УДК 624.04(75.8)

Бекиш Е. О., Крук А. В.

Научный руководитель: к. т. н., доцент Игнатюк В. И.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ АРОК, ЗАГРУЖЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Деформированный вид арок будет определен, если будут известны перемещения точек осей арок. Для определения перемещений воспользуемся формулой Мора [1]:

$$\Delta_{iP} = \sum\int \frac{\bar{M}_i M_P\, ds}{EJ} + \sum\int \eta \frac{\bar{Q}_i\, Q_P\, ds}{GA} + \sum\int \frac{\bar{N}_i\, N_P\, ds}{EA}. \qquad (1)$$

Подставив в эту формулу зависимости изменения грузовых (от действия внешних нагрузок) и единичных (от действия единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения) эпюр усилий и выполнив интегрирование по участкам непрерывности эпюр и суммирование по этим участкам, получим искомое перемещение. В выражение для определения перемещений (1) входит три слагаемых, учитывающих соответственно действие трех видов, возникающих в системе внутренних сил M, Q и N и соответственно изгибных, сдвиговых и продольных деформаций. Вычисляя эти слагаемые отдельно, можно выявить влияние изгибных, сдвиговых и продольных деформаций на величины перемещений точек системы.

Для определения вертикальных перемещений сечений приложим к произвольной точке на оси сечения вертикальную единичную силу (рисунок 1) и от ее действия найдем опорные реакции и зависимости изменения внутренних сил.

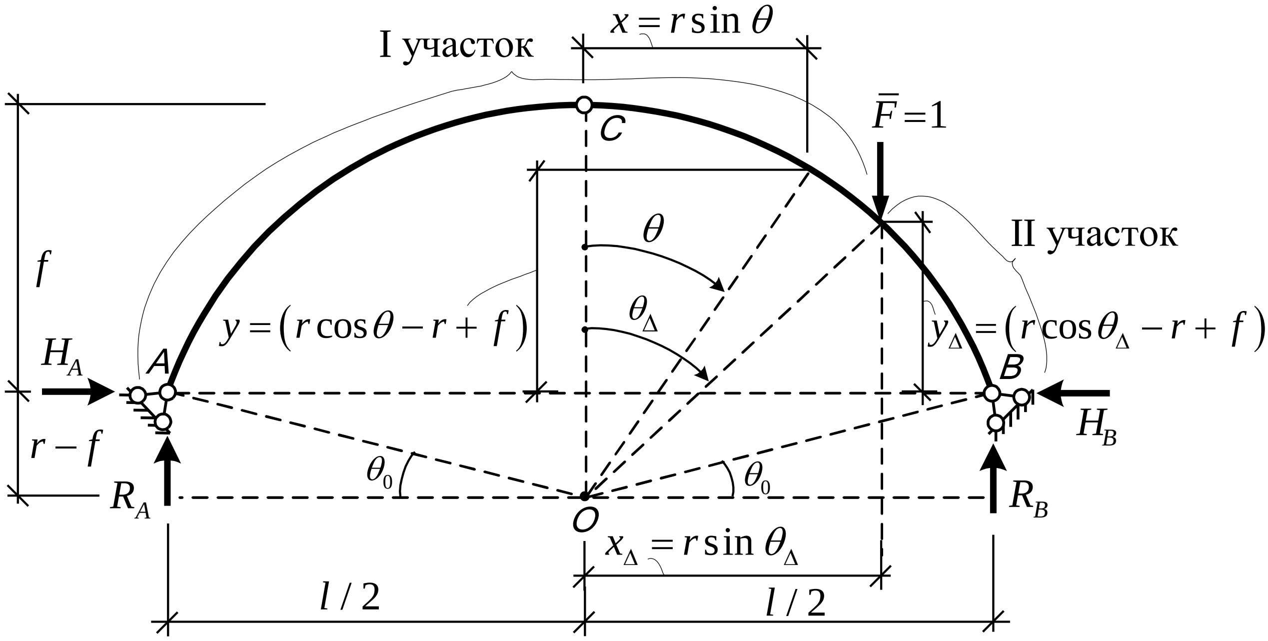

Рисунок 1 – Приложение единичной силы для определения вертикальных перемещений

Опорные реакции найдем из уравнений равновесия арки в целом и ее полуарок:

$$R_A = \frac{1}{2} - \frac{r}{l}\sin\,\theta_\Delta. \qquad R_B = \frac{1}{2} + \frac{r}{l}\sin\,\theta_\Delta. \qquad H_A = H_B = \frac{l}{4f}\left(1 - \frac{2r}{l}\sin\theta_\Delta\right).$$

