

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”
Кафедра технологии бетона и строительных материалов**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторной работы

**“Определение динамического предельного напряжения сдвига
бингамовской жидкости”**

по дисциплине

“Процессы и аппараты в технологии строительных материалов”

для студентов специальности 70 01 01

Брест 2008

УДК 691.002.5.04:378.244

Методические указания предназначены для ознакомления студентов с пластично-вязкими свойствами глино-шамотных масс.

Проведение работы основано на использовании основных принципов системного анализа и методе планирования эксперимента.

Составитель: Н. А. Колесников, профессор, к.т.н.

Рецензент: В. Н. Деркач, зам. директора по научной работе НТЦ МАиС, к.т.н.

ВВЕДЕНИЕ

Жидкости, которые подчиняются закону внутреннего трения Ньютона:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

называются ньютоновскими.

В формуле (1) смысл параметров следующий: τ - напряжение сдвига; η - динамический коэффициент вязкости; dv/dy - градиент скорости.

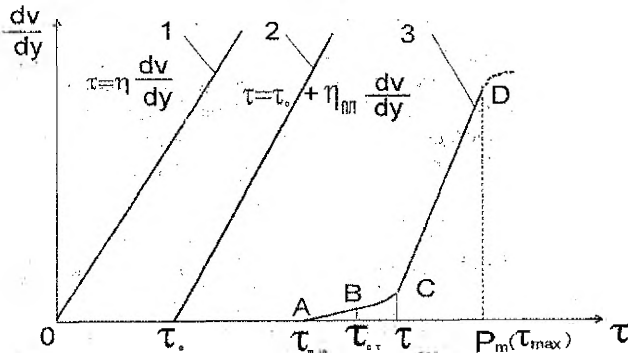
В промышленной практике чаще приходится иметь дело с неньютоновскими жидкостями. Если вязкость ньютоновских жидкостей остается постоянной при данной температуре и давлении, то вязкость неньютоновских жидкостей не постоянна, а изменяется в зависимости от скорости сдвига, его продолжительности, т. е. "предыстории" жидкости.

В технологии строительных материалов к таким жидкостям относятся цементные шламы и растворы, бетонная смесь, глиняные шликеры и пасты, растворы полимеров, краски и т. п. Графики, выражающие зависимость изменения предельного напряжения сдвига от градиента скорости, носят название *кривых течения*. В современной теории неньютоновские жидкости подразделяют на три класса (три обширные группы).

К первому классу относятся вязкие или стационарные неньютоновские жидкости, реологические [реология (от греческого rheos - течение, поток и ... логия) - наука о деформациях и текучести веществ] характеристики которых не зависят от времени приложения сил (напряжений) сдвига. По виду кривых течения различают три разновидности жидкостей этой группы: бингамовские пластичные жидкости, псевдопластичные и дилатантные жидкости. Данная лабораторная работа посвящена бингамовской жидкости.

Движение (течение) ньютоновских (нормальных) жидкостей начинается при начальных напряжениях сдвига (τ_0), равных нулю (рис. 1, кривая течения 1).

Движение неньютоновских (аномальных) жидкостей начинается только после того, как касательные напряжения в них достигнут некоторого предельного значения (так называемого начального напряжения сдвига τ_0). При меньших касательных напряжениях ($\tau < \tau_0$) эти жидкости не текут, а испытывают только упругие деформации, как твердые тела (рис. 1, кривые течения 2 и 3), а при напряжениях, больших τ_0 - как ньютоновские жидкости, т. е. зависимость τ_0 от dv/dy линейна.



1 - ньютоновская жидкость; 2 - бингамовская неструктурированная жидкость;
3 - бингамовская структурированная жидкость.

Рисунок 1 - Кривые течения ньютоновской и бингамовской жидкости

Считается, что структура тела Бингама под действием предельного напряжения сдвига мгновенно и полностью разрушается, в результате чего тело Бингама превращается в жидкость, при снятии напряжения структура восстанавливается и тело возвращается к твердому состоянию.

Уравнение кривой течения носит название уравнения Шведова-Бингама, т. е. есть касательное напряжение определяется по формуле:

$$\tau = \tau_0 + \eta_{пл} \cdot \frac{dv}{dy}, \quad (2)$$

где τ_0 - касательное начальное (предельное) напряжение сдвига (для ньютоновских жидкостей это напряжение, как сказано выше, равно нулю, т. е. $\tau_0 = 0$).

При этом для большинства бингамовских структурированных жидкостей [к таким жидкостям (смесям) относятся двухфазные жидкости, например, гидросмеси (смесь размельченных материалов с водой) и аэросмеси (смесь размельченных материалов с воздухом)], в которых твердый компонент подвергнут очень тонкому измельчению ($d < 0,001$ мм) зависимость касательного напряжения τ от градиента скорости dv/dy выражается не прямой (кривая течения 2), а представляет кривую (кривая течения 3).

На такой кривой можно выделить условно четыре характерные участка: АВ, ВС, CD и область выше точки D. При приложении на формовочную массу внешнего воздействия меньшего, чем $\tau_{мин}$, формовочная масса ведет себя как твердое тело, течения жидкости не наблюдается (градиент скорости равен нулю), жидкость находится в состоянии покоя (участок OA). При приложении сдвигающего усилия большего, чем $\tau_{мин}$ (точка A), градиент скорости начинает увеличиваться.

