

Ее преимущества перед механической обработкой – отсутствие отходов производства и значительная экономия материала. Технология стала незаменимой в промышленности, медицине, строительстве и других областях.

Для выполнения поставленных задач изучены программные комплексы «КОМПАС-3D», SolidWorks, Autodesk Inventor. Построена параметрическая 3D-модель планетарного механизма, выполнена анимация движения механизма и проведены статические расчёты зубчатого зацепления двух шестерней, эписцикла и сателлита. Получено напряжённо-деформированное состояние зубчатого зацепления элементов планетарной передачи. При этом полученные значения не превысили максимально допустимых.

Список цитированных источников

1. Лукинских, С. В. Компьютерное моделирование и инженерный анализ в конструкторско-технологической подготовке производства : учебное пособие / С. В. Лукинских ; М-во науки и высш. обр. РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал.ун-та, 2020. — 168 с.
2. Кокорев, И. А. Курс деталей машин: учеб. пособие / И.А. Кокорев, В. Н. Горелов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 287 с.
3. Дударева, Н. Ю. SolidWorks 2009 для начинающих / Н. Ю. Дударева, С. А. Загайко. – СПб. : БХВ-Петербург, 2009. – 440 с.
4. Алямовский, А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation / А. А. Алямовский. – Москва: ДМК Пресс, 2019. – 463 с.

УДК 514.18(0.75.8)

Трайгель Д. А., Новицкая А. В.

Научные руководители: к. т. н., доцент Уласевич В. П.;

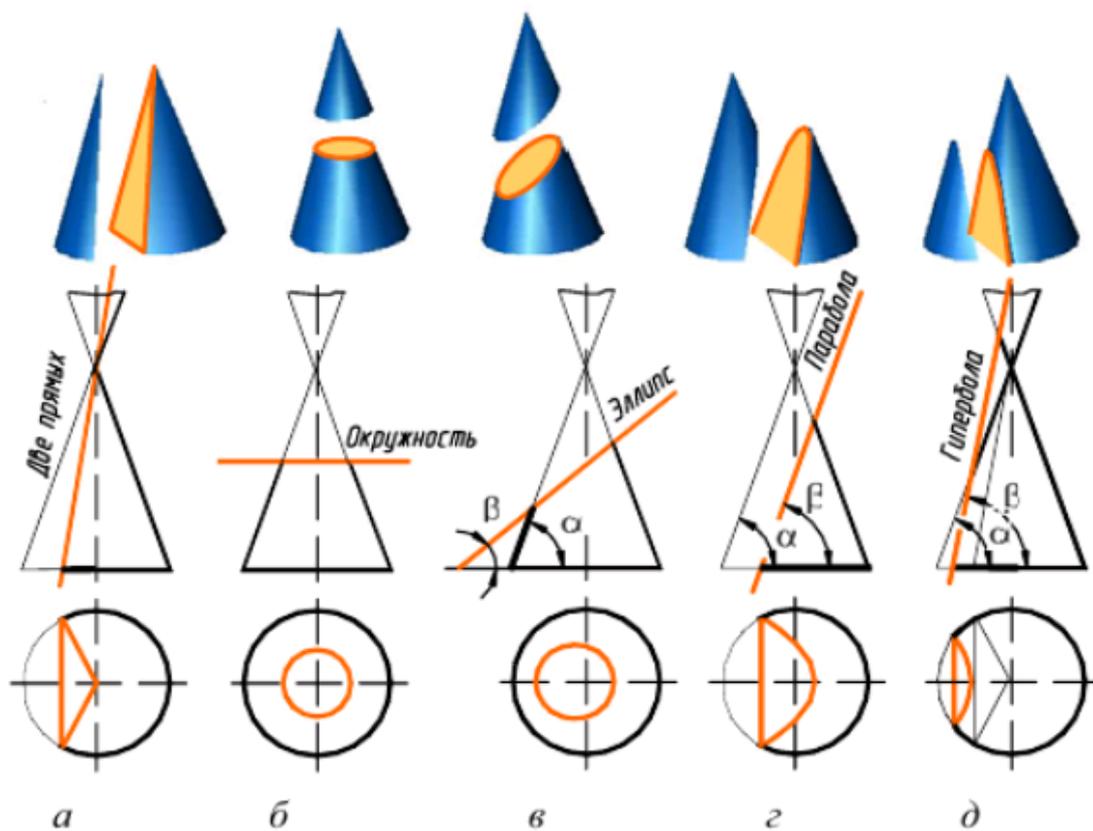
к. т. н., доцент Уласевич З. Н.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ СВЯЗЬ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ 2-ГО ПОРЯДКА В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Постановка задачи

Цель исследований: изучить конические сечения. **Задачи:** научиться различать виды конических сечений и применять аналитический подход.