Изгибающий момент, продольная и поперечная силы в сечениях арки от действия единичной вертикальной силы определяются выражениями:

а) на участке от опоры *A* до точки приложения силы (участок I) (рисунок 1):

$$\bar{M}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} = R_A\left(\frac{l}{2} + x\right) - H_A \cdot y = R_A\left(\frac{l}{2} + r\sin\theta\right) - H_A\left(r\cos\theta - r + f\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\left(\frac{l}{2} - r\cos\theta\right) - \frac{l}{2f}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right) r\left(\sin\theta - 1 + \frac{f}{r}\right) =$$

$$= \left\{ r\left[\frac{l}{4f} + \left(1 - \frac{r}{2f}\right)\cos\theta_\Delta\right]\right\} + \left[-r\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\right]\cos\theta + \left[\frac{r}{f}\left(\frac{r}{2}\cos\theta_\Delta - \frac{l}{4}\right)\right]\sin\theta;$$

$$\bar{Q}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} = R_A\sin\theta - H_A\cos\theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\sin\theta - \frac{l}{4f}\left(1 - \frac{2r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\cos\theta; \quad (2)$$

$$\bar{N}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} = -H_A\sin\theta - R_A\cos\theta = -\frac{l}{4f}\left(1 - \frac{2r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\sin\theta - \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\cos\theta;$$

б) на участке от точки приложения силы до опоры *B* (участок II) (рисунок 1):

$$\bar{M}_{\Delta в\,(\mathrm{II})} = \bar{M}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} - 1\cdot\left(x - x_\Delta\right) = \bar{M}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} - r\left(\cos\theta_\Delta - \cos\theta\right) = \bar{M}_{\Delta в(\mathrm{I})} - r\left(\cos\theta_\Delta - \cos\theta\right) =$$

$$= \left[\frac{r}{2f}\left(\frac{l}{2} - r\cos\theta_\Delta\right)\right] + \left[r\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\right]\cos\theta + C_{\Delta 3}\sin\theta;$$

$$\bar{Q}_{\Delta в\,(\mathrm{II})} = \bar{Q}_{\Delta в\,(\mathrm{I})} - 1\cdot\cos\theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\sin\theta - \frac{l}{4f}\left(\frac{4f}{l} + 1 - \frac{2r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\cos\theta; \quad (3)$$

$$\bar{N}_{\Delta в\,(\mathrm{II})} = -R_A\cos\theta - H_A\sin\theta + 1\cdot\cos\theta = -\frac{l}{4f}\left(1 - \frac{2r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\sin\theta + \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{l}\cos\theta_\Delta\right)\cos\theta.$$

Полученные зависимости изменения усилий от единичной силы (1)–(3) и зависимости внутренних сил от действия внешней нагрузки, которые определены в работе [2], подставляем в формулу Мора (1) и, выполняя интегрирование выражений, можем получить вертикальные перемещения любой точки системы.

Для определения горизонтальных перемещений сечений с использованием формулы Мора (1) приложим к точке на оси сечения горизонтальную единичную силу (рисунок 2), от ее действия найдем зависимости изменения усилий.