Участок АВ - практически прямая линия. Нарушения структурных связей на этом участке почти не происходит. Жидкость течет при наибольшей постоянной пластической вязкости (шведовской), поэтому эта область называется областью упругого течения. Точка А соответствует нижнему пределу текучести. Обычными методами его установить довольно трудно. Чаще за нижний предел текучести в опытах принимают точку В, соответствующую концу области упругой текучести. Сдвигающее напряжение в точке В называют предельным статическим напряжением ($\tau_{ст}$).

Участок ВС соответствует области пластического течения. На нем происходит постоянное прогрессирующее разрушение структурных связей жидкости. Пластическая вязкость ($\eta_{пл}$) резко падает, вследствие чего скорость течения быстро увеличивается. Точка С соответствует верхнему пределу текучести, а напряжение в этой точке называют динамическим предельным напряжением сдвига ($\tau_{дин}$). При достижении внешним воздействием $\tau_{дин}$ структурные связи в жидкости полностью разрушаются.

Участок CD соответствует области предельно разрушенной структуры. Течение жидкости в этой области происходит с постоянной (CD - прямая) наименьшей пластической вязкостью (бингамовской). Уравнение кривой течения на этом участке имеет вид:

$$\tau = \tau_{дин} + \eta_{пл}^{мин} \cdot \frac{dv}{dy}. \quad (3)$$

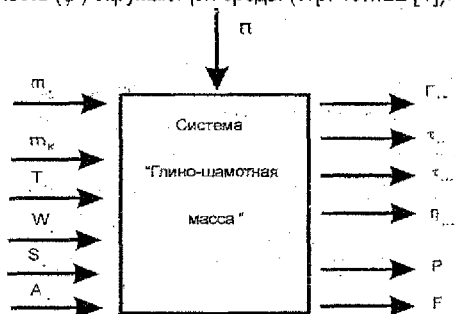
Выше точки D идет область нарушения сплошности структуры (область дефектов). Точка D характеризуется напряжением, соответствующим пределу прочности структуры (P_m), выше которого формование без дефектов невозможно. Следовательно, точка D соответствует максимально возможному внешнему воздействию (τ_{max}) на формовочную массу.

1. СОСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ БЛОК-СХЕМЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПЕРЕДЕЛА

Таким образом, пластично-вязкие свойства строительных масс (бингамовских) характеризуются статическим ($\tau_{ст}$) и динамическим ($\tau_{дин}$) предельным напряжением сдвига, пластической вязкостью ($\eta_{пл}$), прочностью структуры (P_m), модулем упругости (E) и рядом других показателей (стр.112...114, 203...208 [1]).

С учетом сказанного, структурную блок-схему объекта (глино-шамотная масса) можно представить в виде рис. 2.

Последний входной параметр (Π) определяет степень гомогенизации смеси (выходной фактор $\Gamma_{см}$) и, следовательно, однородность реологических свойств, а также возможность проявления в массе тиксотропных свойств. Остальные выходные факторы (\bar{Y}) характеризуются реологическими параметрами, перечисленными выше (стр. 5). Кроме входных факторов контролируемых и регулируемых (m_k , m_b , S_k), контролируемых, но нерегулируемых (W_k , T_k , A_k , Π), на результаты процесса (выходные параметры \bar{Y}) могут оказывать влияние случайные факторы (\bar{Z}): например, температура (t) и относительная влажность (ϕ) окружающей среды (стр. 19...22 [1]).



m_b – количество (масса) воды, г; m_k – количество твердой фазы (m_r , $m_{ш}$), г; T_k – природа (тип) компонентов (T_r , $T_{ш}$); W_k – начальная влажность компонентов, %; S_k – степень дисперсности (удельная поверхность) твердой фазы (S_r , $S_{ш}$), $см^2/г$; A_k – активность поверхности тонкомолотых компонентов; Π – способ и условия перемешивания составляющих

Рисунок 2 - Структурная блок-схема системы "глино-шамотная масса"

2. ОТБОР НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА, ПОСТРОЕНИЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ (ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ ОБ ОБЪЕКТЕ)

Обычно не требуется определять все реологические характеристики. Их выбор, а также отбор входных параметров определяются целью постановки эксперимента.

Цель работы - установить зависимость изменения предельного напряжения сдвига ($\tau_0 = \tau_{дин}$) глино-шамотной массы от соотношения глина/шамот (g/w), тонкости помола шамота ($S_{ш}$) и влажности массы (количества воды затворения m_b). Постановка задачи в таком виде оправдана по следующим соображениям.

Глино-шамотные массы применяются для изготовления кирпича и разного рода низкотемпературных огнеупоров. При полусухом и пластическом способе формования кирпича сохранность его формы описывается уравнением (формула (7.44) [1]):

$$h = \frac{k \cdot \tau_0}{\rho} \quad (4)$$

где h - высота изделия; τ - предельное напряжение сдвига массы; ρ - её плотность; k - коэффициент, зависящий от "жесткости" смеси и изменяющийся от единицы - для пластичных смесей до двух - для жестких масс.

Следовательно, для решения технологической задачи - сохранности формы кирпича при транспортировке сырца и укладке его на сушильные вагонетки достаточно знать одну реологическую характеристику формовочной массы - τ_0 .