Замкнутая коническая поверхность может быть образована движением прямолинейной образующей по замкнутой криволинейной направляющей при некоторой неподвижной точке, называемой вершиной. На чертеже коническая поверхность задана, если заданы направляющая и вершина. Если коническая поверхность ограничена плоскостью, то образованное геометрическое тело называют **конусом**. Если в основании конуса лежит круг, а его вершина лежит на перпендикуляре, восстановленным из центра круга как основания конуса, то такой конус называют **прямым круговым конусом**.



а) – две прямые; б) – окружность; в) – эллипс; г) – парабола; д) – гипербола

Рисунок 1 – Линии сечений прямого кругового конуса

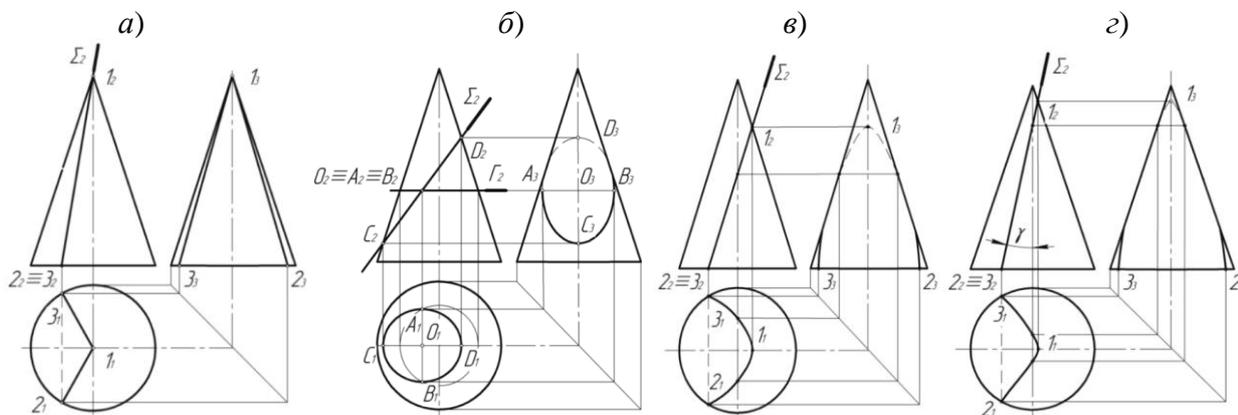
Конические сечения впервые исследовал древнегреческий геометр Менехм, живший в IV веке до нашей эры. Трактаты Менехма о конических сечениях, описанные Евклидом в конце IV в. до н. э., были утеряны, но материалы о них описал древнегреческий математик Аполлоний Пергский (III в. до н. э.) в своей работе «Конические сечения», благодаря которым трактаты Менехма вместе с собственными исследованиями Аполлония Пергского сохранились. Аполлоний Пергский, варьируя угол наклона секущей плоскости к оси кругового конуса или его образующим, получил все конические линии сечений, три кривые из которых были названы им как эллипс, парабола и гипербола, а также были даны им и определения этих кривых (рисунок 1).

Со времен Аполлония Пергского конические сечения делятся на три типа в зависимости от наклона секущей плоскости к образующей конуса: **эллипс**; **парабола**; **гипербола**. **Эллипс** образуется, когда секущая плоскость пересекает все образующие конуса в одной его ветви; **парабола** – когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса; **гипербола** – когда секущая плоскость параллельна двум образующим и пересекает обе полости конуса. В своих построениях Аполлоний Пергский использовал двуполостной круговой конус, поэтому им впервые было установлено, что **гипербола** – кривая с двумя ветвями (рисунок 1).

Линии пересечения конуса плоскостью

В основу графической подготовки студентов в технических вузах положена дисциплина «Инженерная графика», теоретическую основу которой составляет изучаемая на первом курсе дисциплина «Начертательная геометрия». Заметим, что предшественников и аналогов в технических вузах она не имеет, а поэтому

при изучении ее разделов приходится делать упор на знания, полученные студентами в школе по дисциплинам «Алгебра», «Геометрия Евклида», «Черчение». А между тем указанные школьные дисциплины имеют между собой с исторических времен теснейшую взаимосвязь. Примеры построения линий сечения прямого кругового конуса плоскостью методом плоскостей-посредников частного положения начертательной геометрии представлены на рисунке 2.



