

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Методические рекомендации и варианты заданий для студентов  
экономических специальностей

Брест 2019

**УДК 519.852 (076)**

В первой части настоящей методической разработке приведены варианты заданий по таким разделам математического программирования, как линейное программирование, включая транспортную задачу, и программирование на сетях и графах, изучаемым студентами экономических специальностей дневной и заочной форм обучения на втором курсе. Во второй части приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

**Составители:** Юхимук Т.Ю., старший преподаватель,  
Юхимук М.М., старший преподаватель,  
Махнист Л.П., к.т.н., доцент,  
Черненко В.П., доцент,  
Сукасян Т.М., ассистент

**Рецензент:** Басик А.И., доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

Учреждение образования

© «Брестский государственный технический университет», 2019

## I. Практические задания

**№1.** Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции  $Z$  при заданных ограничениях на переменные  $x, y$ .

1.  $Z = x + 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ 3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

2.  $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 39, \\ x + 9y \geq 18, \\ x - 3y \geq -9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

3.  $Z = -2x - 4y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \geq -10, \\ 4x - y \leq 15, \\ x + 4y \geq 8, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

4.  $Z = -3x + 2y$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 32, \\ -x + 2y \leq 12, \\ 7x + 4y \leq 60, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

5.  $Z = 2x + 7y$

$$\begin{cases} 5x - y \geq 5, \\ 4x - y \leq 24, \\ -3x + 8y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

6.  $Z = x + 3y$

$$\begin{cases} 3x - 5y \leq 12, \\ x + 2y \geq 15, \\ 7x + 3y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

7.  $Z = 2x - 4y$

$$\begin{cases} 4x + y \leq 32, \\ -x + 6y \leq 42, \\ 5x + 6y \geq 30, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

8.  $Z = -3x - 3y$

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6, \\ 3x - y \leq 21, \\ -x + 3y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

9.  $Z = 4x - 2y$

$$\begin{cases} 5x - 6y \geq -18, \\ x + y \leq 14, \\ x - y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

10.  $Z = -x - 2y$

$$\begin{cases} x + y \geq 2, \\ 3x - y \leq 15, \\ -x + 7y \leq 35, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

11.  $Z = 6x + 5y$

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 2, \\ 3x + 7y \leq 49, \\ 5x + y \geq 5, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

12.  $Z = -3x + 6y$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 14, \\ x - y \leq 6, \\ 5x + 3y \leq 46, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

13.  $Z = 3x - 2y$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 20, \\ 5x + 2y \leq 39, \\ 2x + 7y \geq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

14.  $Z = 2x + y$

$$\begin{cases} x + y \geq 3, \\ 4x + 7y \leq 49, \\ 3x - 4y \leq 9, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

15.  $Z = x - 4y$

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ 3x - 10y \geq -10, \\ 4x - 3y \leq 28, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

16.  $Z = 4x + 2y$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ 7x + 2y \leq 70, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

17.  $Z = -x - 5y$

$$\begin{cases} x + 3y \geq 4, \\ 3x + 2y \leq 24, \\ 5x - 3y \geq 2, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

18.  $Z = -4x + 3y$

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6, \\ x - y \leq 3, \\ 3x - 8y \geq -21, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$19. Z = 2x - 3y$$

$$\begin{cases} 3x + 8y \geq 35, \\ -4x + 5y \leq 16, \\ 7x + 3y \leq 66, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$20. Z = -5x - 3y$$

$$\begin{cases} 3x + 5y \geq 15, \\ 3x - 2y \leq 15, \\ 2x + 9y \leq 72, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$21. Z = x - 3y$$

$$\begin{cases} -2x + y \leq 4, \\ x + 3y \geq 6, \\ 3x + 4y \leq 27, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$22. Z = 4x + y$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 12, \\ 5x + 4y \geq 20, \\ x + 2y \leq 14, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$23. Z = -x - 5y$$

$$\begin{cases} -3x + 5y \leq 9, \\ 5x + 2y \leq 47, \\ 2x + 7y \geq 25, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$24. Z = x + 3y$$

$$\begin{cases} x + 4y \geq 6, \\ 4x + y \geq 9, \\ 5x + 7y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$25. Z = 4x + 2y$$

$$\begin{cases} -3x + 4y \leq 2, \\ 4x - 3y \leq 16, \\ -2x + 5y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$26. Z = -3x + 2y$$

$$\begin{cases} 6x - y \geq 6, \\ 2x + 3y \leq 22, \\ x - 2y \leq 4, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$27. Z = 4x - 2y$$

$$\begin{cases} -x + y \leq 2, \\ 2x - 3y \leq 10, \\ x + y \leq 10, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$28. Z = x - 3y$$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2, \\ x + 8y \leq 32, \\ x + 2y \geq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$29. Z = 3x + y$$

$$\begin{cases} x - y \leq 8, \\ 2x + 9y \leq 49, \\ 5x + 6y \geq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$30. Z = 4x + 2y$$

$$\begin{cases} 7x - 3y \geq 7, \\ 4x - 3y \leq 20, \\ 3x + 4y \leq 40, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

**№2.** Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

$$1. \max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \min Z = -2x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$4. \min Z = -2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 27, \\ 3x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$5. \max Z = -x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 23, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$6. \min Z = x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ 3x_1 + x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7.  $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8.  $\min Z = -x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 63, \\ 2x_1 + x_2 \leq 22, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9.  $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

10.  $\min Z = -5x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 \leq 49, \\ 4x_1 + x_2 \leq 37, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 25, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11.  $\max Z = x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12.  $\min Z = -2x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13.  $\max Z = -x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 43, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14.  $\min Z = -4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15.  $\max Z = -3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 55, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16.  $\min Z = 4x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17.  $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18.  $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 10x_2 \leq 50, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 26, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19.  $\max Z = -3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20.  $\min Z = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 25, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 43, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

21.  $\max Z = 5x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 8x_1 + x_2 \leq 64, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

22.  $\min Z = -2x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 + x_2 \leq 23, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

23.  $\max Z = 4x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 4x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

24.  $\min Z = x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \leq 14, \\ 3x_1 + x_2 \leq 29, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

25.  $\max Z = -2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 21, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

26.  $\min Z = -x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 17, \\ 4x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

27.  $\max Z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 49, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

28.  $\min Z = x_1 - 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

29.  $\max Z = 4x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 3x_1 + x_2 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

30.  $\min Z = -4x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 23, \\ 6x_1 - x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**№3.** У поставщиков  $A_i$  имеется некоторая однородная продукция в количествах  $a_i$ , которую нужно перевезти потребителям  $B_j$  в количествах  $b_j$  по ценам  $c_{ij}$  денежных единиц за перевозку единицы продукции от  $A_i$  к  $B_j$ . Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

1а.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	2	7	3	1	200
$A_2$	5	6	5	3	150
$A_3$	4	1	2	1	250
$b_j$	90	210	100	200	

16.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	5	5	70
$A_2$	3	7	2	75
$A_3$	1	4	8	55
$b_j$	50	80	70	

2а.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	3	1	3	1	150
$A_2$	4	5	4	3	170
$A_3$	2	1	6	3	180
$b_j$	40	160	150	150	

26.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	8	4	3	85
$A_2$	1	7	5	45
$A_3$	2	4	3	65
$b_j$	40	80	70	

3а.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	8	5	1	140
$A_2$	2	5	3	2	160
$A_3$	1	3	5	1	200
$b_j$	100	90	120	190	

36.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	2	1	120
$A_2$	2	4	5	80
$A_3$	1	4	7	65
$b_j$	100	80	85	

**4a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	5	6	3	2	250
$A_2$	3	2	8	1	120
$A_3$	1	5	6	4	170
$b_j$	130	140	110	160	

**46.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	2	5	1	120
$A_2$	1	6	3	125
$A_3$	2	3	8	105
$b_j$	100	130	120	

**5a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	2	6	3	1	100
$A_2$	3	7	5	3	350
$A_3$	4	1	2	4	150
$b_j$	50	250	190	110	

**56.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	4	1	85
$A_2$	1	6	2	65
$A_3$	2	1	7	90
$b_j$	660	55	125	

**6a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	3	6	4	1	175
$A_2$	1	4	4	2	250
$A_3$	2	1	1	3	650
$b_j$	120	230	160	140	

**66.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	4	1	50
$A_2$	1	3	2	75
$A_3$	2	2	4	85
$b_j$	35	85	90	

**7a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	1	8	3	1	255
$A_2$	3	6	5	2	185
$A_3$	3	1	5	1	140
$b_j$	135	145	230	70	

**76.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	7	8	6	80
$A_2$	4	6	5	70
$A_3$	2	5	7	60
$b_j$	40	90	80	

**8a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	7	3	2	5	250
$A_2$	1	6	5	5	170
$A_3$	2	1	5	3	200
$b_j$	140	160	150	170	

**86.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	8	5	75
$A_2$	2	7	2	95
$A_3$	1	4	3	80
$b_j$	60	90	100	

**9a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	6	5	2	150
$A_2$	1	4	6	6	140
$A_3$	5	2	3	2	110
$b_j$	120	70	120	90	

**96.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	2	2	65
$A_2$	1	4	3	80
$A_3$	3	2	4	75
$b_j$	55	85	80	

**10a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	1	5	2	175
$A_2$	3	5	8	3	265
$A_3$	4	2	6	4	190
$b_j$	140	130	210	150	

**106.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	2	5	2	95
$A_2$	1	7	2	75
$A_3$	1	2	6	90
$b_j$	80	55	125	

**11a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	2	2	4	370
$A_2$	1	5	4	4	160
$A_3$	3	1	5	2	95
$b_j$	250	140	160	75	

**116.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	4	5	2	65
$A_2$	2	7	3	90
$A_3$	3	2	8	85
$b_j$	35	100	105	

**12a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	2	9	3	1	140
$A_2$	4	7	5	2	170
$A_3$	4	2	6	2	200
$b_j$	135	85	150	140	

**126.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	7	5	95
$A_2$	3	5	4	100
$A_3$	1	4	6	80
$b_j$	65	100	110	

**13a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	5	1	2	2	90
$A_2$	4	5	7	3	160
$A_3$	4	1	3	6	130
$b_j$	140	90	70	80	

**136.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	2	5	2	100
$A_2$	1	7	2	85
$A_3$	1	2	6	115
$b_j$	120	55	125	

**14a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	3	1	4	5	135
$A_2$	4	5	7	1	180
$A_3$	2	1	4	2	145
$b_j$	95	150	85	130	

**146.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	4	2	110
$A_2$	1	8	1	75
$A_3$	3	2	2	85
$b_j$	60	120	90	

**15a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	3	4	5	1	110
$A_2$	3	4	6	5	180
$A_3$	2	2	3	4	150
$b_j$	80	120	140	100	

**156.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	3	2	170
$A_2$	3	1	1	145
$A_3$	1	2	3	205
$b_j$	160	140	220	



**16a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	2	3	1	90
$A_2$	3	5	6	3	125
$A_3$	4	2	1	4	155
$b_j$	150	35	105	80	

**166.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	2	4	75
$A_2$	2	7	1	125
$A_3$	1	2	3	90
$b_j$	130	60	100	

**17a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	1	4	1	2	75
$A_2$	4	5	7	2	135
$A_3$	1	1	3	4	150
$b_j$	125	60	95	80	

**176.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	1	2	95
$A_2$	2	4	6	125
$A_3$	2	1	5	80
$b_j$	120	55	125	

**18a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	3	2	1	2	125
$A_2$	4	5	7	1	155
$A_3$	2	2	3	4	220
$b_j$	150	80	130	140	

**186.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	2	3	85
$A_2$	1	3	6	95
$A_3$	2	1	4	120
$b_j$	120	55	125	

**19a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	2	7	3	1	165
$A_2$	1	6	1	1	150
$A_3$	2	2	4	8	135
$b_j$	105	130	105	110	

**196.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	2	8	2	95
$A_2$	3	5	1	80
$A_3$	1	2	6	85
$b_j$	85	75	100	

**20a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	5	1	2	205
$A_2$	2	2	1	1	160
$A_3$	7	1	7	3	235
$b_j$	185	120	145	150	

**206.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	8	7	1	125
$A_2$	2	3	2	105
$A_3$	1	3	6	100
$b_j$	90	110	130	

**21a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	2	3	2	1	140
$A_2$	5	7	5	1	160
$A_3$	1	1	7	3	200
$b_j$	130	120	110	140	

**216.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	4	3	1	75
$A_2$	2	6	2	95
$A_3$	1	3	5	80
$b_j$	65	80	105	

**22a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	7	1	1	1	200
$A_2$	3	4	3	5	350
$A_3$	1	2	4	7	150
$b_j$	130	270	220	80	

**226.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	2	2	45
$A_2$	1	4	3	75
$A_3$	1	2	7	90
$b_j$	35	75	100	

**23a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	1	2	1	3	120
$A_2$	6	5	4	2	150
$A_3$	1	3	1	3	130
$b_j$	140	75	105	80	

**236.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	3	2	4	75
$A_2$	2	7	1	125
$A_3$	1	2	3	90
$b_j$	130	60	100	

**24a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	5	2	3	1	75
$A_2$	6	4	7	1	85
$A_3$	1	3	1	1	120
$b_j$	110	70	60	40	

**246.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	5	3	85
$A_2$	1	6	3	80
$A_3$	1	2	8	135
$b_j$	50	160	90	

**25a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	6	3	1	2	110
$A_2$	3	5	3	1	140
$A_3$	1	3	8	7	200
$b_j$	150	130	90	80	

**256.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	4	7	1	65
$A_2$	2	6	1	75
$A_3$	1	8	5	90
$b_j$	40	120	70	

**26a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	7	3	2	5	130
$A_2$	4	8	5	2	145
$A_3$	1	1	7	2	225
$b_j$	100	100	120	180	

**266.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	5	2	60
$A_2$	2	5	3	80
$A_3$	1	1	4	90
$b_j$	50	80	100	

**27a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	8	4	2	1	135
$A_2$	2	5	3	4	185
$A_3$	1	3	6	7	220
$b_j$	180	200	70	90	

**276.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	5	8	3	95
$A_2$	2	6	2	125
$A_3$	1	7	4	150
$b_j$	70	180	120	

**28a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	5	3	1	1	100
$A_2$	1	3	6	2	140
$A_3$	3	2	7	4	180
$b_j$	90	110	120	100	

**28б.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	4	5	2	110
$A_2$	1	9	1	120
$A_3$	2	4	6	70
$b_j$	80	120	100	

**29a.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	5	8	1	3	160
$A_2$	1	9	1	2	210
$A_3$	2	1	4	3	230
$b_j$	100	300	120	80	

**29б.**

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	6	7	2	120
$A_2$	1	9	1	70
$A_3$	2	1	3	80
$b_j$	80	90	100	

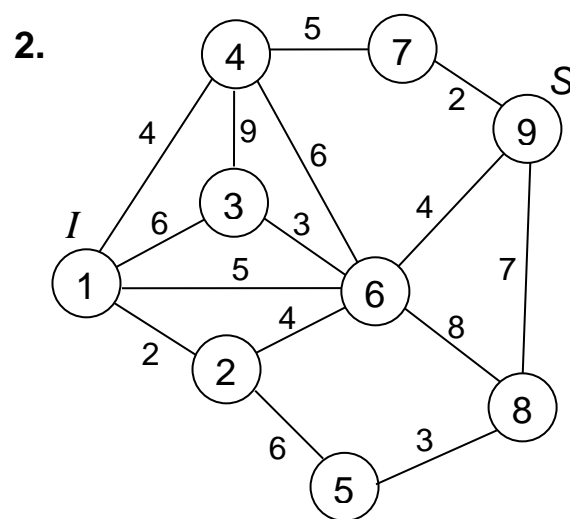
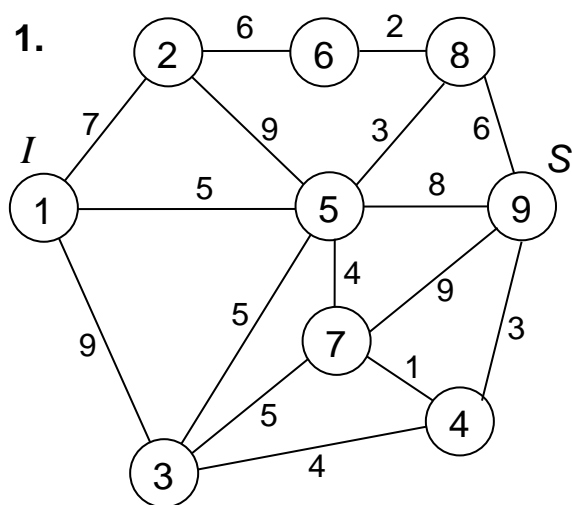
**30a.**