Опорные реакции найдем из уравнения равновесия арки в целом и ее полуарок:

$$R_A = R_B = \frac{r}{l}\left(\cos\theta_\Delta - 1 + \frac{f}{r}\right);\; H_B = \frac{r}{2f}\left(1+\frac{f}{r} - \cos\theta_\Delta\right);\quad H_A = \frac{r}{2f}\left(\cos\theta_\Delta - 1 + \frac{f}{r}\right).$$

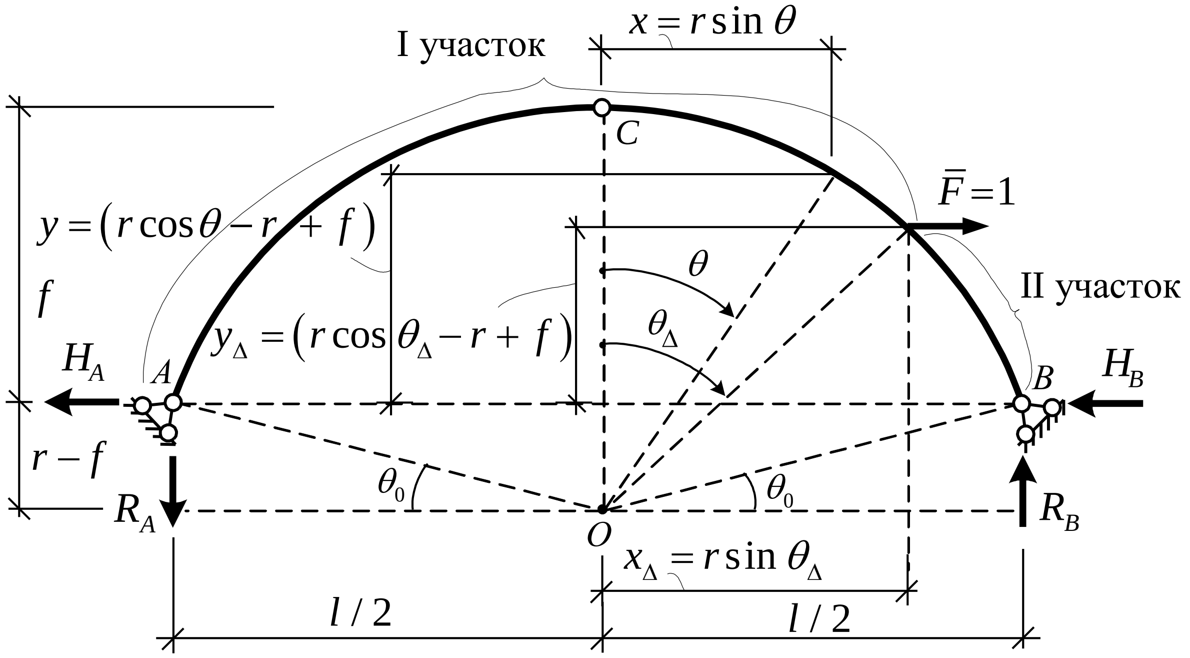

Рисунок 2 – Приложение единичной силы для определения горизонтальных перемещений

Изгибающий момент, продольная и поперечная силы в сечениях арки определяются выражениями:

а) на участке от опоры A до точки приложения силы (участок I) (рисунок 2):

$$\bar{M}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} = R_A y - H_A x = \frac{y_\Delta}{l}\left(r\cos\theta - r + f\right) + \frac{y_\Delta}{2f} r\sin\theta =$$

$$= \frac{r^2}{2f}\left[\left(1 - \frac{2f}{r}\right)\sin\theta_\Delta - 1 + \frac{f}{r}\right] + r\left[\frac{r}{2f}\left(1-\sin\theta_\Delta\right) + \frac{1}{2}\right]\sin\theta + r\left[\frac{r}{l}\left(\cos\theta_\Delta - 1\right) + \frac{f}{l}\right]\cos\theta;$$

$$\bar{Q}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} = -R_A\cos\theta - H_A\sin\theta = -\frac{y_\Delta}{2f}\sin\theta - \frac{y_\Delta}{l}\cos\theta. \qquad (4)$$

$$\bar{N}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} = -R_A\sin\theta + H_A\cos\theta = -\frac{y_\Delta}{l}\sin\theta + \frac{y_\Delta}{2f}\cos\theta,$$

