Используя СКА *Mathematica*, проведем численное исследование решений дифференциальной системы (1). Для этого построим программный модуль, который решает дифференциальное уравнение (2) и, используя соотношения (3), осуществляет моделирование возможных состояний динамической системы (1) для различных значений входящих в нее параметров. На рисунке 1 показаны графики, входящих в систему (1) трех неизвестных функций $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Изменяя положения ползунков, можно задать желаемое значение параметров системы (1).

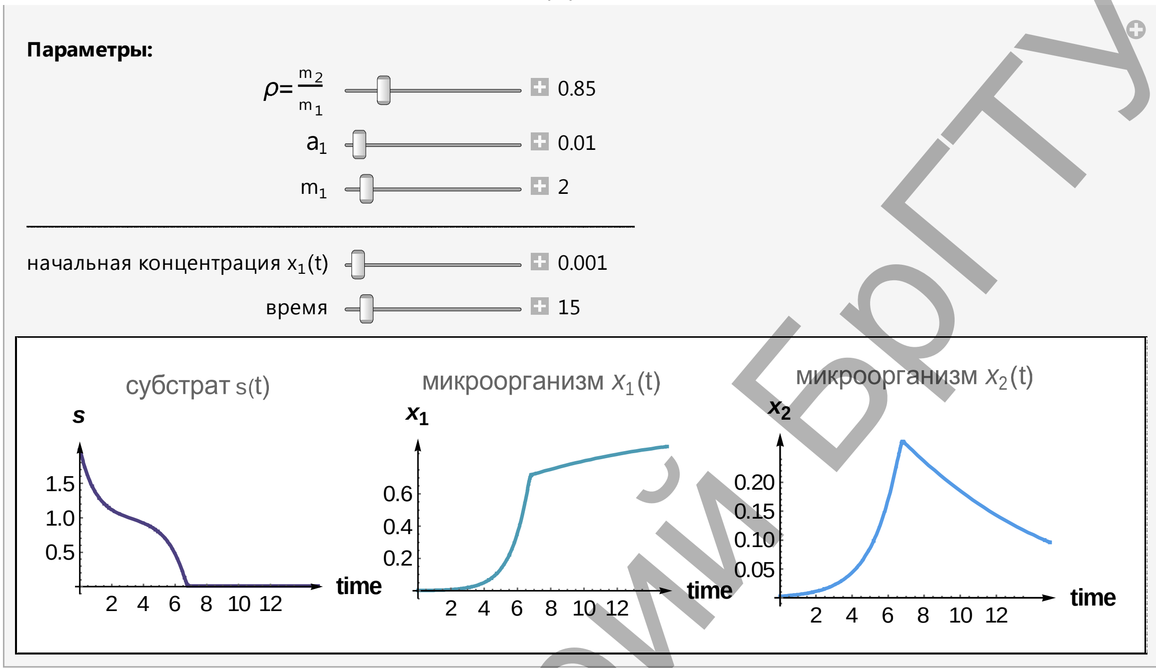

Рисунок 1

Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. − Cambridge University Press, 1995. − 313 p.
2. Levin, B.R. The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Nonconjugative Factors / B.R. Levin, F.M. Stewart // Genetics. – 1980. – Vol. 94. – № 2. – P. 425–443.
3. Чичурин, А.В. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид // А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Весн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 3. – С. 59–65.

УДК 517.583

ПОСТРОЕНИЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ СВОИХ ПОЛЮСОВ

Юхимук М.М.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Пусть $f(z)$ – заданная мероморфная функция, нули которой находятся в точках $\alpha_j\,(j\in\Gamma)$, а полюсы – в точках $\beta_k\,(k\in\Gamma')$. При этом $\inf\limits_{\alpha_{j_1}\neq\alpha_{j_2}}\left|\alpha_{j_1}-\alpha_{j_2}\right|=d_\alpha>0$, $\inf\limits_{\beta_{k_1}\neq\beta_{k_2}}\left|\beta_{k_1}-\beta_{k_2}\right|=d_\beta>0$. Фиксируем число $d<\frac{1}{2}\min\{d_\alpha,d_\beta\}$ и образуем множество $\Omega_d=J\setminus\left(\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\overline{U_d(\alpha_j)}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{U_d(\beta_k)}\right)\right)$. Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\subset\Omega_d\setminus\{0\}$ – произвольная неограниченная последовательность. Поставим задачу построения неограниченной на последовательности $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ мероморфной функции $\varphi(z)$, нули и полюсы которой совпадают соответственно с нулями и полюсами функции $f(z)$ (с учетом их кратностей).

Пусть $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная неограниченная последовательность. Будем искать мероморфную функцию вида $\varphi(z)=\exp(\psi(z))\cdot f(z)$, где $\psi(z)$ – целая функция, удовлетворяющая условию $\forall n\in \Gamma \ \left(\psi(\lambda_n)=\ln\left(\dfrac{\gamma_n}{f(\lambda_n)}\right)\right)$. Для этого построим сначала целую функцию $\psi_0(z)$, имеющую простые нули в точках $\lambda_n\ (n\in \Gamma)$: $\psi_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p_n}\dfrac{z^k}{k\lambda_n^k}\right)$ (числа $p_n\in \Gamma_0$ подбираются таким образом, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n+1}\left|\dfrac{z}{\lambda_n}\right|^{p_n+1}$ сходился при любом z). Тогда, согласно [2, с. 36], функция $\psi(z)$ запишется в виде: $\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\gamma_n}{f(\lambda_n)}\right)\dfrac{1}{\psi_0'(\lambda_n)}\left(\dfrac{z}{\lambda_n}\right)^{\mu_n}\dfrac{\psi_0(z)}{z-\lambda_n}$, где числа $\mu_n\in \Gamma_0$ являются наименьшими, удовлетворяющими условию

$$\exists\delta>1\ \exists N\in \Gamma\ \ \forall n\geq N\ \left(\left|\ln\left(\frac{\gamma_n}{f(\lambda_n)}\right)\frac{1}{\psi_0'(\lambda_n)}\right|\cdot\left|\frac{\ln|\lambda_n|}{\lambda_n}\right|^{\mu_n}<\frac{1}{n^{\delta}}\right). \qquad (1)$$