Если виды применяемых в работе глины и шамота оставить постоянными, а перемишивание проводить одинаково (например, вручную), то при удельной поверхности глины $S_g = \text{const}$ структурную блок-схему модели системы можно представить в виде рис. 3:

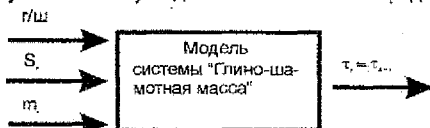


Рисунок 3 - Структурная блок-схема модели системы "глино-шамотная масса"

По сравнению со схемой объекта (рис. 2) входные параметры модели несколько изменены: вместо масс глины (m_g) и шамота (m_w) принято их соотношение - безразмерная характеристика, оперировать которой в данном случае удобнее.

Для установления требуемой зависимости:

$$\tau_{\text{дин}} = f(g/w; S_w; m_g),$$

воспользуемся полиномиальной математической моделью процесса в виде неполного квадратичного уравнения [2], которое в натуральных переменных имеет вид:

$$\tau_{\text{дин}} = b_0 + b_1 \cdot (g/w) + b_2 \cdot S_w + b_3 \cdot m_g + b_{12} \cdot g/w \cdot S_w + b_{13} \cdot g/w \cdot m_g + b_{23} \cdot S_w \cdot m_g + b_{123} \cdot (g/w) \cdot S_w \cdot m_g \quad (5)$$

Закодируем параметры математической модели, представленной формулой (5), следующими символами:

$$g/w = x_1; \quad S_w = x_2; \quad m_g = x_3; \quad \tau_0 = \tau_{\text{дин}} = y.$$

Тогда математическая модель системы "глино-шамотная масса" получит вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad (6)$$

3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА (РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЯТОЙ МОДЕЛИ)

Для определения коэффициентов уравнения регрессии (6) проведем двухуровневый полный факторный эксперимент 2^3 (см. лабораторную работу по измельчению зернистого материала в шаровой мельнице [4]). Число опытов (N) такого эксперимента составит:

$$N = 2^K,$$

где 2 - число уровней; K - число факторов.

В рассматриваемом случае $K = 3$, поэтому $N = 8$. Уровни факторов примем с учетом накопленного опыта выполнения подобных работ (табл. 1).

Таблица 1

Уровни управлений и интервалы варьирования

№ факт.	Факторы (управления)	Уровни факторов			Интервал варьирования
		+	0	-	
1	Соотношение г/ш	0,33	0,22	0,11	0,11
2	Удельная поверхность шамота (S_w , см ² /г)	100	90	80	10
3	Количество воды затворения m_w , г	90	80	70	10

Матрица планирования эксперимента 2^3 представлена в таблице 2.

Таблица 2

№ опыта	Трехфакторный план 2^3						Выходной параметр
	Уровни факторов						
	нормализованных			натуральных			
	X_1	X_2	X_3	$X_1 = \rho_{ш}$	$X_2 = S_{ш}$	$X_3 = m_B$	$Y = \tau_{лин}$
1	-	-	-	0.11	80	70	Y_1
2	+	-	-	0.33	80	70	Y_2
3	-	+	-	0.11	100	70	Y_3
4	+	+	-	0.33	100	70	Y_4
5	-	-	+	0.11	80	90	Y_5
6	+	-	+	0.33	80	90	Y_6
7	-	+	+	0.11	100	90	Y_7
8	+	+	+	0.33	100	90	Y_8
9	0	0	0	0.22	90	80	Y_9

Как видно из таблицы 2, к стандартному плану 2^3 , содержащему 8 опытов, добавлен еще один опыт (с номером 9) в "центре" плана (при нулевых значениях факторов). Его результат потребуется для оценки значимости суммы коэффициентов при неучтенных нами в уравнении (6) квадратичных членах.

Предлагается самостоятельно убедиться в том, что матрица планирования составлена верно, то есть, что для нее выполняются все основные свойства: симметричность относительно центра эксперимента, условие нормировки и ортогональность (см. работу по измельчению зернистого материала в шаровой мельнице [4]).

4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

- 4.1. Истинная плотность шамота $\rho_{ш} = 2,5 \text{ г/см}^3$ (уточняется перед проведением опытов).
- 4.2. Шамот предварительно просеян через сита 1.25; 0.63; 0.315; и 0.16 мм.
- 4.3. Для приготовления смеси используются лишь две фракции (по указанию преподавателя). Допустим, что были указаны фракции 0,315 и 0,16 мм.
- 4.4. Общая масса сухой смеси (глина/шамот) $m_m = 300 \text{ г}$.

5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ

Перед проведением эксперимента необходимо рассчитать:

- 5.1. Количество глины и шамота для уровня (+) и уровня (-).
- 5.2. Удельную поверхность каждой фракции шамота и составить смесь из двух фракций для получения требуемой удельной поверхности (столбец 6, табл. 2).

6. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

6.1 Требуемое количество глины и шамота для приготовления массы указанных значений уровней (+) и (-) рассчитывается по формулам:

$$m_{ш} = \frac{m_m}{1+z/ш}, \text{ г}; \quad m_g = m_m - m_{ш}, \text{ г}; \quad (7)$$

где m_m – общая масса сухой смеси (глина/шамот), г.

