УДК 519.6+517.983

РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОМОЩИ НЕЯВНОЙ ИТЕРАТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Сидак С.В.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к. физ.-мат. н., доцент

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве *H* исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора *A*, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части *y* уравнение (1) имеет единственное решение *x*. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная процедура с $\alpha > 0$:

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + 2\alpha Ay, \quad x_0 = 0 \cdot \tag{2}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (2) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0\,. \tag{3}$$

2. Останов по невязке. Определим момент *m* останова итерационного процесса (3) условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \ b > 1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Справедливы

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и пусть* $x = A^s z, s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 4\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta. \tag{5}$$

Замечание 1. *Порядок оценки* (5) есть *O* $\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [1], *он опти-*

мален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 3 *предположение порядка* $s>0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (4).

3. Численный модельный пример. Решаем в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения $\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t), \quad 0\le t\le 1$ с симметричным положительным ядром $K(t,s)=\begin{cases} t(1-s),\ 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t),\ 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$ точной правой частью $y(t)=\dfrac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t)=t(1-t)$.

Данная задача относится к классу обратных задач теории потенциала, и она некорректна. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i$ = $[y(t_i)\cdot 10^k$ + 0,5] / 10^k, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i=\overline{1,m}$, $h=1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и k = 4. При k = 4 величина погрешности $\delta=10^{-4}$. Действительно, имеем

$$\int_0^1 [y(t)-\tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i)-\tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}.$$

Будем решать задачу методом (3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha\sum_{j=1}^m K(t_i,s_j)h\left(\sum_{k=1}^m K(t_j,s_k)hx_k^{(n+1)}\right) = x_i^{(n)} -$$

$$-\alpha\sum_{j=1}^m K(t_i,s_j)h\left(\sum_{k=1}^m K(t_j,s_k)hx_k^{(n)}\right) + 2\alpha\sum_{j=1}^m K(t_i,s_j)h\tilde{y}_j,\ x_i^{(0)}=0,\ i=\overline{1,m}.$$

Для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (4), выбрав m = 32 и уровень останова $\varepsilon=1{,}5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности методом (3) при $\alpha=9$ требуется только одна итерация.

Список цитированных источников

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.