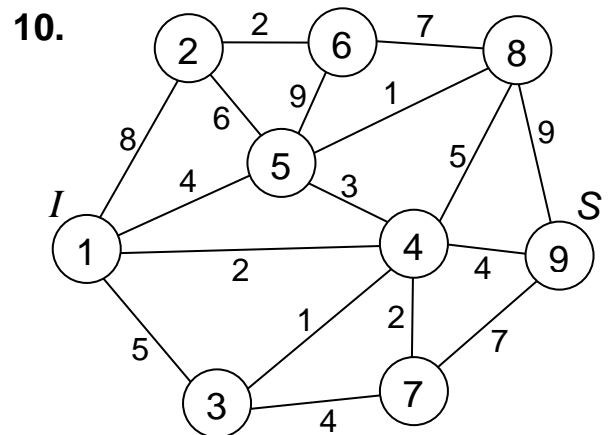
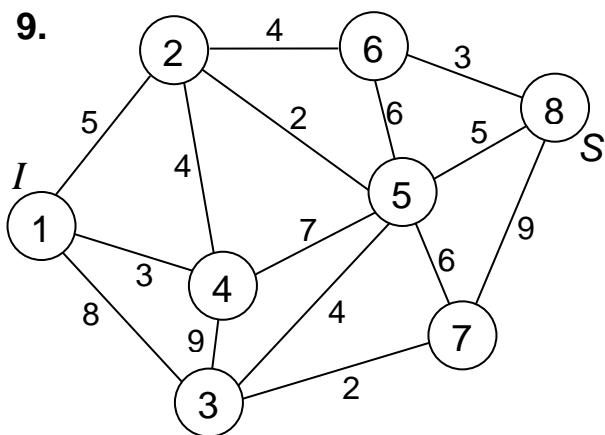
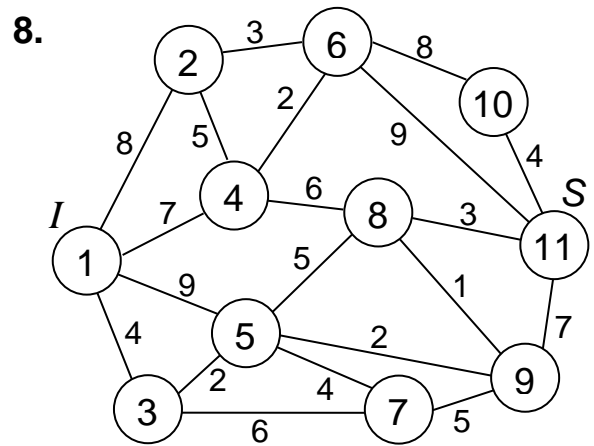
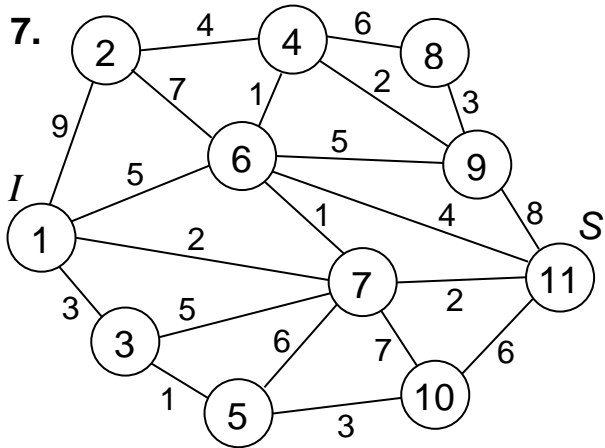
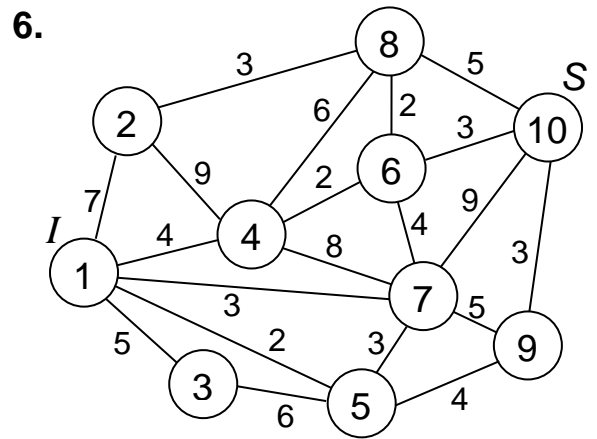
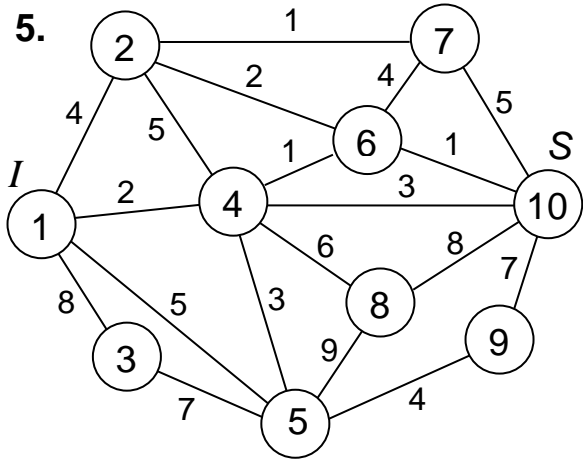
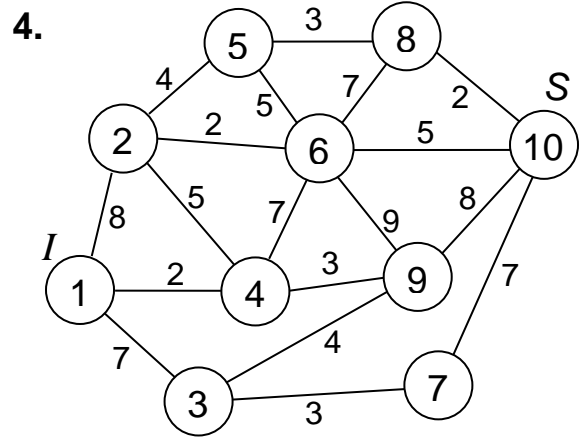
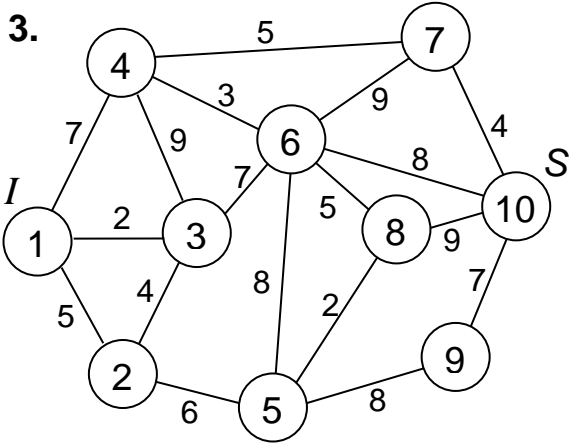
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	7	1	3	220
$A_2$	1	9	3	2	180
$A_3$	2	6	4	5	250
$b_j$	150	270	160	90	

**30б.**

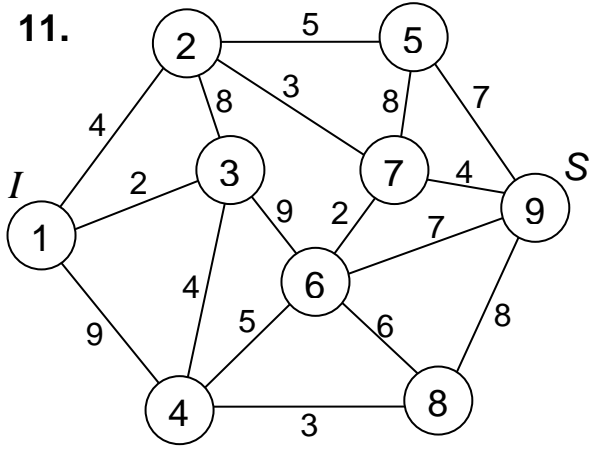
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$a_i$
$A_1$	4	2	1	50
$A_2$	3	7	1	70
$A_3$	2	1	8	90
$b_j$	40	60	110	

**№4.** Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока  $I$  в сток  $S$ . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

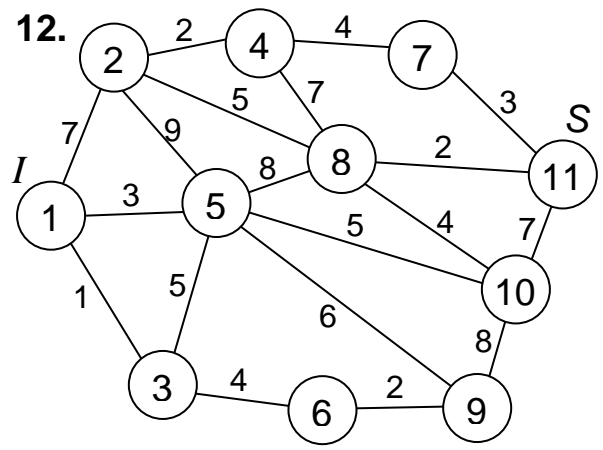




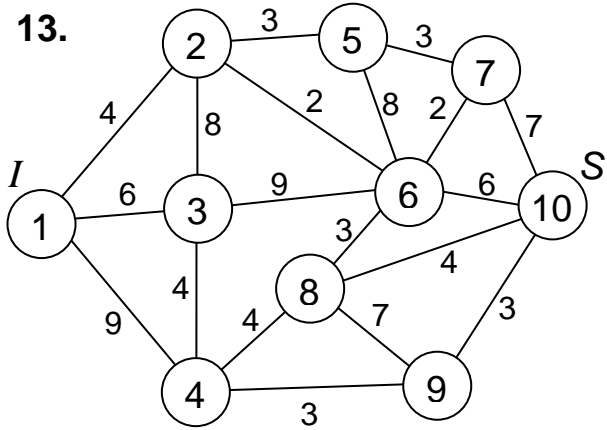
11.



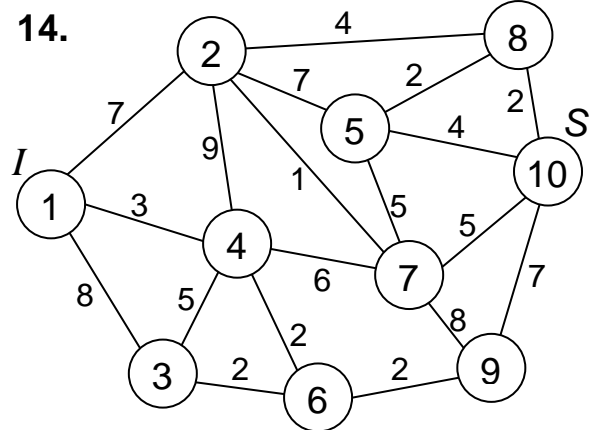
12.



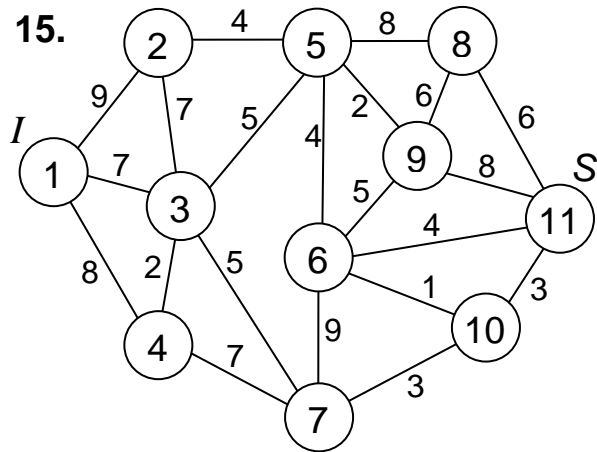
13.



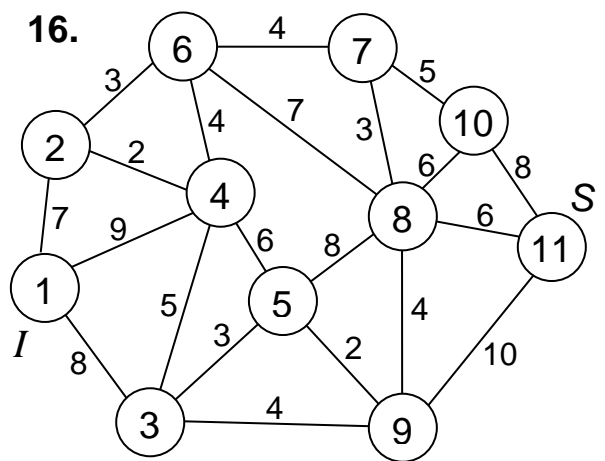
14.



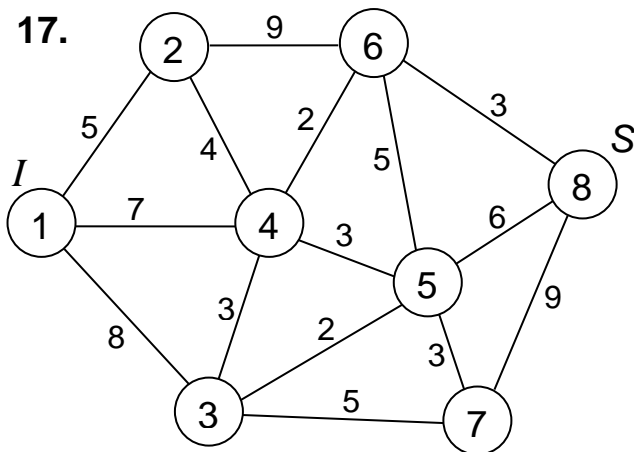
15.



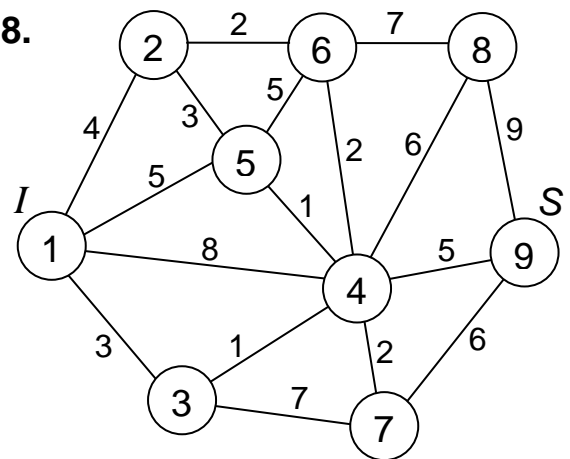
16.

