавки напряжений.

Окончательно выражения для температурных добавок перемещений и напряжений можно представить в виде:

$$u_i^T(x) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} r \beta_i (2 \ln r - 1) - T(y) [2\beta_i \cos \varphi + n_i(y) (2 \ln r - 1)] \right\} dl_y, \quad (11)$$

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E\alpha}{4\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} [\delta_{ij} (1 + 2 \ln r) - 2\beta_i \beta_j] + T(y) \frac{1}{r} [n_i(y) \beta_j + n_j(y) \beta_i - 2\beta_i \beta_j \cos \varphi - \delta_{ij} \cos \varphi] \right\} dl_y. \quad (12)$$

Система сингулярных интегральных уравнений относительно плотности  $\nu_i(y)$  имеет вид:

$$\mu_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \oint_L \left\{ \mu_i(y) \cos \psi [(1-2\nu) + 2\beta_i^2] + \mu_i(y) \left\{ (1-2\nu) [n_i(x) \beta_j - n_j(x) \beta_i] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi \right\} \right\} \frac{dl_y}{r(x,y)} = P_{np}, \quad (13)$$

где  $P_{np} = P_i^0 + P_i^T$  - приведенная нагрузка; равна сумме температурной поверхностной нагрузки и механической нагрузки.

Решение полученных интегральных уравнений проводится численным методом. Численная реализация интегральных уравнений термоупругости также построена на базе метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса.

В результате замены интегралов в (13) конечными суммами получается алгебраическая система уравнений:

$$X + QY = p, \quad (14)$$

где  $X$  и  $Y$  - столбцы неизвестных плотностей,  $p$  - столбец свободных членов.

По найденным значениям плотностей могут быть определены все компоненты тензора напряжений и деформаций в произвольной точке рассматриваемой области.

Порядок решения задачи следующий. Основными исходными данными задачи по расчету напряжений при плазменном упрочнении, помимо уравнений (1) и (6) с соответствующими начальными и граничными условиями, являются: количество точек разбиения границы области, количество шагов по времени, коэффициенты линейного теплового расширения  $\alpha$ , температуропроводности, Пуассона, размеры массивов плотностей, координаты точек границы области. На 1-м этапе решается уравнение (5), в результате решения которого находится распределение температуры в любой точке упрочняемого тела в требуемый момент времени. Далее определяются температурные добавки перемещений  $u_i^T$ , напряжений  $\sigma_{ij}^T$  и фиктивная температурная нагрузка  $P_i^T$ . На 2-м этапе решается система (13) относительно плотности потенциала  $\mu$ , после чего определяют перемещения и напряжения по формулам (7) и (10) соответственно.

Разработанный алгоритм реализован на ПЭВМ. Достоверность формул и точность алгоритма подтверждена решением тестовых задач. Результаты сравнивались с решением данной задачи с помощью интегрального преобразования Лапласа [6; 7] и методом Фурье, а также с результатами, полученными с использованием конечно-элементного пакета ANSYS. По результатам расчетов построены графики распределения температуры в поверхностном слое упрочняемой детали (рис. 1).

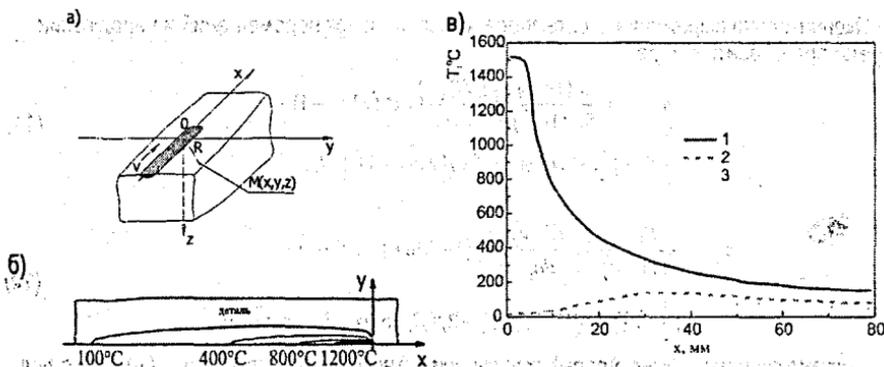


Рис.1. Распределение температуры в поверхностном слое металла; а) схема движения теплового источника, б) изотермы на поверхности образца, в) расчетные значения температуры по глубине образца. 1 - глубина 0 мм; 2 - глубина 1,0 мм; 3 - глубина 1,5 мм

Точность численного решения высока для внутренних точек и удовлетворительна для точек, примыкающих к границе области. Получены зависимости изменения теплового поля и напряжений как функции времени и координат.

Основными преимуществами применяемого метода по сравнению с другими существующими является необходимость дискретизации только границы области, при этом сохраняется высокая точность решения при уменьшении затрат машинного времени. Кроме того, учитываются условия закрепления закаливаемой детали и их влияние на процесс упрочнения.

#### Литература

1. Кундас С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей: монография – Мн.: Бестпринт, 2005. – 313с.
2. Спиридонов Н.В. и др. Плазменные и лазерные методы упрочнения деталей машин. – Мн.: Высшая школа, 1988. – 155с.
3. Карслоу Б., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 404 с.
5. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. - М.: Высшая школа, 1964. - 559 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967 г. - 599 с.
7. Веремейчик А.И. Применение интегрального преобразования Лапласа к исследованию нестационарных тепловых процессов // "Вестник БГТУ.- Математика, физика, химия", №5, 2000. – с.49-50.

УДК 620.22

## AN OVERVIEW OF THE SURFACE ENGINEERING METHODS USAGE FOR SURGICAL IMPLANTS PRODUCTION

Gradzka-Dahlke M.

Белостокская политехника, г. Белосток, Польша

### Introduction

Scientific description of different materials and technologies for medical purposes has been a subject of research and studies of different scientific fields, for instance material engineering, mechanics, technology or physics. Some groups of biomaterials were developed as result of many decades of research: polymer materials (UHMW PE, PEEK), ceramic materials ( $Al_2O_3$ ,  $ZrO_2$ ) and metallic al-