а) – две прямые; б) – эллипс; в) – парабола; г) – гипербола

Рисунок 2 – Построения линий сечения прямого конуса плоскостью

Анализируя вышесказанное, а также построения, представленные на рисунке 2, можно дать следующие определения сечений кругового конуса плоскостью:

– если секущая плоскость проходит через вершину по двум образующим, то в сечении получают две прямые, образующие треугольник (рисунке 2а);

– если секущая плоскость пересекает образующие перпендикулярно оси конуса, то в сечении получается окружность (рисунке 2б);

– если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, но пересекает его поверхность параллельно одной из образующих, то в сечении получается парабола (рисунке 2в);

– если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, но пересекает его поверхность параллельно двум образующим, то в сечении получается гипербола (рисунке 2г).

Сечения конуса в уравнениях аналитической геометрии

Покажем при анализе общего алгебраического уравнения, изучаемого студентами в курсе «Аналитическая геометрия», вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

где не все коэффициенты A, B, D, E равны нулю, что кривые линии, полученные в сечениях прямого конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, есть кривые второго порядка, аналогичные построенным методом плоскостей-посредников частного положения начертательной геометрии (рисунке 2).

Графические образы (ГО) кривых, описанных уравнением (1), но содержащих член $Cxy \neq 0$, свидетельствует о необходимости их преобразования путем поворота и смещения относительно выбранной системы координат. Учитывая сказанное, связь уравнений конических сечений, получаемых при пересечении конуса плоскостью из уравнения (1), рассмотрим при $Cxy = 0$. Тогда уравнение (1) имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2)$$

В этом случае, соответствие между кривыми 2-го порядка, получаемыми из уравнения (2) при различных значениях его коэффициентов, и кривыми, получаемыми при пересечении конуса плоскостью (рисунок 1 и рисунок 2), может быть определено в результате решения уравнения (2) следующим образом:

- если коэффициенты A и B не равны ($A \neq B$) но имеют одинаковые знаки, то уравнение (2) будет описывать эллипс;
- если коэффициенты A и B равны ($A = B$), то уравнение (2) будет описывать окружность;
- если коэффициенты A и B не равны ($A \neq B$) и имеют разные знаки, то уравнение (2) позволит описывать гиперболу;
- если один из коэффициентов A или B равен нулю ($A = 0$ или $B = 0$), т. е. отсутствует слагаемое, содержащее квадрат переменной x или y , то в этом случае такое уравнение позволит описывать параболу.

Заметим, что кривые, полученные из уравнения (2), имеют смещенные оси симметрии, а следовательно, и центр симметрии и координаты вершин.

Согласно [1, 2, 3, 4, 5], курс «Начертательная геометрия» изучает формы, свойства геометрических образов (ГО) и отображения одного ГО в другой. За преобразованиями ГО конических сечений в виде сжатия, движения, перемещения, имеющими место на практике, подтвержденными взаимосвязанными с ними преобразованиями уравнения аналитической геометрии (2), легко увидеть применение таких преобразований в технологической и конструкторской подготовке инженера. Это указывает на то, что начертательная геометрия достойно занимает отведенную ей роль и место в общетеоретической подготовке инженера.

В таблице 1 показаны характерные особенности ГО конических сечений в начертательной геометрии и их математическая связь с алгебраическими уравнениями аналитической геометрии.

Таблица 1 – Математическое представление конических сечений

№ п/п	Название конического сечения в начертательной геометрии	Кривые 2-го порядка в аналитической геометрии	
		Общее алгебраическое уравнение второго порядка	Алгебраические уравнения конических сечений
1	Окружность	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0,$ (2), где A, B, C, D, E – заданные пять точек, не лежащих на одной прямой, как управляемые параметры; $F_{1,2,\dots,n}$ – искомые точки, определяемые путём решения данного уравнения, принадлежащие искомому сечению.	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1,$ где r – радиус окружности
2	Эллипс		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ где a и b – большая и малая полуоси эллипса
3	Гипербола		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ где a и b – действительная и мнимая полуоси гиперболы
4	Парабола		$y^2 = 2p \cdot x,$ p – параметр, определяющий положение параболы в системе координат

Основополагающей в этой взаимосвязанной системе геометрий является проективная геометрия, которая определяет научные направления графо-геометрических дисциплин, где рассматриваются не только вопросы о классификации и свойствах ГО, но и в целом суть геометрии как научной дисциплины. При этом начертательная геометрия, являясь своеобразной главой проективной геометрии со своими характерными отличительными особенностями, формирует, безусловно, некоторую связь между геометрией Евклида, геометрией Лобачевского и аналитической геометрией.

Поскольку геометрия как наука имеет свою историю и место, целесообразно проанализировать и сформулировать системный подход в управлении методикой обучения положениями начертательной геометрии в целях обеспечения качества обучения графическим дисциплинам. Важно при этом не терять, а развивать в нужном направлении связь между геометрией Евклида и основными разделами начертательной геометрии с учетом дальнейшего обучения графическим дисциплинам для каждой конкретной технической специальности.