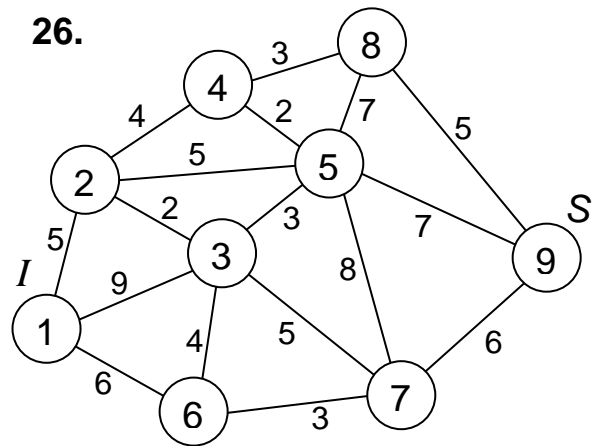
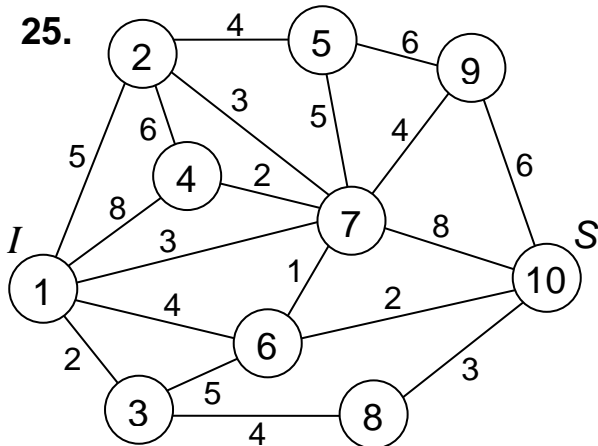
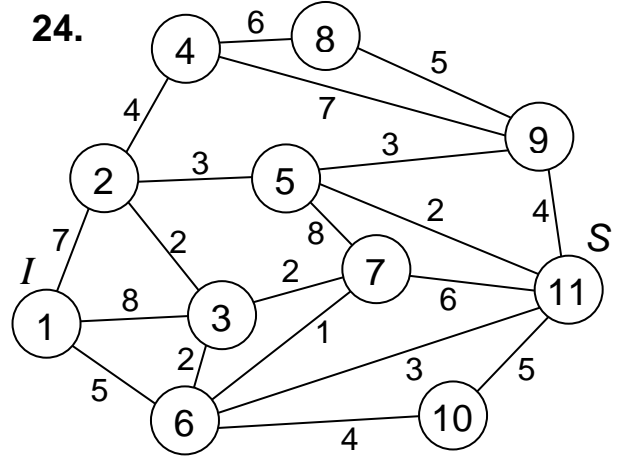
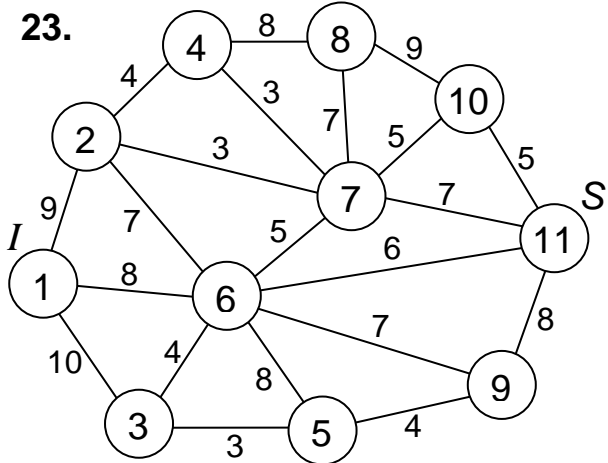
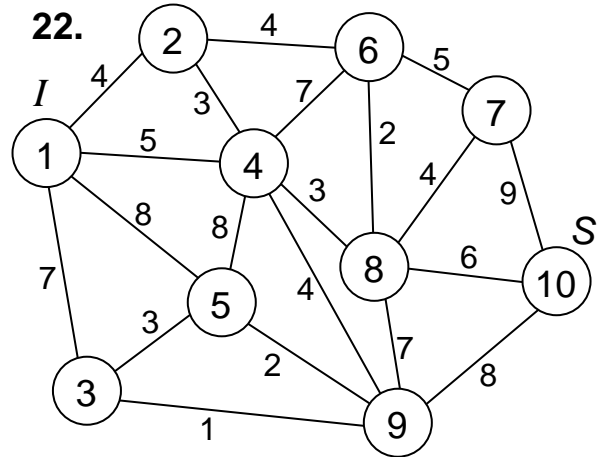
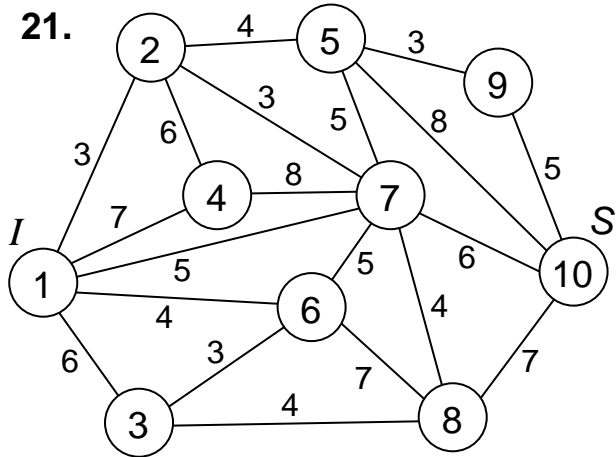
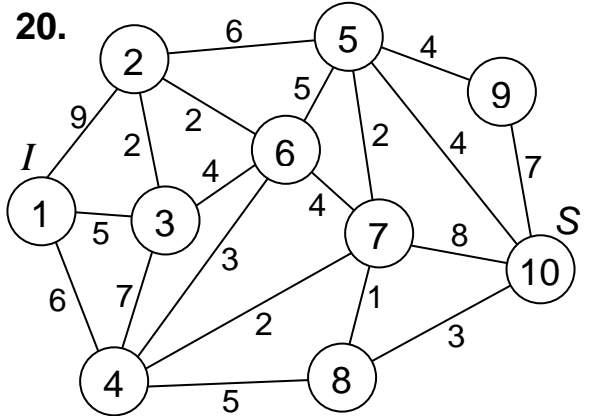
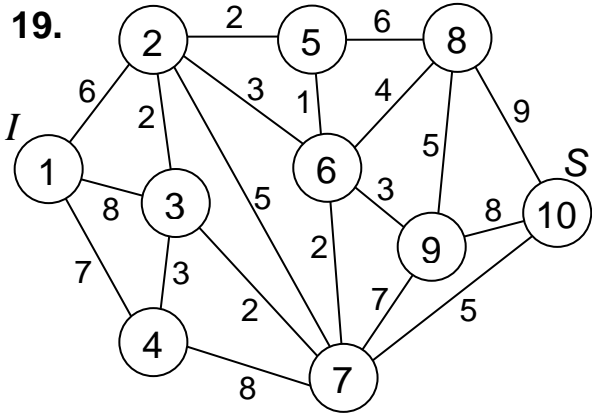


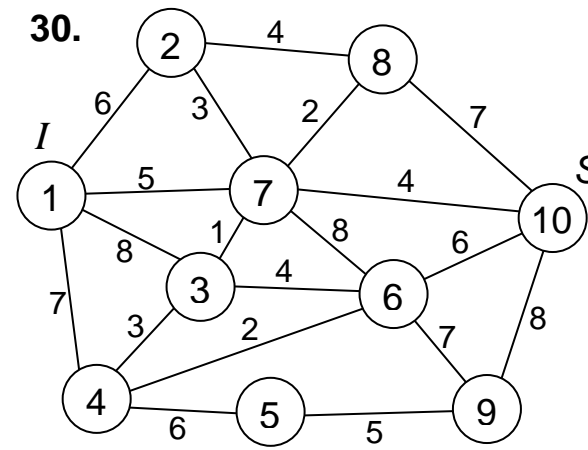
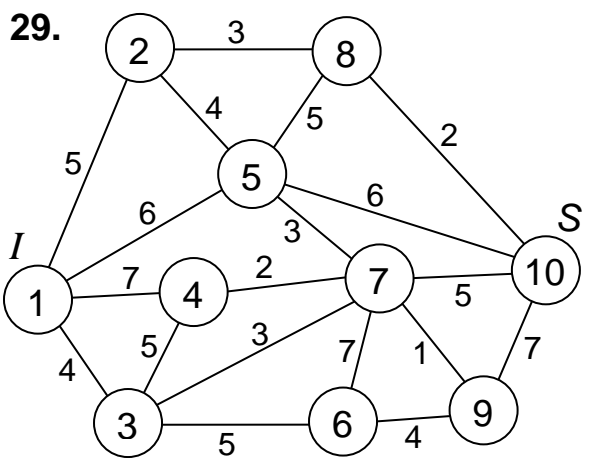
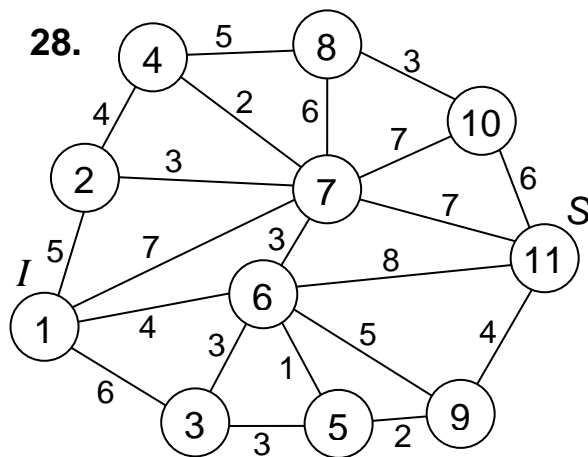
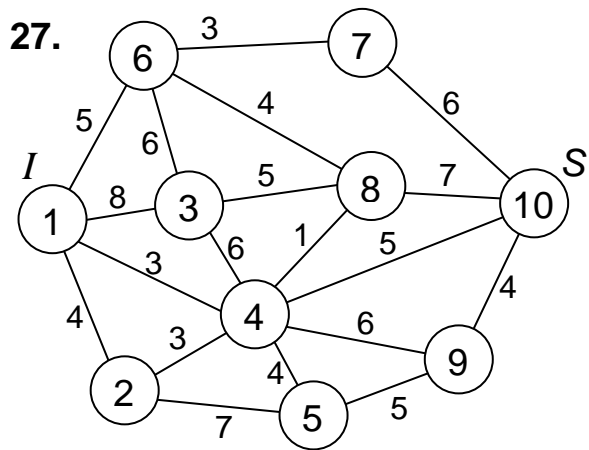
17.



18.

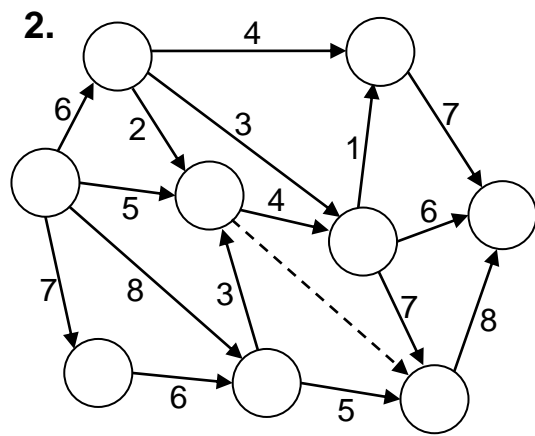
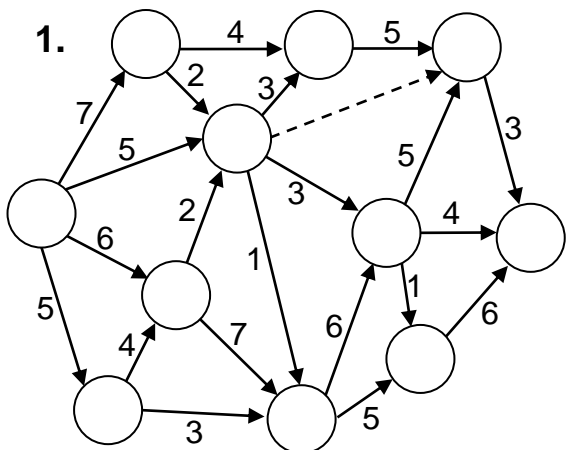


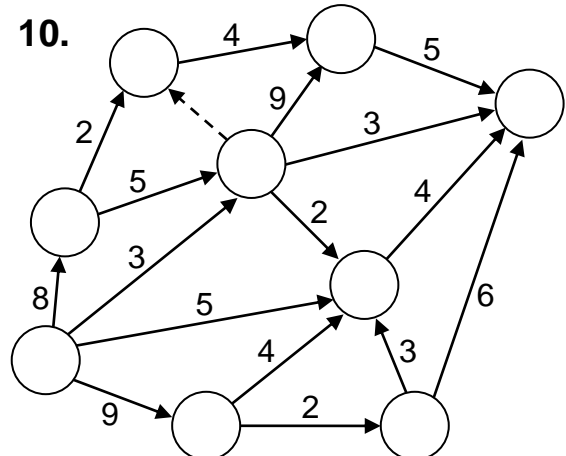
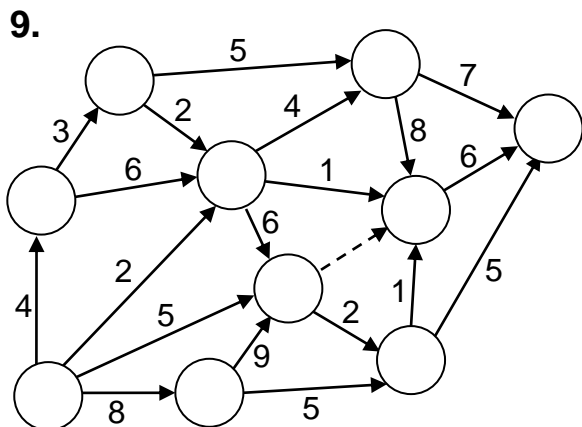
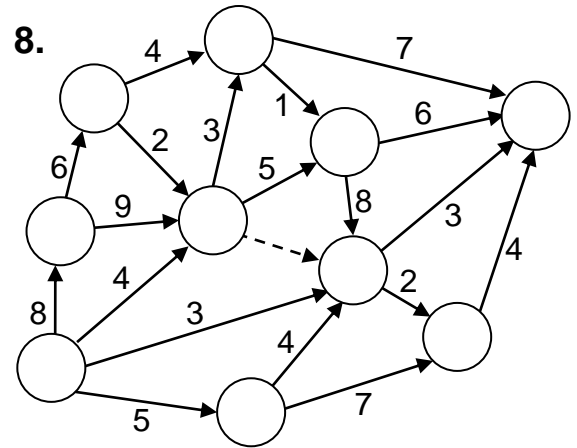
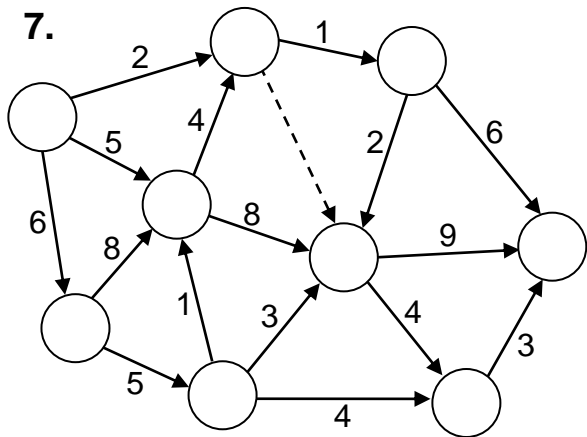
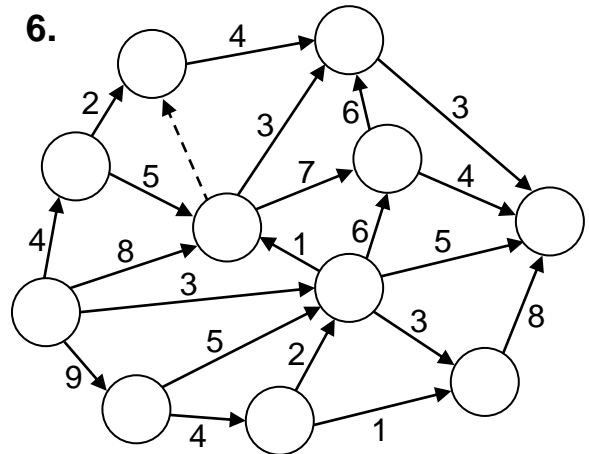
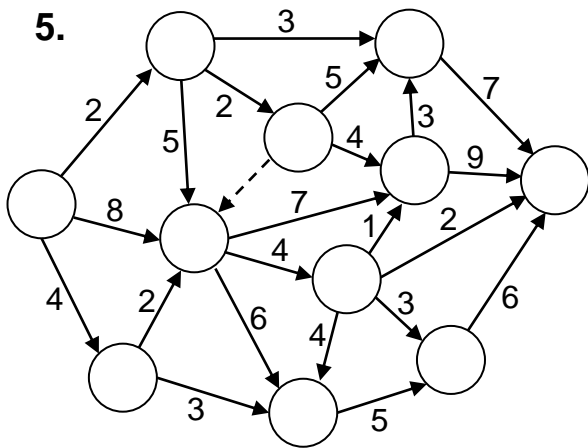
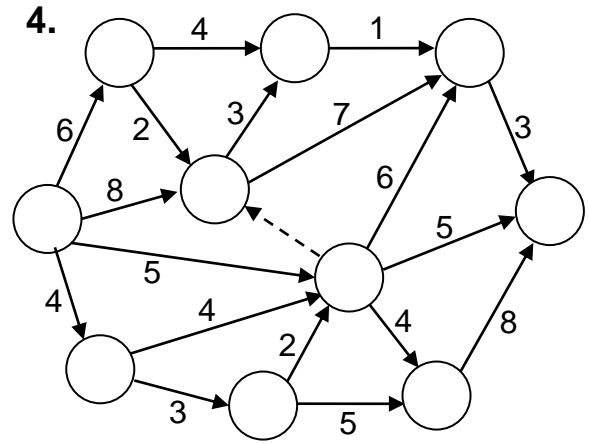
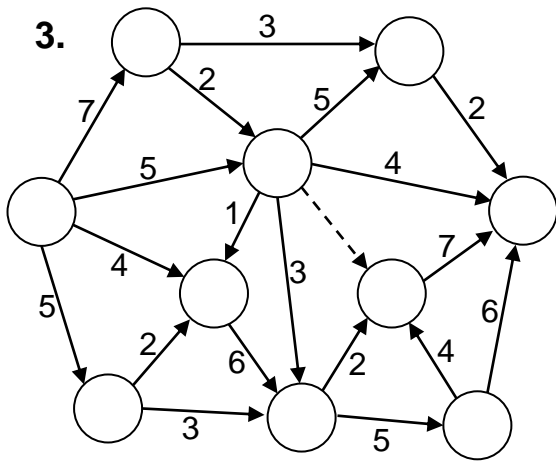