6.2. Удельная поверхность фракции шамота $S_{ш}^{\phi}$ определяется по формуле:

$$S_{ш}^{\phi} = \frac{6}{\rho_{ш} \cdot d_{ср}}, \quad (8)$$

где $\rho_{ш}$ – истинная плотность шамота, г/см^3 ;

$$d_{cp} = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot d_1 \cdot d_2}{d_1 + d_2}, \text{ см;} \quad (9)$$

где d_{cp} - среднегармонический диаметр частиц данной фракции стр.70 [1]

6.3. Количество шамота каждой фракции для составления смеси требуемой удельной поверхности ($S_{ш}$) рассчитывается по формулам:

$$m_{ш}^к = \frac{m_{ш} (S_{ш}^м - S_{ш}^к)}{S_{ш}^м - S_{ш}^к}, \text{ г}; \quad m_{ш}^м = m_{ш} - m_{ш}^к, \text{ г}; \quad (10)$$

где $m_{ш}^к, m_{ш}^м$ - количество шамота соответственно крупной и мелкой фракций, г;

$S_{ш}^к, S_{ш}^м$ - их удельная поверхность, $\text{см}^2/\text{г}$;

$S_{ш}$ - требуемая удельная поверхность смеси двух фракций шамота, $\text{см}^2/\text{г}$;

$m_{ш} = (m_{ш}^к + m_{ш}^м)$ - масса смеси шамота двух фракций, г.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В исходных данных (см. п. 4.3 методических указаний) указано, что для приготовления смеси используются фракции шамота 0,315 и 0,16мм.

Среднегармонические диаметры фракций:

$$d_{cp}^{0,315} = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot (0,63 \cdot 0,315)}{0,63 + 0,315} = 0,042 \text{ см}, \quad d_{cp}^{0,16} = 0,1 \cdot \frac{2 \cdot (0,315 \cdot 0,16)}{0,315 + 0,16} = 0,0212 \text{ см}.$$

Удельные поверхности фракций:

$$S_{ш}^к = \frac{6}{2,5 \cdot 0,042} = 57,14 \text{ см}^2/\text{г}; \quad S_{ш}^м = \frac{6}{2,5 \cdot 0,0212} = 113,2 \text{ см}^2/\text{г}$$

Требуемое количество шамота и глины для уровня (+):

$$m_{ш} = \frac{300}{1 + 0,33} = 226 \text{ г}; \quad m_г = 300 - 226 = 74 \text{ г}.$$

То же, для уровня (-):

$$m_{ш} = \frac{300}{1 + 0,11} = 270 \text{ г}; \quad m_г = 300 - 270 = 30 \text{ г}.$$

То же, для уровня (0):

$$m_{ш} = \frac{300}{1 + 0,22} = 246 \text{ г}; \quad m_г = 300 - 246 = 54 \text{ г}.$$

Количество шамота крупной ($m_{ш}^к$) и мелкой фракции ($m_{ш}^м$), необходимое для получения требуемой удельной поверхности (столбец б, табл. 2) в опытах 1...9:

опыт 1:

$$m_{ш}^к = \frac{270 \cdot (113,2 - 80)}{113,2 - 57,14} = 159,90 \text{ г}, \quad m_{ш}^м = 270 - 159,90 = 110,10 \text{ г},$$

опыт 2:

$$m_{ш}^к = \frac{226 \cdot (113,2 - 80)}{113,2 - 57,14} = 133,84 \text{ г}, \quad m_{ш}^м = 226 - 133,84 = 92,16 \text{ г},$$

опыт 3:

$$m_{ш}^к = \frac{270 \cdot (113,2 - 100)}{113,2 - 57,14} = 63,57 \text{ г}, \quad m_{ш}^м = 270 - 63,57 = 206,43 \text{ г},$$

опыт 4:

$$m_{ш}^к = \frac{226 \cdot (113,2 - 100)}{113,2 - 57,14} = 53,21 \text{ г}, \quad m_{ш}^м = 226 - 53,21 = 172,79 \text{ г},$$

опыт 5:

$$m_{ш}^к = \frac{270 \cdot (113,2 - 80)}{113,2 - 57,14} = 159,90 \text{ г}, \quad m_{ш}^м = 270 - 159,90 = 110,10 \text{ г},$$

опыт 6:

$$m_{ш}^{\kappa} = \frac{226 \cdot (113,2 - 80)}{113,2 - 57,14} = 133,84 \text{ Г}, \quad m_{\sigma}^i = 226 - 133,84 = 92,16 \text{ Г};$$

опыт 7:

$$m_{ш}^{\kappa} = \frac{270 \cdot (113,2 - 100)}{113,2 - 57,14} = 63,57 \text{ Г}, \quad m_{\sigma}^i = 270 - 63,57 = 206,43 \text{ Г};$$

опыт 8:

$$m_{ш}^{\kappa} = \frac{226 \cdot (113,2 - 100)}{113,2 - 57,14} = 53,21 \text{ Г}, \quad m_{\sigma}^i = 226 - 53,21 = 172,79 \text{ Г};$$

опыт 9:

$$m_{ш}^{\kappa} = \frac{246 \cdot (113,2 - 90)}{113,2 - 57,14} = 101,81 \text{ Г}, \quad m_{\sigma}^i = 246 - 101,81 = 144,19 \text{ Г};$$

Пусть результаты определения динамического предельного напряжения сдвига $y_j = \tau_0 = \tau_{lim}$ при помощи прибора для его определения в опытах 1...9 характеризуются значениями, представленными в столбцах 5...8 таблицы 3:

Таблица 3

Результаты опытов

Номер опыта	Входные параметры			Выход $Y = \tau_0$, (МПа·10 ²)			
	X_1	X_2	X_3	Y^I	Y^{II}	Y^{III}	\bar{Y}
1	-	-	-	0,90	1,30	1,40	1,20
2	+	-	-	2,80	3,00	3,20	3,00
3	-	+	-	2,45	2,60	3,05	2,70
4	+	+	-	4,90	4,95	5,15	5,00
5	-	-	+	2,50	1,50	2,00	2,00
6	+	-	+	4,25	4,00	4,35	4,20
7	-	+	+	3,00	3,25	4,25	3,50
8	+	+	+	6,00	6,40	6,20	6,20
9	0	0	0	3,00	3,60	3,30	3,30

Здесь Y^I, Y^{II}, Y^{III} – результаты повторных (параллельных) опытов, число которых принято равным трем ($n = 3$); \bar{Y} – их среднее значение.

Обработку полученных результатов проведем по схеме с равномерным дублированием опытов в следующей последовательности.

7.1. Оценка дисперсий среднего арифметического в каждой строке матрицы (каждого опыта)

Дисперсией называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{n \cdot (n-1)}, \quad (11)$$

где y_{iq} – результат отдельного опыта; n – число повторных опытов; $(n-1) = f$ – число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица (одна степень свободы использована для вычисления среднего); $i=1, 2, \dots, N$; $q=1, 2, \dots, n$.

Значение дисперсии первого опыта (см. табл. 3):

$$S_1^2 = \frac{[(1,2 - 0,9)^2 + (1,2 - 1,3)^2 + (1,2 - 1,4)^2] \cdot 10^{-4}}{3 \cdot (3-1)} = \frac{0,14 \cdot 10^{-4}}{6} = 233 \cdot 10^{-8}$$

Аналогично определяем дисперсии остальных опытов. Их значения будут равны соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{S}_2^2 &= 133 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_3^2 &= 325 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_4^2 &= 58 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_5^2 &= 833 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_6^2 &= 108 \cdot 10^{-8}; \\ \bar{S}_7^2 &= 1458 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_8^2 &= 133 \cdot 10^{-8}; & \bar{S}_9^2 &= 300 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

7.2. Проверка однородности дисперсий с помощью критерия Кохрена

Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G = \frac{\bar{S}_{max}^2}{\sum_1^N \bar{S}_i^2} \quad (12)$$

С этим критерием связаны числа степеней свободы $f_1 = n - 1$ и $f_2 = N$ (см. приложение 3). Так как нами был учтен и опыт в центре плана, то в данном случае $N = 9$.

Экспериментальное значение критерия Кохрена составит:

$$G_{эксп} = \frac{1458 \cdot 10^{-8}}{(233 + 133 + 325 + 58 + 833 + 108 + 1458 + 133 + 300) \cdot 10^{-8}} = \frac{1458}{3581} = 0,407.$$

Табличное значение критерия Кохрена для 9 опытов и двух степеней свободы ($n - 1 = 3 - 1 = 2$) равно 0,478 (см. приложение 3).

Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения. Так как в нашем случае $G_{эксп} = 0,407 < G_{табл} = 0,478$,

то дисперсии среднего арифметического можно считать однородными.

В случае неоднородности дисперсий часто оказывается полезным изменение масштаба для выходного параметра. При этом вводится некоторая математическая функция от этого параметра, например, квадратный корень или логарифм.

В данной лабораторной работе результат неоднородности дисперсий, как и в предыдущей лабораторной работе по измельчению зернистого материала [4], не рассматривается.

7.3. Так как дисперсии однородны, то проводим расчет оценки дисперсии воспроизводимости по формуле:

$$S_{(y)}^2 = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N \cdot n \cdot (n - 1)}, \quad (13)$$

где $f_{iq} = N \cdot (n - 1) = 9 \cdot (3 - 1) = 18$ - число степеней свободы этой дисперсии.

С учетом того, что дисперсии среднего арифметического каждого опыта уже определены, получим:

$$S_{(y)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{S}_i^2}{N} = \frac{3581 \cdot 10^{-8}}{9} = 398 \cdot 10^{-8}.$$

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется средним квадратическим отклонением, стандартом или квадратичной ошибкой. Ошибка воспроизводимости (ошибка опыта) составит:

$$S_{(y)} = \sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{398 \cdot 10^{-8}} = 19,9 \cdot 10^{-4}.$$

Стандарт имеет размерность той величины, для которой он вычислен. Дисперсия и стандарт – это меры рассеяния, изменчивости. Чем больше дисперсия и стандарт, тем больше рассеяны значения повторных опытов около среднего значения.

7.4. Определение (оценки) коэффициентов регрессии

Вычисление свободного члена b_0 , коэффициентов уравнения регрессии b_j при основных факторах и коэффициентов b_{ij} , соответствующих эффектам взаимодействия, производится по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i}{N}, \quad b_j = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cdot X_{ji}}{N}, \quad b_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cdot X_{ji} \cdot X_{ji'}}{N}, \quad (14)$$

где $j \neq u$, $j, u = 1, 2, \dots, k$.

В приведенных формулах N опять соответствует числу основных опытов, то есть восьми. Для удобства вычислений составим вспомогательную таблицу 4.