Так как функция $\exp(\psi(z))$ является целой и нигде не обращается в нуль, то функция $\varphi(z)=\exp(\psi(z))\cdot f(z)$ является мероморфной, имеет те же нули и полюсы, что и функция $f(z)$ и при любом $n\in \Gamma$ $\varphi(\lambda_n)=\exp(\psi(\lambda_n))\cdot f(\lambda_n)=\exp\left(\ln\left(\dfrac{\gamma_n}{f(\lambda_n)}\right)\right)\cdot f(\lambda_n)=$ $=\dfrac{\gamma_n}{f(\lambda_n)}\cdot f(\lambda_n)=\gamma_n$ Поскольку последовательность $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ является неограниченной, то построенная функция $\varphi(z)$ является неограниченной на множестве Ω_d (то есть вне окрестностей своих полюсов).

В качестве примера рассмотрим нигде не обращающуюся в нуль мероморфную функцию $f(z)=\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(z-n)^2}=\dfrac{1}{\sin^2\pi z}$ с полюсами второго порядка в точках $z=n\ (n\in ÿ)$. В [3] показано, что функция такого вида является ограниченной вне *δ*-окрестностей своих полюсов при любом сколь угодно малом $\delta>0$. Образуем последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, расположив элементы множества $\{n-1/2\,|\,n\in ÿ\}$ в порядке неубывания их модулей: $\lambda_1=1/2, \lambda_2=-1/2, \lambda_3=-3/2, \lambda_4=3/2, \ldots$ Построим целую функцию $\psi_0(z)$, для которой числа $\lambda_n\ (n\in \Gamma)$ являются простыми нулями. Поскольку показатель сходимости последовательности $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ $\tau=\inf_{\nu}\left\{\nu\in Ÿ\ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\lambda_n|^{\nu}}<+\infty\right\}=\inf_{\nu}\left\{\nu\in Ÿ\ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(n-1/2)^{\nu}}<+\infty\right\}=1$, то, следуя [1, с. 168], достаточно положить $\psi_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{\tau}\frac{z^k}{k\lambda_n^k}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)=$

$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n-1/2}\right)\exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right)\left(1-\frac{z}{-(n-1/2)}\right)\exp\left(\frac{z}{-(n-1/2)}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n-1/2)^2}\right)=$

$=\sin(\pi(z+1/2))=\sin(\pi/2+\pi z)=\cos\pi z$. Поскольку $f(n-1/2)=\frac{1}{\sin^2(\pi n-\pi/2)}=$

$=\frac{1}{\cos^2\pi n}=1$, то $f(\lambda_n)=1$ для любого $n\in\Gamma$. Так как $\psi_0'(z)=-\pi\sin\pi z$, причем $\psi_0'(n-1/2)=-\pi\sin(\pi n-\pi/2)=\pi\cos\pi n=\pi(-1)^n$, то и $\psi_0'(\lambda_n)=\pi(-1)^n$. Тогда, например, для неограниченной последовательности $\gamma_n=\exp(n)$ получим:

$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\gamma_n}{\pi(-1)^n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{\mu_n}\frac{\cos\pi z}{z-\lambda_n}=\frac{\cos\pi z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{z-\lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{\mu_n}$. В этом случае условие (1)

примет вид: $\exists\delta>1\ \exists N\in\Gamma\ \ \forall n\geq N\ \left(\frac{n}{\pi}\cdot\left|\frac{\ln|n-1/2|}{n-1/2}\right|^{\mu_n}<\frac{1}{n^\delta}\right)$. Можно доказать, что, с

одной стороны, при $\mu_n=2$ $(n\in\Gamma)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\cdot\left|\frac{\ln|n-1/2|}{n-1/2}\right|^{\mu_n}$ расходится, то есть не

может мажорироваться сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\delta}$, а с другой – что при $\delta=1{,}1$

неравенство $\frac{n}{\pi}\cdot\left|\frac{\ln|n-1/2|}{n-1/2}\right|^{\mu_n}<\frac{1}{n^\delta}$ справедливо уже для $\mu_n=3$ $(n\in\Gamma)$. Поэтому,

окончательно, $\psi(z)=\frac{\cos\pi z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{z-\lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^3$. При этом мероморфная функция

$\varphi(z)=\frac{\exp(\psi(z))}{\sin^2\pi z}$, имея те же полюсы, что и функция $f(z)$, будет удовлетворять условию $\varphi(\lambda_n)=\exp(n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

Список цитированных источников

1. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
2. Леонтьев, А.Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения / А.Ф. Леонтьев // Труды МИАН СССР. – 1951. – Т 39. – С. 3–214.
3. Юхимук, М.М. О вариациях полюсов эллиптических функций / М.М. Юхимук // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2010. – №2 (96). – С. 4–9.