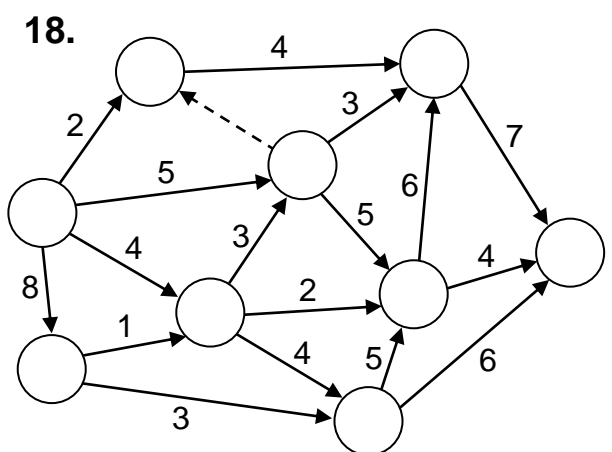
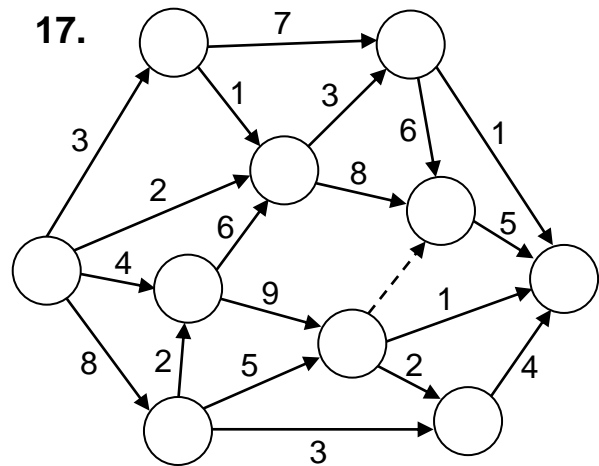
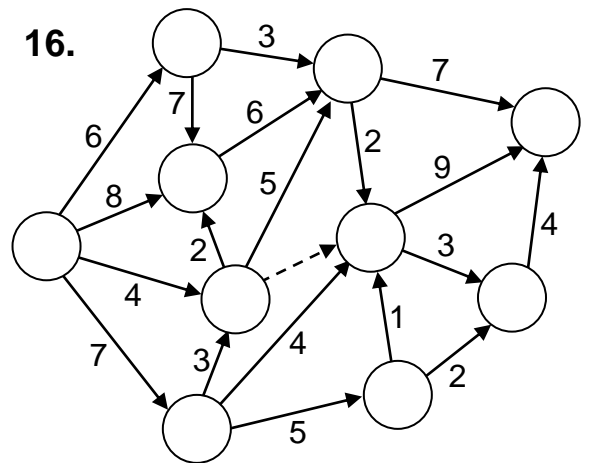
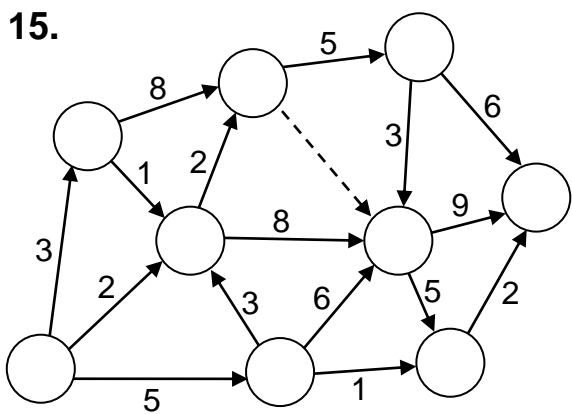
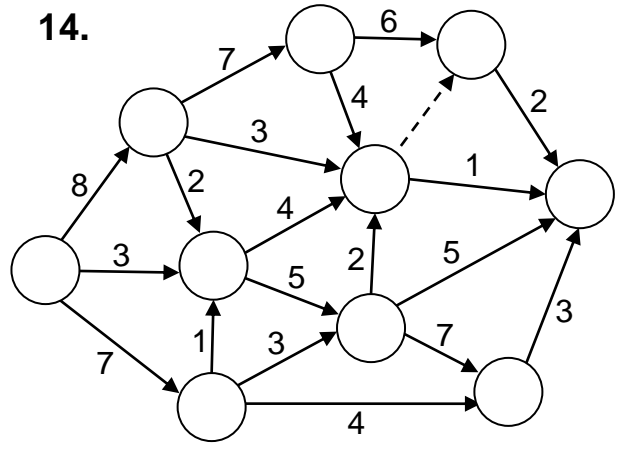
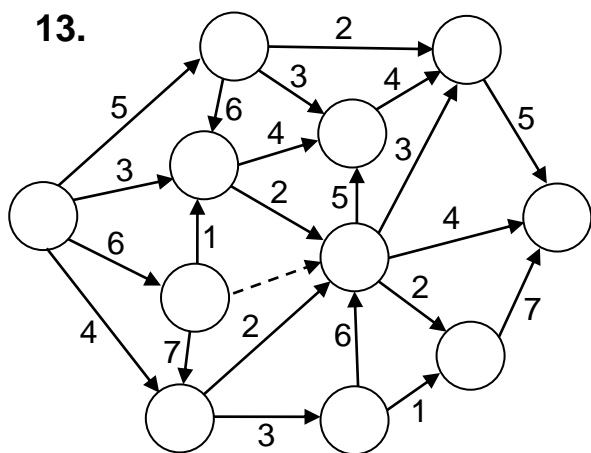
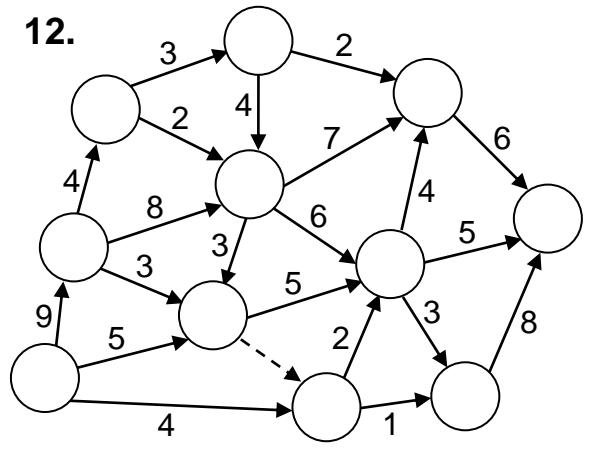
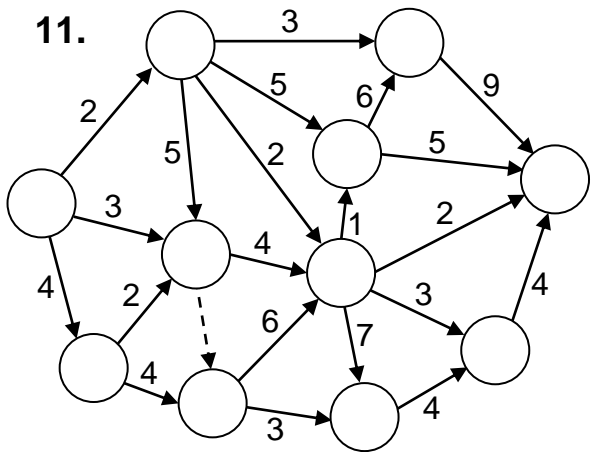
**№5.** Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

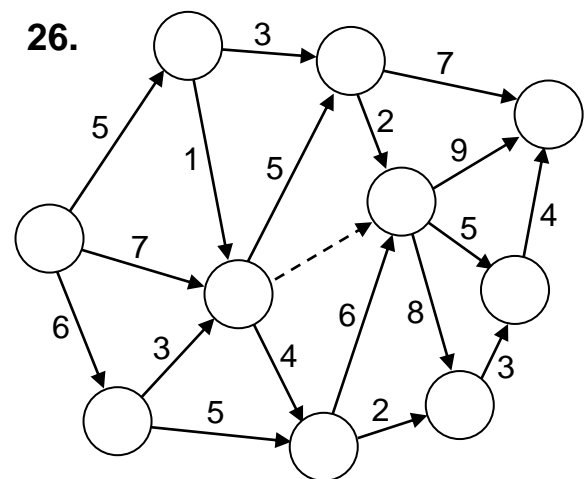
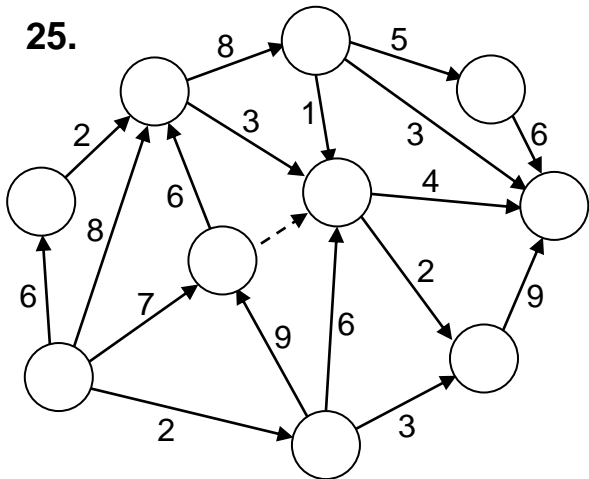
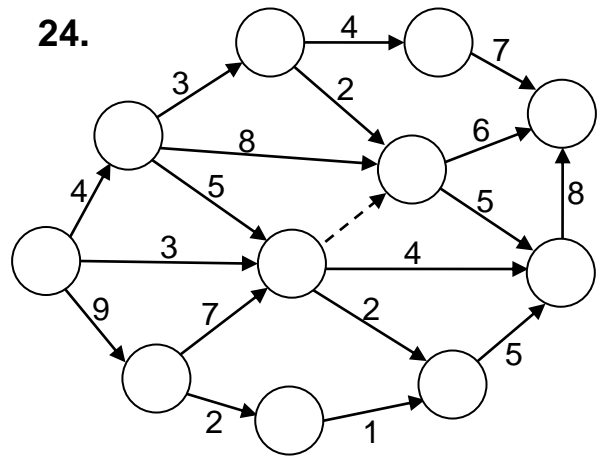
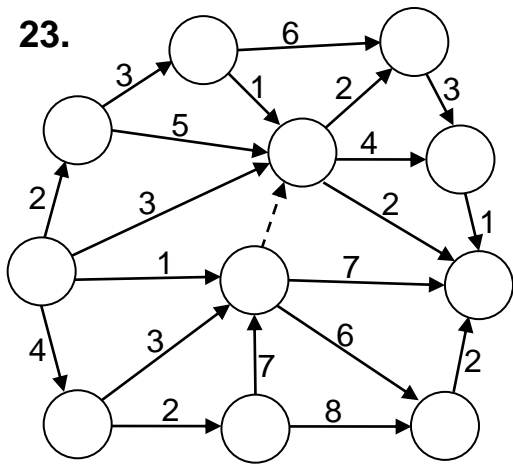
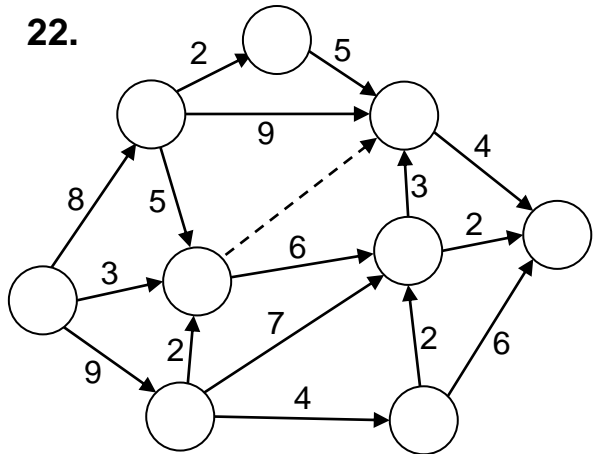
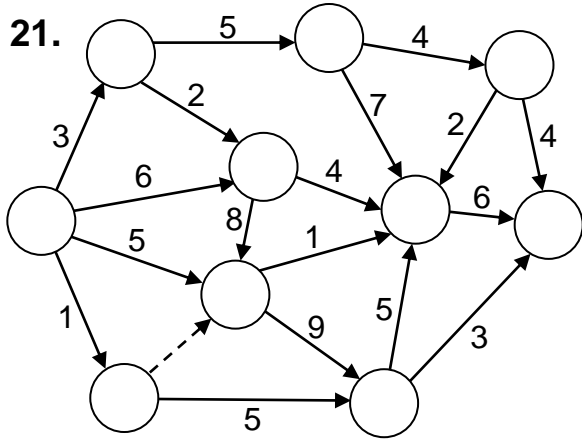
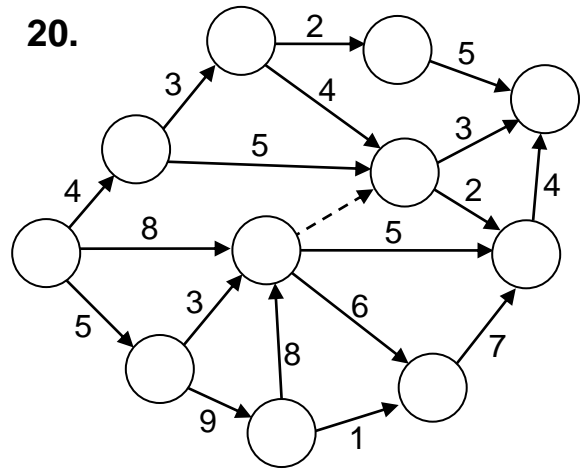
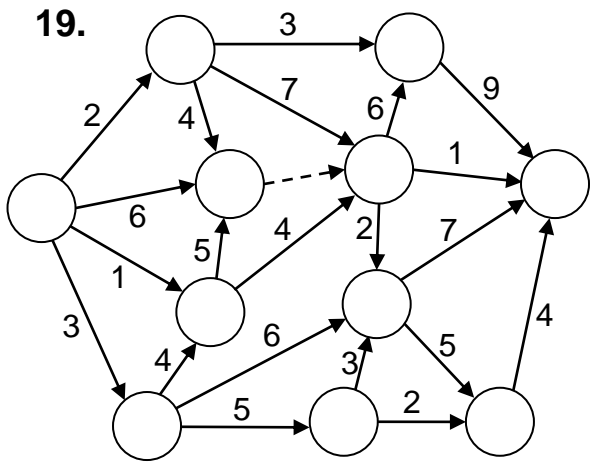
1. исходное событие  $I$  и завершающее событие  $S$ ;
2. номера вершин в натуральном порядке;
3. ранние сроки свершения событий;
4. поздние сроки свершения событий;
5. резервы времени событий;
6. время выполнения комплекса и критический путь.



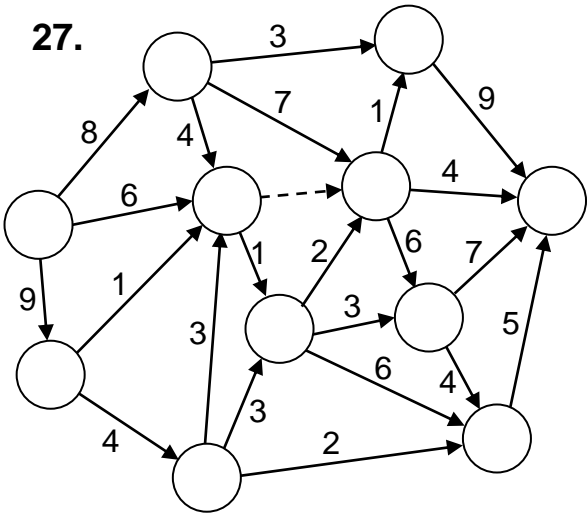




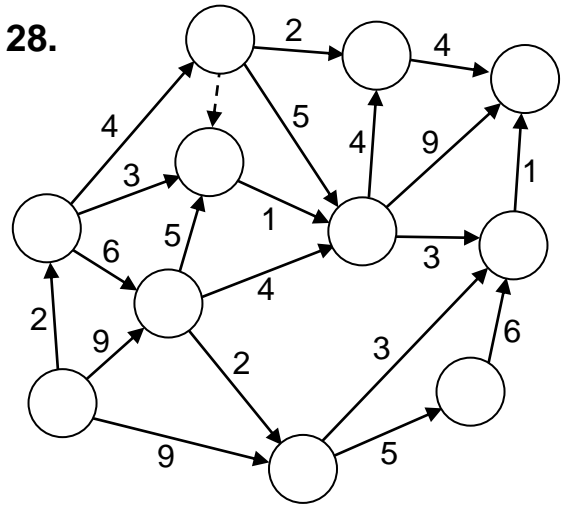




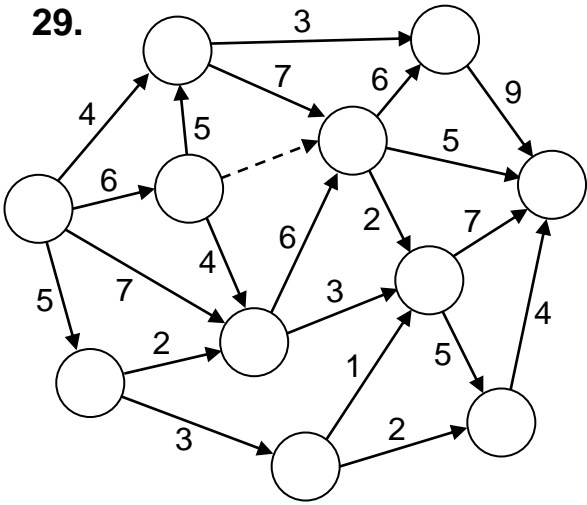
27.



