УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Сахвон М.Н.
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y$, где A – ограниченный положительный самосопряжённый оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива, и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения $Ax = y$, используя неявный метод итераций

$$(E+\alpha A)x_{n+1} = (E-\alpha A)x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0, \tag{1}$$

которая при приближённой правой части уравнения $Ax = y$: y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет вид

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Справедлива

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии*

$$\alpha > 0 \tag{3}$$

сходится.

Доказательство. По индукции легко проверить, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^n (E+\alpha A)^{-n}\right] y.$$

Поэтому имеем

$$x - x_n = A^{-1}(E-\alpha A)^n (E+\alpha A)^{-n} y = \int_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y =$$

$$= \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y.$$

При $\alpha > 0$ и $\lambda \in (0, M\,]$, где $M = \|A\|$, имеет место неравенство $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| < 1$, и, следовательно, последний интеграл очевидным образом стремится к нулю по норме:

$$\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n \left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n \|x\| \to 0,\ n \to \infty.$$

(Здесь $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| \le q < 1, \lambda \in [\varepsilon, M\,]$).

$$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, при условии (4) $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, т.е. процесс (2) сходится при точной правой части y уравнения $Ax = y$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим сходимость метода (3) при приближённой правой части y_δ. Имеет место

Теорема 2. *Если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, *то при условии* (4) *итерационный процесс* (3) *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в теореме 1 $x - x_n \to 0, n \to \infty$. Покажем, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимися к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A, получим $x_n - x_{n,\delta} = \quad = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right] dE_\lambda (y - y_\delta)$.

Оценим сверху положительную подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right]$ при условии (4). Покажем по индукции, что

$$g_n(\lambda) \le 2n\alpha. \tag{5}$$

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha\lambda} \le 2\alpha$. Предположим, что (5) истинно при $n = k$, т.е. $g_k(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\right] \le 2k\alpha$ и рассмотрим $n = k + 1$. Имеем

$$g_{k+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1=\alpha\lambda}\right)^k\right] + \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^{k+1}\right] - \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\right] \le$$

$$\le 2k\alpha + \lambda^{-1}\left[\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^{k+1}\right] = 2k\alpha + \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k \frac{2\alpha}{1+\alpha\lambda} \le 2(k+1)\alpha.$$

Следовательно, оценка (5) справедлива для любого $n \in N$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta$ и $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$, то для сходимости процесса (3) достаточно выбрать n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Теорема 2 доказана.

УДК 517.948

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Стаин Т.С., Тузик А.С.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: В.М. Мадорский, к.физ.-мат.н., доцент

Решается нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \to R^n), f \in C_D^2 \tag{1}$$

для решения которого предлагаются следующие квазиньютоновские нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы.

Метод 1.

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), n = 0,1,2 \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{2}$$

Шаг 2: Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \tag{3}$$