Таблица 4

Расчетная таблица для вычисления коэффициентов регрессии

№ опыта	Входные параметры			Выход $\bar{y} \cdot 10^2$	Вспомогательные расчетные значения ($\times 10^2$)						
	X_1	X_2	X_3		$\bar{y} \cdot x_1$	$\bar{y} \cdot x_2$	$\bar{y} \cdot x_3$	$\bar{y} \cdot x_1 \cdot x_2$	$\bar{y} \cdot x_1 \cdot x_3$	$\bar{y} \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{y} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
1	-	-	-	1,2	-1,2	-1,2	-1,2	+1,2	+1,2	+1,2	-1,2
2	+	-	-	3,0	+3,0	-3,0	-3,0	-3,0	-3,0	+3,0	+3,0
3	-	+	-	2,7	-2,7	+2,7	-2,7	-2,7	+2,7	-2,7	+2,7
4	+	+	-	5,0	+5,0	+5,0	-5,0	+5,0	-5,0	-5,0	-5,0
5	-	-	+	2,0	-2,0	-2,0	+2,0	+2,0	-2,0	-2,0	+2,0
6	+	-	+	4,2	+4,2	-4,2	+4,2	-4,2	+4,2	-4,2	-4,2
7	-	+	+	3,5	-3,5	+3,5	+3,5	-3,5	-3,5	+3,5	-3,5
8	+	+	+	6,2	+6,2	+6,2	+6,2	+6,2	+6,2	+6,2	+6,2
Σ				27,8	9,0	7,0	4,0	1,0	0,8	0,0	0,0

По формулам (14) находим значения коэффициентов:

$$b_0 = \frac{27,8 \cdot 10^{-2}}{8} = 3,48 \cdot 10^{-2}; \quad b_1 = \frac{9,0 \cdot 10^{-2}}{8} = 1,12 \cdot 10^{-2}; \quad b_2 = \frac{7,0 \cdot 10^{-2}}{8} = 0,88 \cdot 10^{-2}; \quad b_{23} = 0;$$

$$b_3 = \frac{4,0 \cdot 10^{-2}}{8} = 0,5 \cdot 10^{-2}; \quad b_{12} = \frac{1,0 \cdot 10^{-2}}{8} = 0,12 \cdot 10^{-2}; \quad b_{13} = \frac{0,8 \cdot 10^{-2}}{8} = 0,1 \cdot 10^{-2}; \quad b_{123} = 0.$$

С учетом значений коэффициентов уравнение регрессии по \bar{y} получит вид:

$$\bar{y} = (3,48 + 1,12 \cdot x_1 + 0,88 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_3 + 0,12 \cdot x_{12} + 0,1 \cdot x_{13}) \cdot 10^{-2} \quad (15)$$

7.5. Проверка адекватности линейной модели помощью критерия Фишера

После вычисления коэффициентов модели необходимо убедиться в ее пригодности. Такая проверка называется проверкой адекватности модели. Особенно важно убедиться в возможности описания процесса линейной моделью, то есть без парных взаимодействий. Для этого поступаем следующим образом.

В уравнении (15) отбрасываем слагаемые с парными взаимодействиями:

$$y = (3,48 + 1,12 \cdot x_1 + 0,88 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_3) \cdot 10^{-2} \quad (15, a)$$

По уравнению (15,а) рассчитываем значения выхода для каждого опыта в соответствии с матрицей планирования (табл. 2). Для рассматриваемого примера эти значения будут.

$$y_1 = [3,48 + 1,12 \cdot (-1) + 0,88 \cdot (-1) + 0,5 \cdot (-1)] \cdot 10^{-2} = 0,98 \cdot 10^{-2};$$

$$y_2 = [3,48 + 1,12 \cdot (+1) + 0,88 \cdot (-1) + 0,5 \cdot (-1)] \cdot 10^{-2} = 3,22 \cdot 10^{-2};$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= [3,48 + 1,12 \cdot (-1) + 0,88 \cdot (+1) + 0,5 \cdot (-1)] \cdot 10^{-2} = 2,74 \cdot 10^{-2}; \\
 y_4 &= [3,48 + 1,12 \cdot (+1) + 0,88 \cdot (+1) + 0,5 \cdot (-1)] \cdot 10^{-2} = 4,98 \cdot 10^{-2}; \\
 y_5 &= [3,48 + 1,12 \cdot (-1) + 0,88 \cdot (-1) + 0,5 \cdot (+1)] \cdot 10^{-2} = 1,98 \cdot 10^{-2}; \\
 y_6 &= [3,48 + 1,12 \cdot (+1) + 0,88 \cdot (-1) + 0,5 \cdot (+1)] \cdot 10^{-2} = 4,22 \cdot 10^{-2}; \\
 y_7 &= [3,48 + 1,12 \cdot (-1) + 0,88 \cdot (+1) + 0,5 \cdot (+1)] \cdot 10^{-2} = 3,74 \cdot 10^{-2}; \\
 y_8 &= [3,48 + 1,12 \cdot (+1) + 0,88 \cdot (+1) + 0,5 \cdot (+1)] \cdot 10^{-2} = 5,98 \cdot 10^{-2}.
 \end{aligned}$$

Затем вычисляем дисперсию адекватности по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_i)^2}{f_{ад}}, \quad (16)$$

где $f_{ад} = N - (k + 1)$ - число степеней свободы дисперсии адекватности.