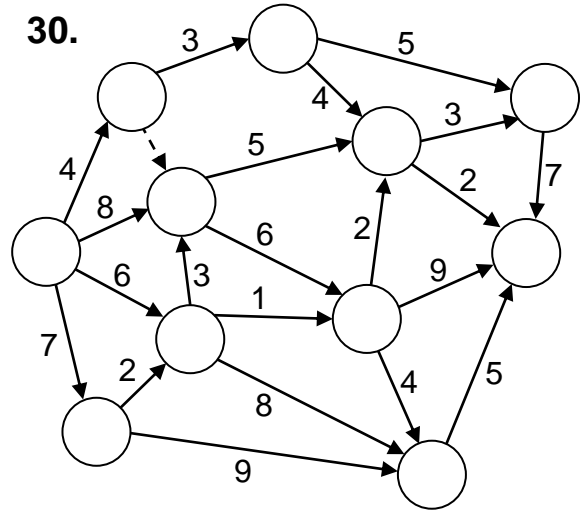
28.



29.



30.



## II. Решение типового варианта

**№1.** Найти графическим методом минимальное и максимальное значения целевой функции  $Z$  при заданных ограничениях на переменные  $x, y$ :

$$Z = x + 2y$$

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 12, \\ 7x - 2y \leq 42, \\ -x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Неравенства системы ограничений задают в прямоугольной системе координат  $Oxy$  полуплоскости, границами которых являются прямые  $l_1: 3x + 4y = 12$ ,  $l_2: 7x - 2y = 42$ ,  $l_3: -x + 4y = 20$  и координатные оси.

Построим указанные прямые по двум точкам:

$$l_1: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \quad l_2: \begin{array}{c|c|c} x & 6 & 8 \\ \hline y & 0 & 7 \end{array} \quad l_3: \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 5 & 6 \end{array}$$

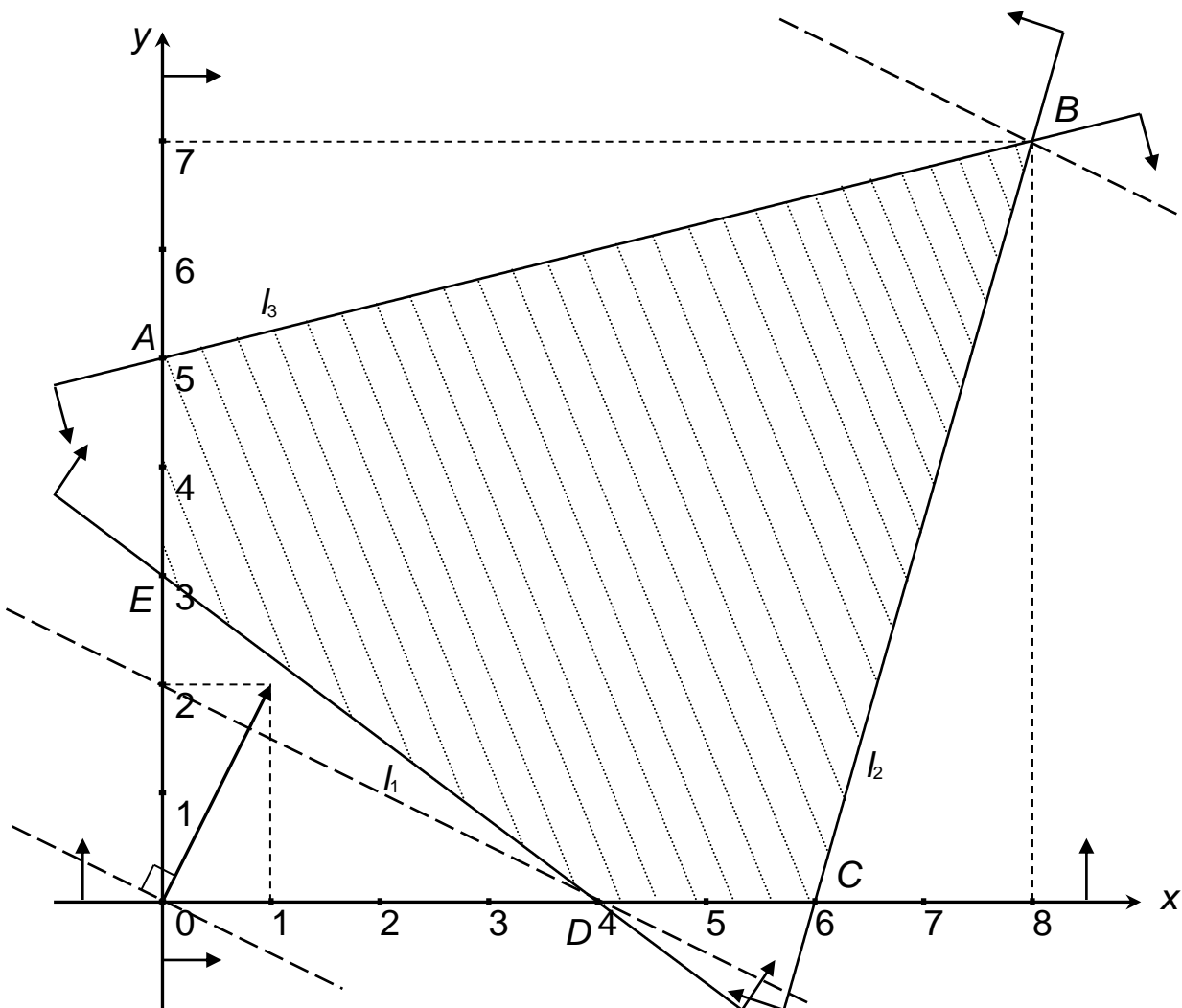
Каждая из прямых разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Чтобы определить ту полуплоскость, которая содержит область допустимых решений задачи, достаточно подставить в соответствующее неравенство координаты любой точки, не лежащей на прямой. Если получится верное неравенство, то отметим стрелками полуплоскость, содержащую эту точку. Иначе отметим другую полуплоскость.

Заметим, что точка  $O(0;0)$  не лежит ни на одной из этих прямых. Подставим ее координаты в неравенство  $3x + 4y \geq 12$ , соответствующее прямой  $l_1$ :  $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 12 \Leftrightarrow 0 \geq 12$ . Поскольку получили неверное неравенство, то отметим полуплоскость, не содержащую точку  $O(0;0)$ . Подставим координаты точки  $O(0;0)$  в неравенство  $7x - 2y \leq 42$ , соответствующее прямой  $l_2$ :  $7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \leq 42 \Leftrightarrow 0 \leq 42$ . Так как получили верное неравенство, то отметим полуплоскость, содержащую точку  $O$ . Подставляя координаты точки  $O(0;0)$  в неравенство  $-x + 4y \leq 20$ , соответствующее прямой  $l_3$ , получим  $-0 + 4 \cdot 0 \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 20$ . Поэтому также отметим полуплоскость, содержащую точку  $O$ .

Наконец, условия неотрицательности  $x \geq 0, y \geq 0$  задают полуплоскости, ограниченные координатными осями.

Общей частью отмеченных полуплоскостей является выпуклый

пятиугольник  $ABCDE$ , который и образует область допустимых решений данной задачи.



Направления возрастания и убывания целевой функции  $Z$  определим с помощью вектора  $\text{grad } Z = (Z_x; Z_y)$ . Вектор градиента  $\text{grad } Z$  показывает направление наискорейшего возрастания, а вектор антиградиента  $-\text{grad } Z$  – направление наискорейшего убывания целевой функции  $Z$ . Находим вектор  $\text{grad } Z = (1; 2)$  и откладываем его от начала координат (при этом конец данного вектора будет находиться в точке с координатами  $(1; 2)$ ). Перпендикулярно вектору градиента строим линию уровня (например, проводя ее через начало координат).

Будем перемещать линию уровня в направлении вектора  $\text{grad } Z$  до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку максимума  $B$ , координаты которой находим как решение системы уравнений прямых  $l_2$  и  $l_3$ , проходящих

$$\text{через эту точку: } \begin{cases} 7x - 2y = 42, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 4y = 84, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 104, \\ -x + 4y = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 7. \end{cases}$$

Таким образом,  $\max Z = Z(8;7) = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 22$ .

Далее будем перемещать линию уровня в противоположном направлении до тех пор, пока она имеет общие точки с областью допустимых решений. Крайнее положение определит точку минимума  $D$ , которая является точкой пересечения прямой  $l_1$  с осью  $Ox$ . Найдем координаты

$$\text{этой точки: } \begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом,  $\min Z = Z(4;0) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 4$ .

**Ответ:**  $\min Z = Z(4;0) = 4$ ;  $\max Z = Z(8;7) = 22$ .

**№2.** Найти оптимальный план задачи симплекс-методом.

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Перейдем к канонической форме записи задачи, добавив к левым частям первых трех неравенств системы ограничений так называемые *балансовые* неотрицательные переменные  $x_3, x_4, x_5$ . Дополнительные переменные введем в целевую функцию с нулевыми коэффициентами:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (2)$$

Говорят, что ограничение задачи имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным 1, а в остальные ограничения – с коэффициентом, равным 0. Эта переменная называется *предпочтительной*. В нашем случае предпочтительными являются переменные  $x_3, x_4, x_5$ .

Назовем предпочтительные переменные *базисными*, а остальные – *свободными*. Найдем начальный опорный план задачи, приравняв свободные переменные к нулю и выражая базисные из ограничений-равенств:  $X^0 = (0; 0; 3; 9; 8)$ .

Дальнейшие рассуждения будем вести с использованием симплексных таблиц.

№	БП	$C_B$	$A_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	C/O
				9	6	0	0	0	
0	$x_3$	0	3	-1	1	1	0	0	–
	$x_4$	0	9	1	2	0	1	0	9/1=9
	$x_5$	0	8	2	-1	0	0	1	8/2=4
	$\Delta_j$		$Z(X^0) = 0$	-9	-6	0	0	0	
1	$x_3$	0	7	0	0,5	1	0	0,5	7/0,5=14
	$x_4$	0	5	0	2,5	0	1	-0,5	5/2,5=2
	$x_1$	9	4	1	-0,5	0	0	0,5	–
	$\Delta_j$		$Z(X^1) = 36$	0	-10,5	0	0	4,5	
2	$x_3$	0	6	0	0	1	-0,2	0,6	
	$x_2$	6	2	0	1	0	0,4	-0,2	
	$x_1$	9	5	1	0	0	0,2	0,4	
	$\Delta_j$		$Z(X^2) = 57$	0	0	0	4,2	2,4	

Будем использовать следующие обозначения: *БП* – столбец базисных переменных;  $C_B$  – столбец коэффициентов при базисных переменных в целевой функции (1);  $A_0$  – столбец решений;  $A_j (j = \overline{1,5})$  – столбцы коэффициентов при переменной  $x_j$  в уравнениях системы ограничений;  $\Delta_j (j = \overline{0,5})$  – индексные оценки (образуют индексную строку); *C/O* – столбец симплексных отношений.

Заполним симплексную таблицу для нулевой итерации:

В столбцах 5 – 9 в строке под переменными задачи записываем их коэффициенты из целевой функции (1), а ниже (в строках 2, 3, 4) – соответствующие коэффициенты из уравнений системы ограничений (2). Базисные переменные с их коэффициентами из целевой функции дублируем во 2-м и 3-м столбцах. В 4-м столбце записываем правые части равенств системы ограничений.

Заполним элементы индексной строки. В 4-м столбце записываем значение целевой функции в начальном опорном плане как сумму произведений элементов 3-го и 4-го столбцов:

$$\Delta_0 = Z(X^0) = C_B \cdot A_0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Индексную оценку переменной  $x_1$  находим как сумму произведений элементов 3-го и 5-го столбцов минус соответствующий  $x_1$  коэффициент целевой функции, записанный выше в 1-й строке:

$$\Delta_1 = C_B \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 9 = -9.$$

Аналогичным образом находим индексные оценки других переменных:

$$\Delta_2 = C_B \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 6 = -6;$$

$$\Delta_3 = C_B \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = C_B \cdot A_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = C_B \cdot A_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

При решении задачи на максимум опорный план является оптимальным, если все индексные оценки – неотрицательны ( $\Delta_j \geq 0$  ( $j = \overline{1,5}$ )). При решении задачи на минимум условием оптимальности опорного плана является неположительность индексных оценок ( $\Delta_j \leq 0$  ( $j = \overline{1,5}$ )). Наш начальный план максимальным не является, поскольку  $\Delta_1 < 0$  и  $\Delta_2 < 0$ . Выберем наибольшую по модулю «плохую» оценку  $\Delta_1 = -9$  и назовем соответствующий ей 5-й столбец *разрешающим*.

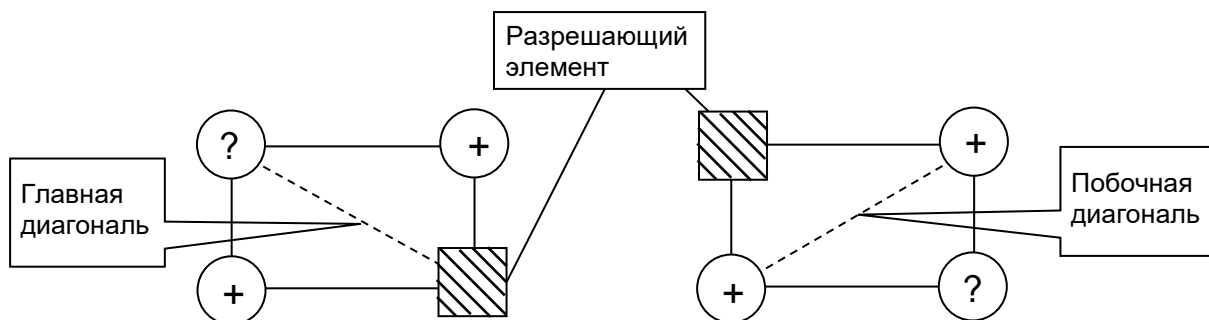
Переменную  $x_1$  будем вводить в базис вместо одной из базисных переменных начального плана. Для определения выводимой из базиса переменной разделим на положительные элементы разрешающего столбца соответствующие элементы 4-го столбца  $A_0$ . Полученные частные запишем в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее:  $\theta = \min\{9; 4\} = 4$ . Это число соответствует переменной  $x_5$ , соответствующую строку назовем *разрешающей*, а число 2, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, назовем *разрешающим элементом*. Таким образом, переменная  $x_1$  заменит в базисе переменную  $x_5$ . Базисными становятся элементы  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , а свободными –  $x_2$  и  $x_5$ .

Заполним симплексную таблицу для первой итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной  $x_5$  запишем переменную  $x_1$ , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 9 из целевой функции. Другие элементы этих столбцов оставим без изменений. Далее разделим элементы разрешающей строки (столбцы 4 – 9) нулевой итерации на разрешающий элемент и запишем полученные частные в соответствующих ячейках новой таблицы. Запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая  $\Delta_1$ ). Остальные элементы таблицы получим с помощью схематического правила (*правила прямоугольника*):

элемент (?) новой итерации есть разность произведений элементов предыдущей итерации на главной и на побочной диагоналях, деленная на разрешающий элемент:





Столбец  $A_0$ :

$$1\text{-й элемент: } \frac{3 \cdot 2 - (-1) \cdot 8}{2} = 7; \quad 2\text{-й элемент: } \frac{9 \cdot 2 - 1 \cdot 8}{2} = 5.$$

Столбец  $A_2$ :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)}{2} = 0,5; \quad 2\text{-й элемент: } \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)}{2} = 2,5.$$

Столбец  $A_3$ :

$$1\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 1; \quad 2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 0.$$

Столбец  $A_4$ :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0}{2} = 0; \quad 2\text{-й элемент: } \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{2} = 1.$$

Столбец  $A_5$ :

$$1\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1}{2} = 0,5; \quad 2\text{-й элемент: } \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2} = -0,5.$$

Элементы индексной строки можно находить тем же способом, что и в нулевой итерации, а можно воспользоваться правилом прямоугольника:

$$\Delta_0 = Z(X^1) = \frac{0 \cdot 2 - 8 \cdot (-9)}{2} = 36;$$

$$\Delta_2 = \frac{-6 \cdot 2 - (-1) \cdot (-9)}{2} = -10,5; \quad \Delta_3 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2 - 0 \cdot (-9)}{2} = 0; \quad \Delta_5 = \frac{0 \cdot 2 - 1 \cdot (-9)}{2} = 4,5.$$

Поскольку  $\Delta_2 < 0$ , то опорный план  $X^1 = (4; 0; 7; 5; 0)$  также не является оптимальным. Единственная отрицательная индексная оценка определяет в качестве разрешающего 6-й столбец. Разделим элементы 4-го столбца  $A_0$  на соответствующие элементы разрешающего столбца, запишем положительные результаты в столбце симплексных отношений и выберем среди них наименьшее:  $\theta = \min\{14; 2\} = 2$ . Это число соответствует переменной  $x_4$ , поэтому 2-я строка таблицы первой итерации будет разрешающей, а число 2,5, стоящее на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, будет разрешающим

элементом. Итак, переменная  $x_2$  заменит в базисе переменную  $x_4$ . Базисными становятся элементы  $x_1, x_2, x_3$ , а свободными –  $x_4$  и  $x_5$ .