Определяя основные направления рассматриваемых вопросов, хотелось бы, с одной стороны, выделить проблему какого-либо направления Евклидовой и проективной геометрии, не утратив значимость конкретных разделов начертательной геометрии [1, 2, 3, 4, 5]. А с другой, разрабатывая более доступно и понятно обобщённые подходы и методики, предоставлять обучаемым студентам разделы начертательной геометрии, не теряя связи от простого к сложному, от известного к постигаемому неизвестному.

Здесь уместно обратить внимание на еще одно направление в использовании кривых 2-го порядка конических сечений – разработку методов построения алгоритмов компьютерной параметризации для построения геометрических образов 3D-моделей при решении задач так называемой конструктивной геометрии [4, 5]. В этой связи возникает необходимость и потребность включения таких методов в учебный процесс геометро-графической подготовки студентов.

Применение

Конические сечения часто встречаются в природе и технике. Орбиты планет, обращающихся вокруг Солнца, имеют форму эллипсов. Окружность представляет собой частный случай эллипса, у которого большая ось равна малой. Параболическое зеркало обладает тем свойством, что все падающие лучи, параллельные его оси, сходятся в одной точке (фокусе). Это используется в антеннах радаров и специальных микрофонах с параболическими отражателями. От источника света, помещенного в фокусе параболического отражателя, исходит пучок параллельных лучей, поэтому в прожекторах и автомобильных фарах используются параболические зеркала. Гипербола является графиком многих важных физических соотношений, например, закона Ома, задающего электрический ток как функцию сопротивления при постоянном напряжении, конические дробилки в горно-добывающих отраслях, конические сверла и др.

Заключение

Анализируя вышесказанное, можно заключить, что раздел начертательной геометрии «Конические сечения» имеет право на своё глубокое изучение в увязке с соответствующими разделами аналитической геометрии, так как такой подход внутри себя не только не содержит противоречий, но будет способство-

вать более осознанному изучению вышеназванных дисциплин в зависимости от поставленных целей при их *изучении*. В этом случае дисциплина «Начертательная геометрия» будет по-прежнему иметь свою практическую ценность, если её методики будут совершенствоваться, впитывая в себя в необходимой мере через контакты с проективной геометрией те познания, которые будут способствовать освоению современных компьютерных технологий с использованием аппарата математического моделирования объектов строительства и машиностроения.

Таким образом, с точки зрения оценки достаточности графической подготовки студента курс «Начертательная геометрия» является одной из основных дисциплин, обеспечивающей изучение проблем геометрического и графического моделирования конкретных инженерных задач. А способы их математического обеспечения с использованием законов алгебры и матричного аппарата изучает *аналитическая геометрия*. Поэтому в графической подготовке студента важная роль должна быть отведена теме начертательной геометрии «Конические сечения», которая будет способствовать более осознанному изучению курса «Инженерная графика», на знаниях стандартов «Единой системы конструкторской документации» (ЕСКД) и «Система проектной документации для строительства (СПДС).

Список цитированных источников

1. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М. : Машино-строение, 1983. – 240 с.
2. Уласевич, З. Н. Начертательная геометрия / З. Н. Уласевич, В. П. Уласевич, О. А. Якубовская. – Минск : Беларус. энцыкл. імя П. Броўкі, 2009. – 197 с.
3. Уласевич, З. Н. Инженерная графика. Практикум / З. Н. Уласевич, В. П. Уласевич, Д. В. Омесь. – Минск : Вышэйшая школа, 2020. – 207 с.
4. Хейфец, А. Л. Алгоритмы моделирования коник в пакете AutoCAD / А. Л. Хейфец // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. – Саратов: СГТУ, 2013. – С. 34–39.
5. Уласевич, З. Н. Тема «Конические сечения» в методике преподавания графических дисциплин / З. Н. Уласевич, В. П. Уласевич // Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы: сборник трудов Междунар. научно-практич. конференции, 21 апреля 2017 г. / М-во образования РБ, Брест. гос. техн. ун-т; РФ, Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин), отв. ред. К. А. Вольхин. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2017. – С. 250–255.

УДК 004.5+528.9

Лисицкая А. А., Горбачук Е. В.

Научные руководители: к. т. н., доцент Акулова О. А.; м. т. н. Розумец И. Н.

ГЕОИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА: ИНТЕРАКТИВНАЯ КАРТА РЕК И ОЗЕР БЕЛАРУСИ

Два десятка лет назад эру бумажных карт и атласов сменили электронные интерактивные карты. Наиболее известный в мире картографический портал Yahoo! Maps, в СНГ – Яндекс.Карты. Такие порталы позволяют находить любые объекты в считанные секунды. Конечно, дело не только в скорости и про-