б) на участке от точки приложения силы до опоры B (участок II) (рисунок 2):

$$\bar{M}_{\Delta г\,(\mathrm{II})} = \bar{M}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} - 1\cdot\left(y - y_\Delta\right) = \bar{M}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} - r\left(\sin\theta - \sin\theta_\Delta\right) =$$

$$= \frac{r^2}{2f}\left[\sin\theta_\Delta - 1 + \frac{f}{r}\right] + r\left[\frac{r}{2f}\left(1-\sin\theta_\Delta\right) - \frac{1}{2}\right]\sin\theta + r\left[\frac{r}{l}\left(\cos\theta_\Delta - 1\right) + \frac{f}{l}\right]\cos\theta;$$

$$\bar{Q}_{\Delta г\,(\mathrm{II})} = \bar{Q}_{\Delta г\,(\mathrm{I})} - 1\cdot\cos\theta = \frac{r}{l}\left(1 - \sin\theta_\Delta - \frac{f}{r}\right)\sin\theta + \frac{r}{2f}\left(1 - \frac{f}{r} - \sin\theta_\Delta\right)\cos\theta; \qquad (5)$$

$$\bar{N}_{\Delta г\,(\mathrm{II})}=R_A\cos\theta+H_A\sin\theta-1\cdot\sin\theta=\frac{r}{l}\left(1-\sin\theta_\Delta-\frac{f}{r}\right)\cos\theta+\frac{r}{2f}\left(1-\frac{f}{r}-\sin\theta_\Delta\right)\sin\theta.$$

Полученные зависимости изменения усилий от единичной силы и зависимости внутренних сил от действия внешней нагрузки, определенные в работе [2], подставляем в формулу Мора (1) и, выполняя интегрирование выражений, можем получить горизонтальные перемещения любой точки системы.

Полные перемещения точек определяются по формуле:

$$\Delta=\sqrt{\left(\Delta^{верт}\right)^2+\left(\Delta^{гор}\right)^2}\,. \tag{6}$$

На основе полученных зависимостей для арки, представленной на рисунке 3 (ввиду симметричности системы показываем ее половину) и выполненной из стального двутавра № 50, выполним расчет перемещений сечений с шагом $\Delta\theta=10^0$, результаты которого представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Перемещения узловых точек арки, м

№ узла / Перемещение	1	2	3	4	5	6	7
по горизонтали	0	-0,0274	-0,0381	-0,0314	-0,0172	-0,0046	0,0
по вертикали	0	0,0192	0,0296	0,0204	-0,0108	-0,0572	-0,1092
полное		0,0330	0,0482	0,0374	0,0203	0,0579	0,1092

№ узла / Перемещение	8	9	10	11	12	13
по горизонтали	-0,0046	-0,0172	-0,0314	-0,0381	-0,0274	0
по вертикали	-0,0572	-0,0108	0,0204	0,0296	0,0192	0
полное	0,0579	0,0203	0,0374	0,0482	0,0330	0

На основании полученных результатов строим в выбранном масштабе деформированный вид арки, представленный на рисунке 4.