Заполним симплексную таблицу для второй итерации:

Во 2-м столбце вместо переменной  $x_4$  запишем переменную  $x_2$ , а в 3-м – соответствующий ей коэффициент 6 из целевой функции. Далее разделим элементы разрешающей строки первой итерации на разрешающий элемент, заполнив строку новой таблицы, и запишем нули в пустых ячейках разрешающего столбца (включая  $\Delta_2$ ). Остальные элементы таблицы (включая элементы индексной строки) получим с помощью правила прямоугольника:

Столбец  $A_0$ :

$$\text{1-й элемент: } \frac{7 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 5}{2,5} = 6; \quad \text{3-й элемент: } \frac{4 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 5}{2,5} = 5.$$

Столбец  $A_1$ :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 0; \quad \text{3-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 1.$$

Столбец  $A_3$ :

$$\text{1-й элемент: } \frac{1 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 0}{2,5} = 1; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0}{2,5} = 0.$$

Столбец  $A_4$ :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 1}{2,5} = -0,2; \quad \text{3-й элемент: } \frac{0 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 1}{2,5} = 1.$$

Столбец  $A_5$ :

$$\text{1-й элемент: } \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot 0,5}{2,5} = 0,6;$$

$$\text{3-й элемент: } \frac{0,5 \cdot 2,5 - (-0,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 0,4.$$

Индексная строка:  $\Delta_0 = Z(X^2) = \frac{36 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 5}{2,5} = 57;$

$$\Delta_1 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 0}{2,5} = 0;$$

$$\Delta_4 = \frac{0 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot 1}{2,5} = 4,2; \quad \Delta_5 = \frac{4,5 \cdot 2,5 - (-10,5) \cdot (-0,5)}{2,5} = 2,4.$$

Так как все  $\Delta_j \geq 0$  ( $j = \overline{1,5}$ ), то опорный план  $X^2 = (5; 2; 6; 0; 0)$  является оптимальным. Оптимальным планом исходной задачи является план  $X^* = (5; 2)$  и  $\max Z = Z(X^*) = 57$ .

**Ответ:**  $\max Z = Z(5; 2) = 57$ .

**№3.** У поставщиков  $A_i$  имеется некоторая однородная продукция в количествах  $a_i$ , которую нужно перевезти потребителям  $B_j$  в количествах  $b_j$  по ценам  $c_{ij}$  денежных единиц за перевозку единицы продукции от  $A_i$  к  $B_j$ . Составить план перевозок, минимизирующий транспортные издержки и полностью удовлетворяющий спрос потребителей. Начальный опорный план составить методом северо-западного угла.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4	3	2	1	75
$A_2$	4	5	7	3	95
$A_3$	3	1	3	5	120
$b_j$	100	60	70	60	290

**Решение.**

Составим начальный опорный план задачи методом северо-западного угла.

Опорный план транспортной задачи имеет  $n + m - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$  базисных переменных, которые записываются в соответствующие внутренние клетки таблицы. Остальные клетки свободных переменных, равных нулю, оставляют пустыми. Согласно методу северо-западного угла, вначале определяем  $x_{11} = \min(a_1; b_1) = \min(100; 75) = 75$ . При этом уменьшаем на 75 единиц спрос 1-го потребителя и вычеркиваем запас 1-го поставщика (остальные клетки в первой строке будут свободными). Получим таблицу, в верхних левых углах внутренних клетках которой мелким шрифтом записаны стоимости  $c_{ij}$ .

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4 <b>75</b>	3	2	1	75 0
$A_2$	4	5	7	3	95
$A_3$	3	1	3	5	120
$b_j$	100 25	60	70	60	290

В оставшейся части таблицы «северо-западная» клетка расположена в 1-м столбце и во 2-й строке. Аналогично находим соответствующий ей минимум оставшихся запаса и спроса:  $x_{21} = \min(a_2; b_1) = \min(35; 95) = 35$ . Значит, спрос 1-го потребителя удовлетворен, и остальные клетки 1-го столбца будут свободными. Получим следующее:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4 <b>75</b>	3	2	1	<del>75</del> 0
$A_2$	4 <b>25</b>	5	7	3	95 70
$A_3$	3	1	3	5	120
$b_j$	100 <del>25</del> 0	60	70	60	290

Следующая «северо-западная» клетка расположена во 2-м столбце и во 2-й строке. Для нее  $x_{22} = \min(a_2; b_2) = \min(70; 60) = 60$ . При этом спрос 2-го потребителя будет удовлетворен, поэтому оставшаяся клетка 2-го столбца окажется свободной:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4 <b>75</b>	3	2	1	<del>75</del> 0
$A_2$	4 <b>25</b>	<b>60</b>	7	3	95 <del>70</del> 10
$A_3$	3	1	3	5	120
$b_j$	100 <del>25</del> 0	<del>60</del> 0	70	60	290

Продолжая аналогично, получим таблицу перевозок с первоначальным планом  $X^0$ :

$X^0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
$A_1$	4 <b>75</b>	3	2	1	<del>75</del> 0
$A_2$	4 <b>25</b>	<b>60</b>	<b>10</b>	3	95 <del>70</del> <del>10</del> 0
$A_3$	3	1	<b>60</b>	<b>60</b>	<del>120</del> <del>60</del> 0
$b_j$	100 <del>25</del> 0	<del>60</del> 0	<del>70</del> <del>60</del> 0	<del>60</del> 0	290

По плану  $X^0$  осуществляются следующие перевозки: от  $A_1$  к  $B_1$  – 75 единиц груза, от  $A_2$  к  $B_1$  – 25 единиц, к  $B_2$  – 60 единиц и к  $B_3$  – 10 единиц груза, от  $A_3$  к  $B_3$  и к  $B_4$  – по 60 единиц груза. Общая стоимость таких перевозок составит  $f(X^0) = 75 \cdot 4 + 25 \cdot 4 + 60 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 60 \cdot 3 + 60 \cdot 5 = 1250$  денежных единиц.

Для проверки на оптимальность полученного опорного плана применим так называемый *метод потенциалов*. Каждому поставщику  $A_i$  и каждому потребителю  $B_j$  приписываются соответственно числа  $u_i$  и  $v_j$ , называемые их *потенциалами*.

Для базисных (занятых) клеток рассматриваемого опорного плана должны выполняться равенства  $u_i + v_j = c_{ij}$ . В нашем случае получим систему:

$X^0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 <b>75</b>	3	2	1	$u_1 = 0$
$A_2$	4 <b>25</b>	5 <b>60</b>	7 <b>10</b>	3	$u_2 = 0$
$A_3$	3	1	3 <b>60</b>	5 <b>60</b>	$u_3 = -4$
$v_j$	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$	

Так как число потенциалов на единицу меньше, чем число уравнений полученной системы, то один из них выберем произвольным образом, например,  $u_1 = 0$ . Тогда из системы последовательно получим:  $v_1 = 4$ ,  $u_2 = 0$ ,  $v_2 = 5$ ,  $v_3 = 7$ ,  $u_3 = -4$ ,  $v_4 = 9$ .

Далее для всех свободных (не занятых) клеток подсчитаем оценки  $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ . Если все  $\Delta_{ij} \leq 0$ , то опорный план оптимален, иначе можно перейти к новому опорному плану с меньшим значением целевой функции.

$$\Delta_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$$

$$\Delta_{13} = 0 + 7 - 2 = 5,$$

$$\Delta_{14} = 0 + 9 - 1 = 8, \quad (\max)$$

В нашем случае

$$\Delta_{24} = 0 + 9 - 3 = 6,$$

$$\Delta_{31} = -4 + 4 - 3 = -3,$$

$$\Delta_{32} = -4 + 5 - 1 = 0.$$

Так как среди оценок имеются положительные, то план  $X^0$  не является оптимальным.

Для перехода к новому опорному плану введем перевозку, соответствующую наибольшей из вычисленных оценок  $\Delta_{14} = 8$ , в число базисных перевозок. Построим *цикл пересчета* свободной клетки (1;4), который представляет собой замкнутую ломаную, одна вершина которой лежит в выбранной, а остальные – в базисных клетках (соседние звенья ломаной должны быть взаимно перпендикулярны). При этом вершинам цикла поочередно приписываются знаки «плюс» или «минус», начиная со знака «плюс» у выбранной свободной клетки:

$X^0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 – <b>75</b>	3	2	1 +	0
$A_2$	4 + <b>25</b>	5 <b>60</b>	7 – <b>10</b>	3	0
$A_3$	3	1	3 + <b>60</b>	5 – <b>60</b>	–4
$v_j$	4	5	7	9	

Если в пределах цикла в клетках со знаком «плюс» добавить, а из клеток со знаком «минус» отнять одно и то же число, то получим допустимый план перевозок. Наибольшее количество продукции, которое мы можем переместить из «отрицательных» клеток в «положительные», равно наименьшей из перевозок, стоящих в «отрицательных» клетках, то есть величине  $\min(75; 10; 60) = 10$ . Поэтому в клетках со знаком «плюс» добавляем эту величину, а со знаком «минус» – вычитаем. В результате получили новый опорный план  $X^1$ , в котором клетка (1;4) стала базисной, а клетка (2;3) – свободной:

$X^1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 <b>65</b>	3	2	1 <b>10</b>	0
$A_2$	4 <b>35</b>	5 <b>60</b>	7	3	0
$A_3$	3	1	3 <b>70</b>	5 <b>50</b>	–4
$v_j$	4	5	7	9	

Вычислим общую стоимость полученных перевозок:

$$f(X^1) = 65 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 35 \cdot 4 + 60 \cdot 5 + 70 \cdot 3 + 50 \cdot 5 = 1170 \text{ денежных единиц.}$$

Заметим, что изменение общей стоимости перевозок по сравнению с планом  $X^0$  составило  $1250 - 1170 = 80 = \Delta_{14} \cdot 10$  денежных единиц.

Контроль общего объема перевозок:  $65 + 10 + 35 + 60 + 70 + 50 = 290$ .

Проверим полученный план  $X^1$  на оптимальность, для чего снова применим метод потенциалов (как и ранее, положим в системе  $u_1 = 0$ ):

$X^1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 - <b>65</b>	3	2	1 + <b>10</b>	$u_1 = 0$
$A_2$	4 + <b>35</b>	5 - <b>60</b>	7	3	$u_2 = 0$
$A_3$	3	1 +	3 <b>70</b>	5 - <b>50</b>	$u_3 = 4$
$v_j$	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = -1$	$v_4 = 1$	

Найдем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$$

$$\Delta_{13} = 0 - 1 - 2 = -3,$$

$$\Delta_{23} = 0 - 1 - 7 = -8,$$

$$\Delta_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$$

$$\Delta_{31} = 4 + 4 - 3 = 5,$$

$$\Delta_{32} = 4 + 5 - 1 = 8. \text{ (max)}$$

Поскольку среди оценок имеются положительные, то план  $X^1$  также не является оптимальным. Построим цикл пересчета для клетки (3;2) (см. последнюю таблицу) и переместим в пределах цикла из «отрицательных» в «положительные» клетки  $\min(65; 60; 50) = 50$  единиц продукции. В результате получим опорный план  $X^2$ , для которого общая стоимость перевозок составит  $f(X^2) = 15 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 85 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 1 + 70 \cdot 3 = 770$  денежных единиц.

Для нового плана находим потенциалы (будем их записывать сразу в таблицу) и вычисляем оценки свободных клеток:

$X^2$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 - <b>15</b>	3	2 +	1 <b>60</b>	0
$A_2$	4 + <b>85</b>	5 - <b>10</b>	7	3	0
$A_3$	3	1 + <b>50</b>	3 - <b>70</b>	5	-4
$v_j$	4	5	7	1	

$$\Delta_{12} = 0 + 5 - 3 = 2,$$

$$\Delta_{13} = 0 + 7 - 2 = 5, \text{ (max)}$$

$$\Delta_{23} = 0 + 7 - 7 = 0,$$

$$\Delta_{24} = 0 + 1 - 3 = -2,$$

$$\Delta_{31} = -4 + 4 - 3 = -3,$$

$$\Delta_{34} = -4 + 1 - 5 = -8.$$

Контроль:  $15 + 60 + 85 + 10 + 70 + 50 = 290$ .

Поскольку план  $X^2$  не является оптимальным, то составляем новый цикл, отталкиваясь от ячейки (1;3). В результате получим опорный план  $X^3$ , для которого  $f(X^3) = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 60 \cdot 3 = 720$ . Этот план снова проверяем на оптимальность.

$X^3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4 - <b>5</b>	3	2 + <b>10</b>	1 <b>60</b>	0
$A_2$	4 <b>95</b>	5	7	3	0
$A_3$	3 +	1 <b>60</b>	3 - <b>60</b>	5	1
$v_j$	4	0	2	1	

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= 0 + 0 - 3 = -3, \\ \Delta_{22} &= 0 + 0 - 5 = -5, \\ \Delta_{23} &= 0 + 2 - 7 = -5, \\ \Delta_{24} &= 0 + 1 - 3 = -2, \\ \Delta_{31} &= 1 + 4 - 3 = 2, \quad (\max) \\ \Delta_{34} &= 1 + 1 - 5 = -3. \end{aligned}$$

Контроль:  $5 + 10 + 60 + 95 + 60 + 60 = 290$ .

Видим, что план  $X^3$  также не оптимален, поэтому перейдем к новому опорному плану  $X^4$ :

$X^4$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$u_i$
$A_1$	4	3	2 <b>15</b>	1 <b>60</b>	0
$A_2$	4 <b>95</b>	5	7	3	2
$A_3$	3 <b>5</b>	1 <b>60</b>	3 <b>55</b>	5	1
$v_j$	2	0	2	1	

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 0 + 2 - 4 = -2, \\ \Delta_{12} &= 0 + 0 - 3 = -3, \\ \Delta_{22} &= 2 + 0 - 5 = -3, \\ \Delta_{23} &= 2 + 2 - 7 = -3, \\ \Delta_{24} &= 2 + 1 - 3 = 0, \\ \Delta_{34} &= 1 + 1 - 5 = -3. \end{aligned}$$

Контроль:  $15 + 60 + 95 + 5 + 60 + 55 = 290$ .

Поскольку все  $\Delta_{ij} \leq 0$ , то план  $X^* = X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}$  оптимален и

обеспечивает минимум стоимости всех перевозок:

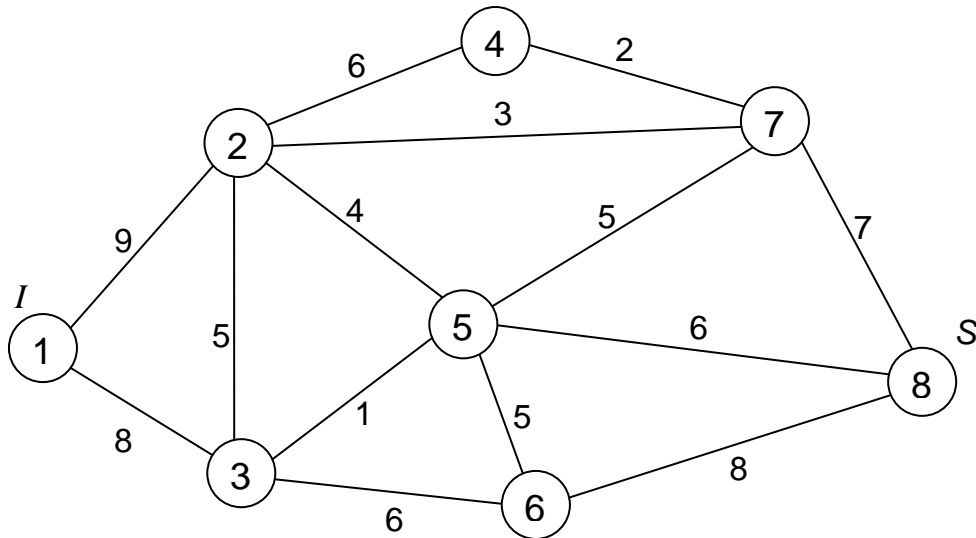
$$f_{\min} = f(X^*) = 15 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 95 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 60 \cdot 1 + 55 \cdot 3 = 710 \text{ денежных единиц.}$$

По этому плану следует перевезти от  $A_1$  к  $B_3$  15 единиц продукции, от  $A_1$  к  $B_4$  – 60 единиц, от  $A_2$  к  $B_1$  – 95 единиц, от  $A_3$  к  $B_1$  – 5 единиц, от  $A_3$  к  $B_2$  – 60 единиц и от  $A_3$  к  $B_3$  – 55 единиц.