Для удобства вычислений составляем таблицу 5.

Таблица 5

Расчетная таблица для определения дисперсии адекватности

№ опыта	$\bar{y}_i \cdot 10^2$	$y_i \cdot 10^2$	$\Delta y_i = (\bar{y}_i - y_i) \cdot 10^2$	$\Delta y_i^2 = (\bar{y}_i - y_i)^2 \cdot 10^8$
1	1,2	0,98	0,22	484
2	3,0	3,22	0,22	484
3	2,7	2,74	0,04	16
4	5,0	4,98	0,02	4
5	2,0	1,98	0,02	4
6	4,2	4,22	0,02	4
7	3,5	3,74	0,24	576
8	6,2	5,98	0,22	484
Σ				2056

Для степеней свободы дисперсии адекватности $f_{ад} = N - (k + 1) = 8 - (3 + 1) = 4$ значение $S_{ад}^2$ составит:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f_{ад}} = \frac{2056 \cdot 10^{-8}}{4} = 514 \cdot 10^{-8}.$$

Для проверки гипотезы об адекватности модели используем критерий Фишера. Критерий Фишера (F - критерий) представляет собою отношение большей дисперсии к меньшей. При $S_{ад}^2 > S_{[Y]}^2$, где $S_{[Y]}^2$ - дисперсия воспроизводимости выходного параметра (эксперимента), значение которой мы уже нашли (см. выше), получим:

$$F_{экс} = \frac{S_{ад}^2}{S_{[Y]}^2} = \frac{514 \cdot 10^{-8}}{398 \cdot 10^{-8}} = 1,29. \quad (17)$$

Табличное значение F - критерия находят с учетом уровня значимости (доверительной вероятности) и числа степеней свободы. В технике, чаще всего, 5% - ный уровень значимости и соответственно доверительная вероятность 95% считаются достаточными. По приложению 2 при числе степеней свободы дисперсии адекватности (большей дисперсии) $f_1 = f_{ад} = 3$ и числе степеней свободы дисперсии воспроизводимости выходного параметра (меньшей дисперсии) $f_2 = f_{[Y]} = 18$ находим:

$$F_{табл} = 3,2.$$

Уравнение считается адекватным, если $F_{\text{табл}} > F_{\text{экср}}$. В рассматриваемом случае $F_{\text{табл}} = 3,2 > F_{\text{экср}} = 1,29$. Следовательно, с вероятностью 95% линейную модель можно считать адекватной.

7.6. Проверка значимости коэффициентов регрессии

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо. Ее можно осуществлять двумя равноценными способами: проверкой по t -критерию Стьюдента или построением доверительного интервала. При использовании полного факторного эксперимента доверительные интервалы для всех коэффициентов (в том числе и эффектов взаимодействия) равны друг другу.

Прежде всего, надо найти дисперсию $S_{[b_j]}^2$ коэффициента регрессии. В нашем случае она определяется по формуле:

$$S_{[b_j]}^2 = \frac{S_{[Y]}^2}{N} = \frac{398 \cdot 10^{-8}}{8} = 49,75 \cdot 10^{-8}$$

Квадратичная ошибка коэффициента регрессии:

$$S_{[b_j]} = \sqrt{S_{[b_j]}^2} = \sqrt{49,75 \cdot 10^{-8}} = 7,05 \cdot 10^{-4}$$

Табличное значение критерия Стьюдента (t -критерия) при числе степеней свободы, с которыми определялась $S_{[Y]}^2$ (в рассматриваемом случае равно 18: см. п. 7.3), и 5% -ном уровне значимости равно (см. приложение 1):

$$t_{\text{табл}} = 2,101$$

Доверительный интервал (Δb_j):

$$\Delta b_j = \pm t \cdot S_{[b_j]} = \pm 2,101 \cdot 7,05 \cdot 10^{-4} = \pm 14,8 \cdot 10^{-4}$$

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала:

$$b_j > \Delta b_j = \pm 14,8 \cdot 10^{-4}$$

В нашем случае абсолютные величины коэффициентов при линейных членах уравнения регрессии больше доверительного интервала:

$$b_0 = 348 \cdot 10^{-4} > \pm 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_1 = 112 \cdot 10^{-4} > \pm 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_2 = 88 \cdot 10^{-4} > \pm 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_3 = 50 \cdot 10^{-4} > \pm 14,8 \cdot 10^{-4} ,$$

то есть все они значимые.

Коэффициенты при эффектах взаимодействия меньше доверительного интервала:

$$b_{12} = 12 \cdot 10^{-4} < 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_{13} = 10 \cdot 10^{-4} < 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_{23} = 0 < 14,8 \cdot 10^{-4} ;$$

$$b_{123} = 0 < 14,8 \cdot 10^{-4} ,$$

то есть являются незначимыми, что дополнительно свидетельствует об адекватности линейной модели.

7.7. Проверка возможности использования уравнения регрессии без членов высших порядков

Оценкой суммы коэффициентов регрессии при квадратичных членах, которые мы при выборе полинома не учли, служит разность между b_0 и значением зависимой переменной (выхода) в центре плана, то есть значением y_0 , в нашем случае равно $3,30 \cdot 10^{-2}$ (см. табл. 3).

Если абсолютное значение указанной разности окажется меньше ошибки эксперимента $S_{(y)}$, то эта разность признается статистически незначимой, а гипотеза о возможности использования уравнения без квадратичных членов – верной.

