Список цитированных источников

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270-1281.
2. Monakhov, V.S. Finite groups with ***P***-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina. // Ricerche di Matematica. – 2013. – Springer, DOI 10.1007/s11587-013-0153-9.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

УДК 517.948.32

АБАГУЛЬНЕНАЕ ГІПЕРГЕАМЕТРЫЧНАЕ РАЎНАННЕ Ў АЛГЕБРЫ МАТРЫЧНЫХ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ

Навічкова Д.А.
Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт, г. Мінск
Навуковы кіраўнік: Васільеў І.Л., к.ф.-м.н., дацэнт

Шмат работ прысвечана вывучэнню гіпергеаметрычнай функцыі Гаўса ${}_2F_1[a,b;c;z]$ і адпаведнага ёй гіпергеаметрычнага раўнання, напрыклад [1], а таксама іх абагульненням: абагульненай гіпергеаметрычнай функцыі ${}_pF_q\left[a_1,\dots,a_p;c_1,\dots c_q;z\right]$ і абагульненаму гіпергеаметрычнаму раўнанню [2].

Мэтай дадзенай работы з'яўляецца развязаць дыскрэтны матрычны аналаг абагульненага гіпергеаметрычнага раўнання.

Няхай K – алгебра гіперпаслядоўнасцей [3] над $\mathbf{C}$ выгляду

$$x=\sum_{k=-r}^{\infty}x_kh^k=\left\{\dots,0,\dots,0,x_{-r},\dots,\underline{x_0},x_1,\dots\right\},$$

дзе $x_k\in\mathbf{C}$, r – любы натуральны лік, $h^k=\left\{\dots,0,\dots,0,\underset{k-e\text{ месца}}{1},0,\dots,0,\dots\right\}$, з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Фур'е. Ейнае падмноства K_0 элементаў выгляду $x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_kh^k$ утварае алгебру паслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Ляпляса [3]. Пазначым праз s адваротны да h элемент.

$K^{m\times m}$ – алгебра $(m\times m)$-матрыц з элементамі з K, $K_0^{m\times m}$ – алгебра $(m\times m)$-матрыц з элементамі з K_0. Матрыцы з $K^{m\times m}$ уяўляюцца ў выглядзе фармальнага ступеневага шэрагу $A=\sum\limits_{k=-r}^{\infty}A_kh^k$, $A_k\in\mathbf{C}^{m\times m}$. Заўважым, што тут маецца на ўвазе зручны спосаб запісу і пытанне збежнасці не паўстае. У дадзенай рабоце паўсюль будзе мецца на ўвазе, што матрыцы камутуюць паміж сабой.

Паслядоўнасць $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ назавем пашыранай гіперпаслядоўнасцю.

Пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей праз $\tilde{K}$. У адрозненне ад гіперпаслядоўнасцей, пашыраныя гіперпаслядоўнасці могуць мець бясконцую колькасць ненулявых элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі. Відавочна, мае месца ўлучэнне $K\subset\tilde{K}$.

Праз $K_-=\left\{\left\{\dots,x_n,\dots,x_{-1},\underline{x_0},\dots,x_m,0,\dots,0\right\}\middle|\ x_n\in\mathbf{C},\forall n=\overline{-\infty,m};\ m\in\mathbf{N}_0\right\}$ пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей з канечнай колькасцю ненулявых элементаў на месцах з дадатнымі нумарамі, якое ўяўляе сабой "люстэркавы адбітак" алгебры K.

Назавем мноства K_- люстэркавымі гіперпаслядоўнасцямі. Па аналогіі з азначанымі вышэй алгебрамі $K^{m\times m}$ і $K_0^{m\times m}$ азначым іх люстэркавыя адбіткі $K_-^{m\times m}$ і $K_{-0}^{m\times m}$, якія складаюцца з матрыц, элементамі якіх з'яўляюцца люстэркавыя гіперпаслядоўнасці і люстэркавыя паслядоўнасці адпаведна.

Разгледзім дыскрэтнае матрычнае раўнанне

$$X_n\prod_{t=1}^{p}\left(nE+A_t\right)-(n+1)X_{n+1}\prod_{t=1}^{q}\left(nE+C_t\right)=\mathrm{O}, \qquad (1)$$

дзе $X=\left\{X_n\right\}_{n=0}^{\infty}=\left\{X_0,\dots,X_n,\dots\right\}$ – невядомая матрычная паслядоўнасць з $K_0^{m\times m}$; $A_k, C_j\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$. Паўсюль будзем разглядаць толькі выпадак $p=q+1$.

У $K^{m\times m}$ увядзем алгебраічнае дыферэнцаванне падобна таму, як гэта зроблена для паслядоўнасцей у [1], $DX=D\sum\limits_{n=-r}^{\infty}X_nh^n=\sum\limits_{n=-r}^{\infty}nX_nh^n=\left\{nX_n\right\}_{n=-r}^{\infty}*s$, дзе r свой для кожнай паслядоўнасці. Аналагічным чынам уводзіцца азначэнне алгебраічнай вытворнай і для $K_-^{m\times m}$. Тады пераўтворым дыскрэтнае раўнанне (1) да раўнання ў алгебры ў аператарным выглядзе

$$\left\langle\prod_{t=1}^{p}\left(hD+A_t\right)-s\prod_{t=1}^{p}\left(hD+C_t-E\right)\right\rangle X=\mathrm{O}, \qquad (2)$$

дзе $\langle\ \rangle$ – аператарныя дужкі, $C_p=E$.