**Ответ:**  $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 60 \\ 95 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 55 & 0 \end{bmatrix}; f_{\min} = f(X^*) = 710.$



**№4.** Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер (одинаковы в обоих направлениях). Сформировать на сети поток максимальной мощности, направленный из истока  $I$  в сток  $S$ . Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



**Решение.**

Вершина 1 ( $I$ ) является *истоком*, а вершина 8 ( $S$ ) – *стоком* данной сети. Максимальное количество  $r_{ij}$  вещества (груза, информации и т.п.), которое может пропустить за единицу времени ребро  $(i; j)$ , называется его *пропускной способностью*. По условию задачи  $r_{ij} = r_{ji}$ , например,  $r_{13} = r_{31} = 8$ ,  $r_{35} = r_{53} = 1$  и т.д. При этом полагают все  $r_{ii} = 0$ .

Пропускные способности сети запишем в квадратной матрице  $R$  8-го порядка (порядок равен количеству вершин). Для наглядности клетки с нулевыми пропускными способностями оставим пустыми.

$R$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		9	8					
2	9		5	6	4		3	
3	8	5			1	6		
4		6					2	
5		4	1			5	5	6
6			6		5			8
7		3		2	5			7
8					6	8	7	

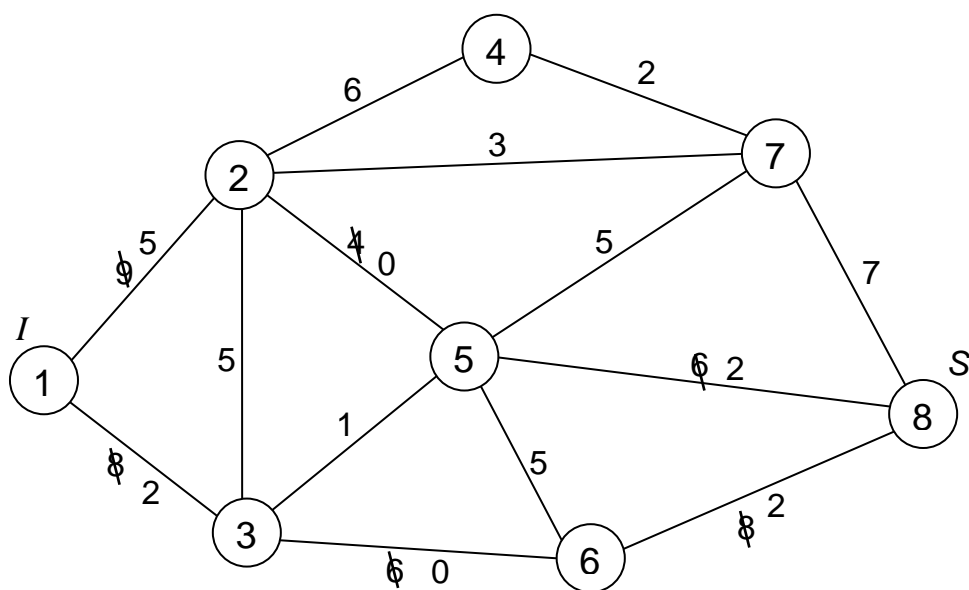
Количество  $x_{ij}$  вещества, проходящего через ребро  $(i; j)$  в единицу времени, называется *потоком по ребру  $(i; j)$* . Считается, что  $x_{ij} = -x_{ji}$ . Совокупность  $X = \{x_{ij}\}$  потоков по всем ребрам сети называют *потоком по сети*, а функция  $f = \sum_j x_{Ij} = \sum_i x_{iS}$  (общее количество вещества, вытекающее из истока, и общее количество, втекающее в сток) называется *мощностью потока на сети*. Ребро  $(i; j)$  называется *ненасыщенным*, если  $x_{ij} < r_{ij}$ , и *насыщенным*, если  $x_{ij} = r_{ij}$ .

Сформируем на сети начальный поток  $X^0$ . Будем составлять пути из  $I$  в  $S$  по ненасыщенным ребрам. При этом будем следить, чтобы потоки формировались в одном направлении.

Рассмотрим путь  $1 - 3 - 6 - 8$ . Так как  $\min(8; 6; 8) = 6$ , то по этому пути пропустим 6 ед. вещества. Ребро  $(3; 6)$  станет насыщенным.

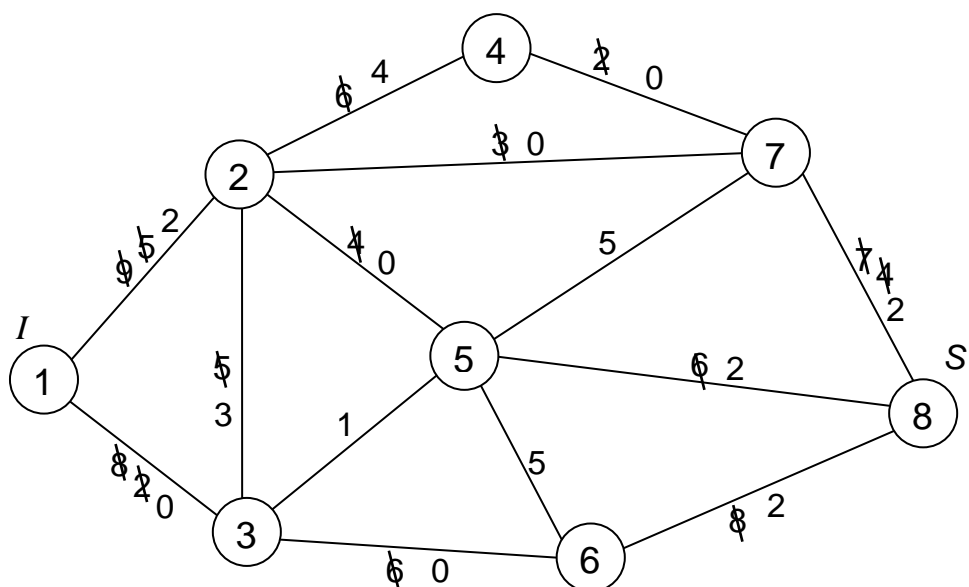
Для пути  $1 - 2 - 5 - 8$   $\min(9; 4; 6) = 4$ , поэтому пропустим по данному пути 4 ед. вещества. Ребро  $(2; 5)$  – насыщенное.

Будем отмечать резервы пропускных способностей ребер на сети, перечеркивая «старые» значения пропускных способностей:



Далее пропустим по пути  $1 - 2 - 7 - 8$   $\min(5; 3; 7) = 3$  ед. вещества, а по пути  $1 - 3 - 2 - 4 - 7 - 8$   $\min(2; 5; 6; 2; 4) = 2$  ед. При этом ребра  $(2; 7)$  и  $(1; 3)$  станут насыщенными.

Отообразим изменения на сети.



Пути, которые формируют начальный поток  $X^0$ , можно находить до тех пор, пока существует проход по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Получаем следующий начальный поток  $X^0$  (в скобках будем указывать количество вещества, пропускаемого по данному пути):

1 – 3 – 6 – 8 (6)

1 – 2 – 5 – 8 (4)

1 – 2 – 7 – 8 (3)

1 – 3 – 2 – 4 – 7 – 8 (2)

Найдем мощность потока  $X^0$ :  $f(X^0) = 6 + 4 + 3 + 2 = 15$  ед.

Запишем поток  $X^0$  в виде матрицы:

$X^0$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		7	8					
2	-7		-2	2	4		3	
3	-8	2				6		
4		-2					2	
5		-4						4
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-4	-6	-5	

Например, через ребро (1;3) проходит  $6 + 2 = 8$  единиц. Значит, в клетку (1;3) матрицы  $X^0$  записываем  $x_{13} = 8$ , а в клетку (3;1) –  $x_{31} = -8$ . Через ребро (5;8) проходит 4 единицы, поэтому в клетку (5;8) записываем  $x_{58} = 4$ , а в клетку (8;5) –  $x_{85} = -4$ . И т.д.

Составляем матрицу  $R - X^0$ , элементы которой  $r_{ij} - x_{ij}$  позволяют судить о насыщенности ребер сети:

$$r_{ij} - x_{ij} = \begin{cases} = 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ насыщено,} \\ \neq 0, & \text{если ребро } (i, j) \text{ ненасыщено.} \end{cases}$$

$R - X^0$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2						
2	16		7	4				
3	16	3			1			
4		8						
5		8	1			5	5	2
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					10	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток. Для этого просматриваем 1-ю строку матрицы  $R - X^0$ . Из вершины 1 по ненасыщенному ребру можно попасть только в вершину 2. Из вершины 2 – в вершины 1 (которую мы игнорируем, так как она уже рассматривалась), 3 и 4. Из вершины 3 можно попасть лишь в вершину

5, а из нее – в вершину 8. В итоге получаем следующий список вершин, достижимых из истока по путям, состоящим из ненасыщенных ребер:

1:2

2:3,4

3:5

5:8

Так как сток находится в этом списке, то начальный поток не является максимальным и его можно улучшить.

Получили путь  $1 \overset{2}{-} 2 \overset{7}{-} 3 \overset{1}{-} 5 \overset{2}{-} 8$ . Находим величину  $\Delta = \min(2; 7; 1; 2) = 1$ , на которую нужно увеличить поток по ребрам (1;2), (2;3), (3;5) и (5;8), чтобы получить более мощный поток.

В результате получим поток  $X^1$ , мощность которого равна  $f(X^1) = f(X^0) + \Delta = 15 + 1 = 16$ .

$X^1$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		8	8					
2	-8		-1	2	4		3	
3	-8	1			1	6		
4		-2					2	
5		-4	-1					5
6			-6					6
7		-3		-2				5
8					-5	-6	-5	

Проверим этот поток на максимальность, для чего найдем матрицу  $R - X^1$ :

$R - X^1$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1						
2	17		6	4				
3	16	4						
4		8						
5		8	2			5	5	1
6			12		5			2
7		6		4	5			2
8					11	14	12	

Рассмотрим возможность пройти по ненасыщенным ребрам из истока в сток:

1:2

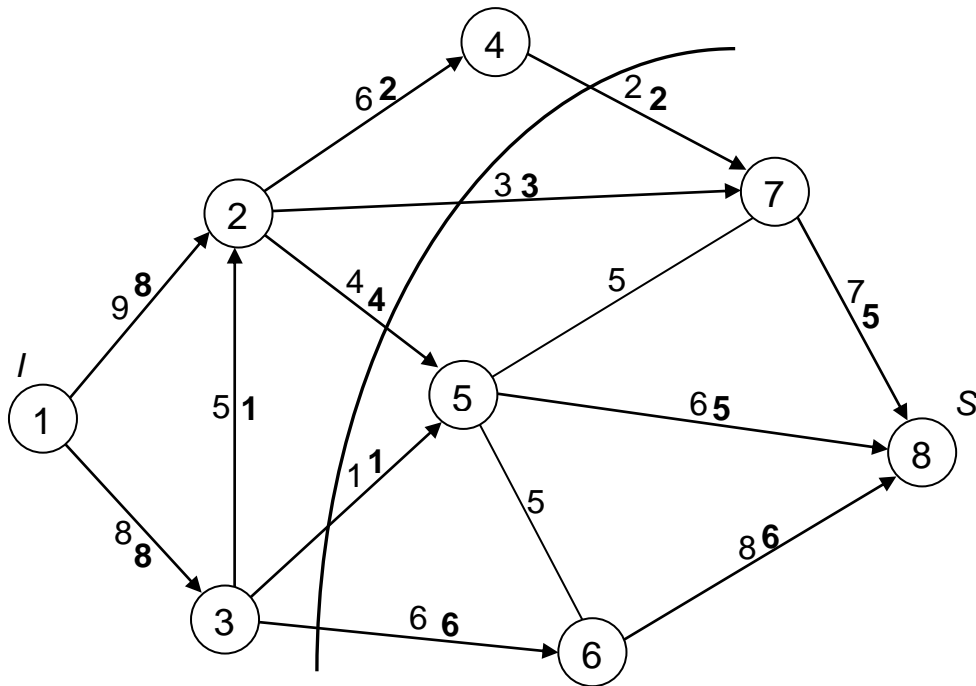
2:3,4

3:×

4:×

Такого пути нет, поэтому поток  $X^* = X^1$  – максимальный и его мощность равна  $f_{\max} = f(X^*) = 16$ .

Нанесем этот поток на сеть с указанием величин (выделим полужирным) и направления потоков по отдельным ребрам:



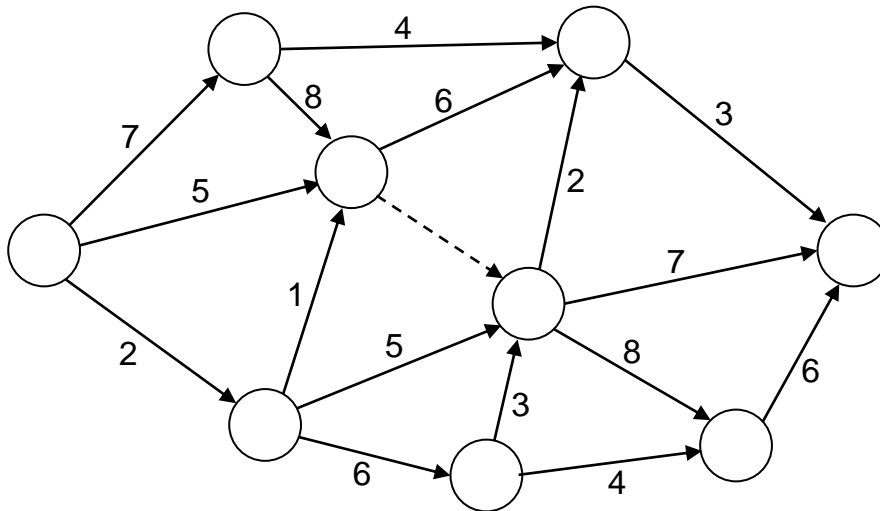
Проверим правильность построенного максимального потока с помощью теоремы Форда-Фалкерсона, согласно которой максимальная величина потока из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего исток от стока.

Ребра (4;7), (2;7), (2;5), (3;5), (3;6), очевидно, образуют искомый разрез, так как пропускная способность ребер разреза равна  $r_{47} + r_{27} + r_{25} + r_{35} + r_{36} = 2 + 3 + 4 + 1 + 6 = 16$  ед., что совпадает с максимальной мощностью на сети. Значит, максимальный поток построен верно.

**Ответ:**  $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -6 & -5 & 0 \end{bmatrix}; f_{\max} = f(X^*) = 16.$

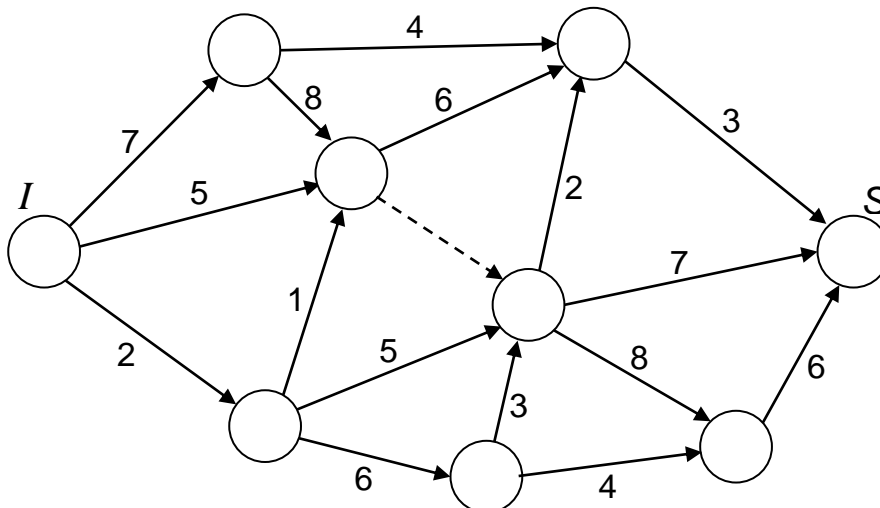
**№5.** Для данного сетевого графика комплекса работ определить:

1. исходное событие  $I$  и завершающее событие  $S$ ;
2. номера вершин в натуральном порядке;
3. ранние сроки свершения событий;
4. поздние сроки свершения событий;
5. резервы времени событий;
6. время выполнения комплекса и критический путь.

