УДК 517.925

УСЛОВИЯ АЛГЕБРОИДНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ДОМИНИРУЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

Завадский А.Ф.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Климашевская И.Н., к. ф.-м. н., доцент

Одной из основных задач аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений является задача нахождения классов дифференциальных уравнений и систем, решения которых имеют лишь простейшие подвижные особенности – алгебраические. Для уравнений первого порядка эта задача была решена Пенлеве. Он доказал [1], что уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не имеют решений с подвижными трансцендентными и существенно особыми точками. Для уравнений высшего порядка или систем дифференциальных уравнений аналогичное утверждение места не имеет.

В работе рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{p(z)x^{p_1}y^{p_2} + P_1(x,y,z)}{r(z)x^{r_1}y^{r_2} + R_1(x,y,z)} = \frac{P(x,y,z)}{R(x,y,z)}, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{q(z)x^{q_1}y^{q_2} + Q_1(x,y,z)}{s(z)x^{s_1}y^{s_2} + S_1(x,y,z)} = \frac{Q(x,y,z)}{S(x,y,z)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z – комплексные переменные, а P, R, Q и S – многочлены относительно x и y, коэффициенты которых – аналитические функции относительно z. Область аналитичности этих коэффициентов обозначим D. p_1 и p_2, r_1 и r_2, q_1 и q_2, s_1 и s_2 – степени многочленов P, R, Q и S по x и y, причем члены со старшей степенью многочленов одновременно по x и y не содержатся в P_1, R_1, Q_1 и S_1 соответственно.

Ставится задача: найти условия, при выполнении которых система (1) не имеет решений

$$(x(z), y(z)), \tag{2}$$

обладающих свойством

$$x(z) \to \infty, y(z) \to \infty \text{ при } z \to z_0 \in D, \tag{3}$$

для которых точка z_0 являлась бы подвижной трансцендентной точкой.

С помощью замены $x = \frac{1}{u}$ и $y = \frac{1}{v}$ система (1) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{p(z) + P_2(u,v,z)}{r(z) + R_2(u,v,z)} \cdot u^{r_1 - p_1 + 2} v^{r_2 - p_2}, \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{q(z) + Q_2(u,v,z)}{s(z) + S_2(u,v,z)} \cdot u^{s_1 - q_1} v^{s_2 - q_2 + 2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для изучения условий существования решений со свойством (3) у системы (1) и условий алгеброидности особых точек этих решений применяется метод, основанный на голоморфности правых частей системы (4) и систем, производных от нее [2]. Доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \le 2,\ p_2 \le r_2,\ q_1 \le s_1,\ q_2 - s_2 \le 2 \tag{5}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство

$$p(z_0)r(z_0)q(z_0)s(z_0) \ne 0, \tag{6}$$

система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{-m+i},\ y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{-n+i},$$

($\alpha_0 \beta_0 \ne 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Теорема 2. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \ge \max\{2, q_1 - s_1 + 2\},\ p_2 \ge r_2,\ q_2 - s_2 \le p_2 - r_2 + 2 \tag{7}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство (6), система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{i-1}{n}},\ y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{i-m}{n}},$$

($\alpha_0 \beta_0 \ne 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, как правило, критическим, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Теорема 3. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \le q_1 - s_1 + 2,\ q_1 \ge s_1,\ q_2 - s_2 \ge \max\{2, p_2 - r_2 + 2\} \tag{8}$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство (6), система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{i-m}{n}},\ y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{i-1}{n}},$$

($\alpha_0 \beta_0 \ne 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, как правило, критическим, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \to z_0$ хотя бы по некоторому пути L.

Точки $z_0 \in D$, в которых $p(z_0)r(z_0)q(z_0)s(z_0) \ne 0$, отнесем к неподвижным точкам системы (1).

Таким образом, каждое из условий (5), (7) и (8) выделяет классы систем вида (1), не имеющих решений (2) со свойством (3), для которых точка z_0 являлась бы подвижной трансцендентной точкой.

Список цитированных источников

1. Матвеев, Н.М. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – СПб.: СПбГУ, 1995. – 314 с.

2. Кондратеня, С.Г. Дифференциальные уравнения / С.Г. Кондратеня. – 1976. – вып.12, №4.