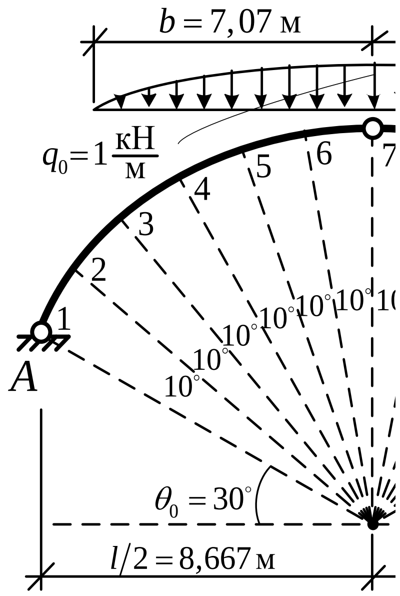

Рисунок 3 – Расчетная схема арки

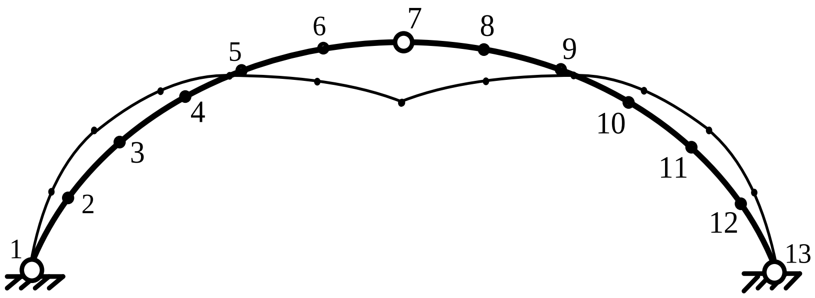

Рисунок 4 – Деформированный вид арки (в масштабе перемещений 7:1)

Список цитированных источников

1. Игнатюк, В. И.Строительная механика. Статика и устойчивость стержневых систем : учеб.-метод. пособие // В. И. Игнатюк, В. В. Тур / Брест. гос. техн. ун-т. – Брест : БрГТУ, 2022. – 236 с.
2. Бекиш, Е. О. К определению усилий в круговых трехшарнирных арках, нагруженных вертикальными распределенными по параболической зависимости нагрузками / Е. О. Бекиш, А. В. Крук // Сб. конкурс. науч. работ студ. и магистр. / Брест. гос. техн. ун-т. – Брест, 2022.

УДК 624.151.5

Аношко-Мостовой Е. А., Забавко А. А.
Научный руководитель: ст. преподаватель Бочарова Н. В.

РАСЧЕТ МОНОЛИТНОЙ ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ «ЛИРА-САПР»

При расчете конструкций на упругом основании возникают проблемы учета распределительных свойств основания, которые игнорируются в простейшем случае винклерова основания. Большинство реальных грунтов обладает распределительной способностью, когда, в отличие от винклеровой расчетной схемы, в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и примыкающие к ним области ненагруженного грунта. Следовательно, для учета распределительной способности основания необходимо, во-первых, использовать модели основания, отличные от винклеровой, и, во-вторых, ввести в расчетную схему те части основания, которые расположены за пределами фундаментной конструкции [1].

На сегодняшний день известны десятки предложений по совершенствованию механической модели грунтового основания, но, по-видимому, следующим по простоте математической постановки задачи после винклеровой модели шагом явилась разработка модели упругого основания с двумя коэффициентами постели (рисунок 1). Модель основания с двумя коэффициентами постели позволяет учитывать распределительную способность грунта. В этой модели z-образные абсолютно жесткие элементы соединены с землей совокупностью пружин, являющихся дискретным аналогом коэффициента C_1 (характеризующего жесткость основания на сжатие), тогда как пружины, расположенные между соседними z-образными элементами, служат дискретным аналогом коэффициента C_2 (характеризующего жесткость основания на сдвиг)

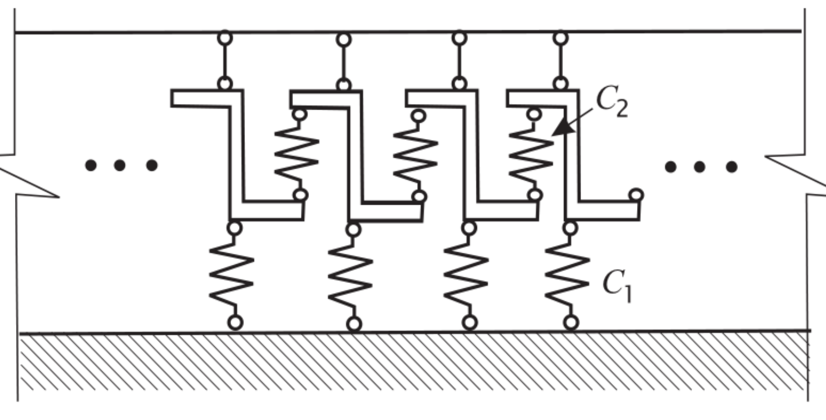

Рисунок 1 – Модель основания с двумя коэффициентами постели C_1, C_2