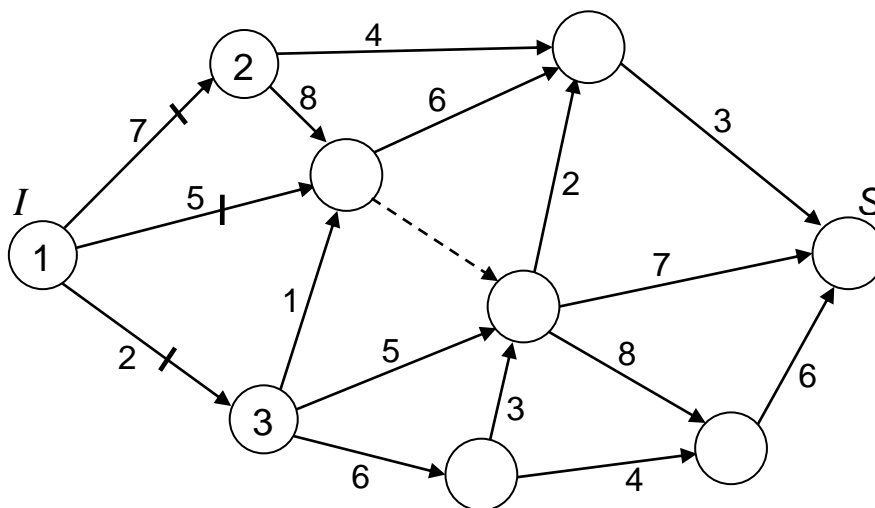


**Решение.**

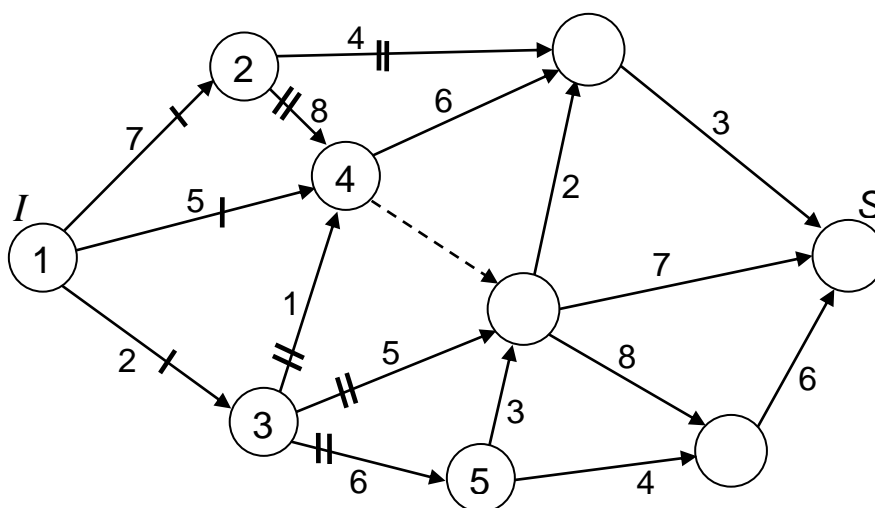
1. *Исходным событием  $I$*  является первое слева событие как не имеющее предшествующих вершин, а *завершающим событием  $S$*  является последнее правое как не имеющее последующих вершин:



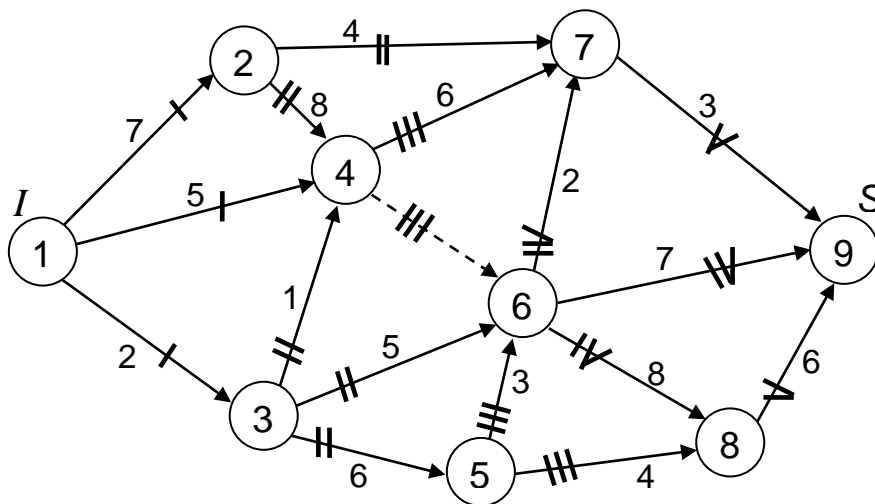
2. Нумерация вершин начинается с присвоения номера 1 исходному событию  $I$ . На первом шаге зачеркнем все работы, начинающиеся в этой вершине (одной чертой) и будем считать, что они выполнены. Продолжим нумерацию тех вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ. Это будут вершины 2 и 3. Назовем их *вершинами первого уровня*:



На втором шаге зачеркнем двумя чертами работы, начинающиеся в вершинах первого уровня, и аналогично продолжим нумерацию вершин, которые после этого не имеют предшествующих работ (опять же считая выполненными все вычеркнутые работы). Это будут вершины 4 и 5 – вершины второго уровня:

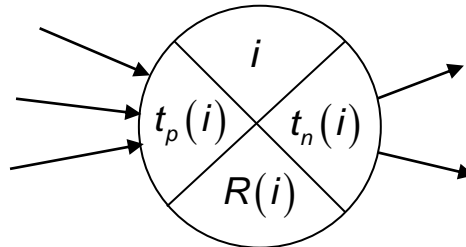


Продолжая аналогично, получим нумерацию вершин в натуральном порядке. Номер вершины начала любой из работ меньше номера вершины ее окончания.



Из 4 вершины в 6 вершину идет пунктирная линия. Это означает, что шестая работа наступает после четвертой с нулевой затратой времени.

3. Для дальнейшей работы с графом каждую вершину разобьем на четыре части. В верхней части указывается номер события  $i$ , в правой – ранний срок  $t_p(i)$  свершения события  $i$ , в левой – поздний срок  $t_n(i)$  свершения события  $i$ , в нижней – резерв  $R(i)$  времени этого события.



Сначала рассчитываются ранние сроки свершения событий (для события  $I$  его полагают равным 0). Для остальных событий (в порядке возрастания номеров) эти сроки подсчитываются по формуле

$$t_p(j) = \max_{(i;j) \in U_j^+} [t_p(i) + t(i;j)],$$

где  $U_j^+$  – множество работ, входящих в  $j$ -е событие;  $t_p(i)$  – ранний срок наступления начального события работы  $(i;j)$  с продолжительностью  $t(i;j)$ .

Ранний срок  $t_p(i)$  свершения события  $i$  – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

В нашем случае будем иметь:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 0 + 7 = 7;$$

$$t_p(3) = t_p(1) + t(1;3) = 0 + 2 = 2;$$

$$\begin{aligned} t_p(4) &= \max(t_p(2) + t(2;4); t_p(1) + t(1;4); t_p(3) + t(3;4)) = \\ &= \max(7 + 8; 0 + 5; 3 + 1) = \max(15; 5; 4) = 15; \end{aligned}$$

$$t_p(5) = t_p(3) + t(3;5) = 3 + 6 = 9;$$

$$\begin{aligned} t_p(6) &= \max(t_p(4) + t(4;6); t_p(3) + t(3;6); t_p(5) + t(5;6)) = \\ &= \max(15 + 0; 3 + 5; 9 + 3) = \max(15; 8; 12) = 15; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_p(7) &= \max(t_p(2) + t(2;7); t_p(4) + t(4;7); t_p(6) + t(6;7)) = \\ &= \max(7 + 4; 15 + 6; 15 + 2) = \max(11; 21; 17) = 21; \end{aligned}$$

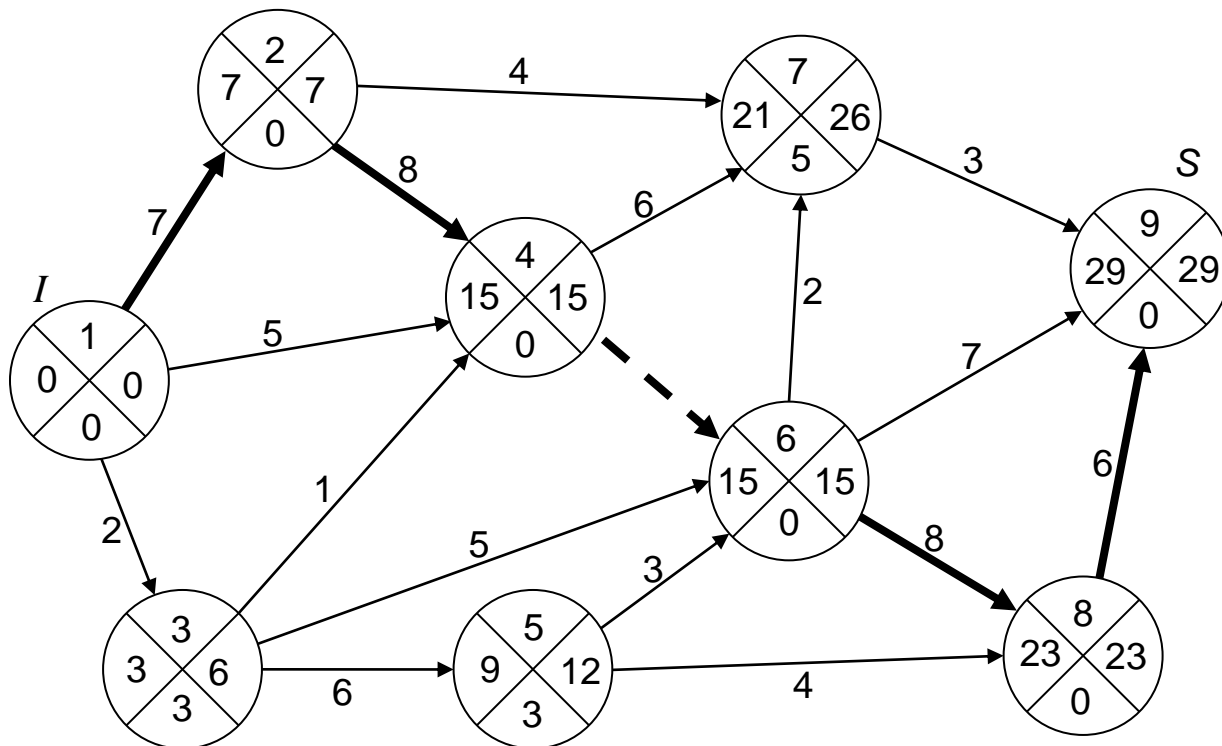
$$t_p(8) = \max(t_p(6) + t(6;8); t_p(5) + t(5;8)) = \max(15 + 8; 9 + 4) = \max(23; 11) = 23;$$



$$t_p(9) = \max(t_p(7) + t(7;9); t_p(6) + t(6;9); t_p(8) + t(8;9)) = \\ = \max(21 + 3; 15 + 7; 23 + 6) = \max(24; 22; 29) = 29.$$

В итоге получено число  $t_{крит} = 29$  – минимальное время, за которое можно выполнить весь комплекс работ.

4. Найдем поздние сроки свершения событий.



Считается, что поздний срок свершения завершающего события равен критическому сроку:  $t_n(9) = t_p(9) = t_{крит} = 29$ . Затем, в порядке убывания вершин, поздние сроки свершения событий находим по формуле:

$$t_n(i) = \min_{(i;j) \in U_i^-} [t_n(j) - t(i;j)],$$

где  $U_i^-$  – множество работ, выходящих из  $i$ -го события, а  $t_n(j)$  – поздний срок свершения конечного события работы  $(i; j)$ .

Поздний срок  $t_n(i)$  наступления  $i$ -го события – это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

В нашем случае будем иметь:

$$t_n(8) = t_n(9) - t(8;9) = 29 - 6 = 23;$$

$$t_n(7) = t_n(9) - t(7;9) = 29 - 3 = 26;$$

$$t_n(6) = \min(t_n(7) - t(6;7); t_n(9) - t(6;9); t_n(8) - t(6;8)) = \\ = \min(26 - 2; 29 - 7; 23 - 8) = \min(24; 22; 15) = 15;$$

$$t_n(5) = \min(t_n(6) - t(5;6); t_n(8) - t(5;8)) = \min(15 - 3; 23 - 8) = \min(12; 15) = 12;$$

$$t_n(4) = \min(t_n(7) - t(4;7); t_n(6) - t(4;6)) = \min(26 - 6; 15 - 0) = \min(20; 15) = 15;$$

$$t_n(3) = \min(t_n(4) - t(3;4); t_n(6) - t(3;6); t_n(5) - t(3;5)) = \\ = \min(15 - 1; 15 - 5; 12 - 6) = \min(14; 10; 6) = 6;$$

$$t_n(2) = \min(t_n(7) - t(2;7); t_n(4) - t(2;4)) = \min(26 - 4; 15 - 8) = \min(22; 7) = 7;$$

$$t_n(1) = \min(t_n(2) - t(1;2); t_n(4) - t(1;4); t_n(3) - t(1;3)) = \\ = \min(7 - 7; 15 - 5; 6 - 2) = \min(0; 10; 4) = 0.$$

**5.** Резервы времени событий найдем по формуле

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

и внесем их в нижние четверти вершин:

$$R(1) = 0 - 0 = 0; \quad R(2) = 7 - 7 = 0; \quad R(3) = 6 - 3 = 3;$$

$$R(4) = 15 - 15 = 0; \quad R(5) = 12 - 9 = 3; \quad R(6) = 15 - 15 = 0;$$

$$R(7) = 26 - 21 = 5; \quad R(8) = 23 - 23 = 0; \quad R(9) = 29 - 29 = 0.$$

**6.** Ранее было найдено время выполнения комплекса:  $t_{крит} = 29$ .

Для работ критического пути все резервы времени равны 0, поэтому критическим является путь  $L_{крит} : 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9$  (выделен на графе).

**Ответ:**  $L_{крит} : 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9$ ;  $t_{крит} = 29$ .

## Литература

1. Кузнецов, А. В. Высшая математика: Мат. программир.: Учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под. общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : Выш. шк., 1994. – 286 с.
2. Годунов, Б. А. Математическое программирование. Задания, методические указания / Б. А. Годунов, С. Т. Гусева, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003 – 56 с.
3. Тузик, Т. А. Математическое программирование. Методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Т. А. Тузик, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2003 – 48 с.
4. Кузьмина, Е. В. Практикум по высшей математике для студентов технических специальностей / Е. В. Кузьмина, Л. Т. Мороз. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2007. – Ч. 6 : Элементы математического программирования. – 48 с.
5. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов экономических специальностей / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2000 – 91 с.
6. Гусева, С. Т. Экономико-математические методы и модели : практикум по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов экономических специальностей / С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, Г. В. Шамовская. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2005 – 92 с.
7. Гладкий, И. И. Эконометрика и экономико-математические методы и модели: методические рекомендации и задания к контрольной работе для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / И. И. Гладкий, С. Т. Гусева, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, Т. Ю. Юхимук. – Брест: Брест. гос. техн. ун-т, 2011 – 32 с.
8. Махнист, Л. П. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : практикум для студентов экономических специальностей / Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, И. И. Гладкий, Г. В. Шамовская. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2016 – 84 с.

## Содержание

Практические задания.....	3
Решение типового варианта.....	20
Литература.....	43

Учебное издание

**Составители:**

*Юхимук Татьяна Юрьевна,  
Юхимук Михаил Михайлович,  
Махнист Леонид Петрович,  
Черненко Виктор Петрович,  
Сукасян Татьяна Михайловна*

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Методические рекомендации и варианты заданий для студентов  
экономических специальностей

Ответственный за выпуск: Юхимук М.М.  
Редактор: Боровикова Е.А.  
Компьютерная верстка: Юхимук Т.Ю.  
Корректор: Юхимук М.М.

---

Подписано в печать 26.12.2019 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага «Performer».  
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л 2,75. Заказ № 1711. Тираж 24 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.