Для лікавых матрыц увядзем сымболь Пахгамера па аналогіі з тым, як гэта робіцца для лікаў $(A)_n=\begin{cases}E, & n=0\\ A(A+E)(A+2E)\cdots(A+(n-1)E), & n\in\mathrm{N}\end{cases}$.

Непасрэднай праверкай можна ўпэўніцца ў тым, што

$$X_{(oj)}=h^{E-C_j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(E-C_j+C_1\right)_n^{-1}\cdots\left(E-C_j+C_p\right)_n^{-1}\left(E-C_j+A_1\right)_n\cdots\left(E-C_j+A_p\right)_nh^n \qquad (3)$$

з'яўляецца фармальным развязкам раўнання (2), калі $\forall n\in\mathrm{N}_0,\ k,j=\overline{1,p}$ матрыцы $\left(nE-C_j+C_k\right)$ абарачальныя. Засталося высветліць, пры якіх умовах (3) будзе менавіта развязкам з алгебры $K_0^{m\times m}$.

Неабходна адзначыць, што h^A, дзе $A\in\mathbf{C}^{m\times m}$, з'яўляецца элементам $K_0^{m\times m}$ толькі ў выпадку $A=T^{-1}diag\left\{a_1,\dots,a_m\right\}T$, дзе $a_1,\dots,a_m\in\mathrm{N}_0$ (не абавязкова розныя), $T\in\mathbf{C}^{m\times m}$ абарачальная (відавочна, магчыма і больш простая сітуацыя, калі $T=E$).

Разгледзім выпадак, калі $\forall k=\overline{1,q}$ $C_k=diag\left\{\lambda_{1k},\dots,\lambda_{mk}\right\}$. Каб $h^{E-C_j}\in K_0^{m\times m}$, неабходна і дастаткова, каб выконвалася ўмова $\forall i=\overline{1,m}$ $\lambda_{ij}\le 1$ – цэлыя. Каб $\forall n\in\mathrm{N}_0$ матрыцы $\left(nE-C_j+C_k\right)$ былі абарачальнымі, неабходна, каб $\forall i=\overline{1,m}$ $1-\lambda_{ij}+\lambda_{ik}$ не былі цэлымі недадатнымі лікамі. Тады развязак, азначаны формулай (3), будзе адзіным, г.зн, што будзе існаваць толькі адзіны $j\in\{1,\dots,q\}$ такі, што $X_{(oj)}\in K_0^{m\times m}$, а для $k\ne j$ $X_{(ok)}$ могуць належаць $K_0^{m\times m}$ толькі ў выпадку роўнасці матрыц C_j і C_k, але фактычна развязкі будуць супадаць.

Пяройдзем да развязання раўнання (1) у алгебры люстэркавых паслядоўнасцей $K_{-0}^{m\times m}$. Фармальны развязак эквівалентнага (1) раўнання (2) можна атрымаць па формуле

$$X_{(\infty j)} = s^{A_j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(E+A_j-A_1\right)_n^{-1}\cdots\left(E+A_j-A_p\right)_n^{-1}\left(E+A_j-C_1\right)_n\cdots\left(E+A_j-C_p\right)_n s^n \quad (4)$$

Няхай выконваюцца ўмовы:

1. $\forall k=\overline{1,q}\ \ A_k = diag\{\mu_{1k},\ldots,\mu_{mk}\}$,
2. $\forall i=\overline{1,m}\ \ \mu_{ij}\ge 0$ – цэлыя,
3. $1+\mu_{ij}-\mu_{ik}$ не з'яўляюцца цэлымі недадатнымі.

Тады $\forall k=\overline{1,q}$, $n\in \mathrm{N}_0$ матрыцы $\left(nE+A_j-A_k\right)$ абарачальныя, $s^{A_j}\in K_{-0}^{m\times m}$, а значыць, і развязак (4) належыць алгебры $K_{-0}^{m\times m}$. Прычым ён будзе адзіным у тым жа сэнсе, які меўся на ўвазе для алгебры $K_0^{m\times m}$.

Спісак выкарыстаных крыніц

1. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, *А. Эрдейи:* в 3 т.– М.: Наука, 1973. – Т 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – 297 с.
2. Smith, F.C. Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p=q+1$ / F.C. Smith // Bull. of the Amer. Math. Soc. – 1938. – Vol. 44. – P. 429–433.
3. Васільеў, І.Л. Рашэнне дыскрэтнага раўнання Лапласа ў кольцы паслядоўнасцей / І. Л. Васільеў, Д. А. Навічкова // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 3. – С. 114–119.

УДК 519.6 + 517.983.54

СХОДИМОСТЬ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ПРИБЛИЖЁННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Наумовец С.Н.[1], Матысик О.В.[2]

[1]Брестский государственный технический университет, г. Брест
[2]Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Пусть в гильбертовом пространстве *H* требуется решить уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A: H\to H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0\in Sp\,A$, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части *y*. Для его отыскания предлагается итерационный метод

$$x_{n+1} = (E-\alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближённо, т.е. вместо *y* известно δ – приближение y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению *x* уравнения (1) при подходящем