В нашем случае имеем:

$$|y_0 - b_0| = |330 - 348| \cdot 10^{-4} = 18 \cdot 10^{-4}.$$

Эта величина меньше ошибки опыта $S_{(y)} = 19,9 \cdot 10^{-4}$. Следовательно, гипотеза о возможности использования уравнения без квадратичных членов верна.

Полученное уравнение регрессии (математическая модель процесса: формула (15, а)) показывает, что:

а) на нулевом уровне ($g/ш = 0,22$; $S_{ш} = 90 \text{ см}^2/\text{г}$; $m_в = 80 \text{ г}$) выход (τ_0) составляет $3,48 \cdot 10^{-2}$ МПа;

б) при изменении соотношения $g/ш$ (x_1) от нулевого уровня на величину единицы варьирования $\pm \Delta X_1$ (т. е. на $\pm 0,11$) величина выхода изменится на $\pm 1,12 \cdot 10^{-2}$ МПа;

в) при изменении удельной поверхности шамота $S_{ш}$ (x_2) от нулевого уровня на величину единицы варьирования $\pm \Delta X_2$ (т. е. на $\pm 10 \text{ см}^2/\text{г}$) значение выхода изменится на $\pm 0,88 \cdot 10^{-2}$ МПа;

г) при изменении количества воды затворения $m_в$ (x_3) от нулевого уровня на величину единицы варьирования $\pm \Delta X_3$ (т. е. на $\pm 10 \text{ г}$) величина выхода изменится на $\pm 0,5 \cdot 10^{-2}$ МПа.

7.8. Резюме

В предыдущей лабораторной работе по измельчению зернистого материала в шаровой мельнице [4] необходимо было определить оптимальные значения параметров, обеспечивающих получение наибольшей степени измельчения материала. Эксперимент, который ставится для решения задач оптимизации, называется *экстремальным*, а соответствующие задачи – *экстремальными*. Какое решение возможно после построения линейной адекватной модели процесса со значимыми коэффициентами регрессии для подобных задач, показано в п. 6.9 этой работы (“Построение математической модели... и т. д.”).

В данной работе требовалось установить зависимость изменения предельного напряжения сдвига (τ_0 – *един*) глино-шамотной массы от соотношения глина/шамот ($g/ш$), тонкости помола шамота ($S_{ш}$) и влажности массы (количества воды затворения $m_в$) (см. раздел 2). Здесь не определено, какое напряжение сдвига является оптимальным, и не требуется его оптимизировать. Задачи такого типа называют *интерполяционными*.

Следовательно, в рассматриваемой лабораторной работе была поставлена задача построения интерполяционной формулы. В таких задачах при получении адекватной модели исследование заканчивается. В случае неадекватной модели принимается одно из следующих решений: а) включение в модель эффектов взаимодействия, б) преобразование переменных, в) изменение интервалов варьирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин Н. Ф. Процессы и аппараты в технологии строительных материалов: Учеб. для вузов по спец. «Производство строит. изделий и конструкций». — М.: Высш. шк., 1986. — 280 с.: ил.
2. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976. — 279 с.: ил.
3. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. — Мн.: Изд-во БГУ, 1982. — 302 с., ил.
4. Колесников Н. А. Построение математической модели процесса помола зернистого материала в шаровой мельнице/Методические указания к выполнению лабораторной работы. — Брест: Изд-во БГТУ, 2008. — 34 с., ил.

Приложение 1

Значение t – критерия Стьюдента при 5 % – ном уровне значимости [2]

Число степе- ней свободы	Значение t – критерия	Число степе- ней свободы	Значение t – критерия	Число степе- ней свободы	Значение t – критерия
1	12.71	11	2.201	21	2.080
2	4.303	12	2.179	22	2.074
3	3.182	13	2.160	23	2.069
4	2.776	14	2.145	24	2.064
5	2.571	15	2.131	25	2.060
6	2.447	16	2.120	26	2.056
7	2.365	17	2.110	27	2.052
8	2.306	18	2.101	28	2.048
9	2.262	19	2.093	29	2.045
10	2.228	20	2.086	30	2.042

Приложение 2

Значение F – критерия Фишера при 5 % – ном уровне значимости [2]

f_2	$f_1 = 1$	2	3	4	5	6	12	24
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0

- Здесь f_1 – число степеней свободы большей дисперсии; f_2 – то же, меньшей.

Приложение 3

G – распределение Кохрена при 5 % – ном уровне значимости [3]

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365	5175	5017	4884
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5440	0.5063	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353
12	0.5410	0.3924	0.3264	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911	1815	1736	1671
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113

Учебное издание

Составитель: Колесников Николай Андреевич

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторной работы

**“Определение динамического предельного напряжения сдвига
бингамовской жидкости”**

по дисциплине

“Процессы и аппараты в технологии строительных материалов”

для студентов специальности 70 01 01

Ответственный за выпуск: Е.В. Никитчик

Редактор: Т.В. Строкач

Компьютерная вёрстка: Е.Л. Кармаш

Корректор: Е.В. Никитчик

Подписано к печати 06.03.2008 г. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага писчая. Гарнитура Arial Narrow.
Усл.п.л. 0,93. Уч.изд.л. 1. Тираж 80 экз. Заказ № 249. Отпечатано на ризографе учреж-
дения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.