

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольных работ
по теоретической механике

Часть 2

«КИНЕМАТИКА»

для студентов строительных специальностей
заочной формы обучения

Брест 2014

УДК 620.10

Теоретическая механика является одной из общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров строительных специальностей.

С целью закрепления теоретического материала и приобретения навыков инженерных расчётов студентами выполняются контрольные работы по основным разделам курса.

Предлагаемые задания и методические указания к контрольным работам рекомендуются для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» позволяют индивидуализировать и активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса «Теоретическая механика» для студентов заочной формы обучения.

Издаётся в двух частях. Часть 2.<<Кинематика>>

Составители: Батрак В.В., старший преподаватель
Сазонов М.И., профессор, д.т.н
Хвисевич В.М., доцент, к.т.н.

УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Указания к заданию 3

Первые две задачи этого задания относятся к теме «Кинематика точки».

Третья задача относится к теме «Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси». При решении этой задачи следует обратить внимание на то, что угловые скорости сцепленных (или соединенных бесконечным ремнем) колес обратно пропорциональны их радиусам.

Четвертая и пятая задачи этого задания относятся к теме «Плоскопараллельное движение твердого тела». При определении скоростей точек плоского механизма, состоящего из нескольких звеньев, следует рассмотреть движение каждого звена в отдельности, начав с того звена, движение которого задано.

При решении четвертой задачи следует сначала найти скорость точки А и положение мгновенного центра скоростей звена АВ в задачах К8 - К13 или скорость центра подвижной шестерни и положение мгновенного центра скоростей этой шестерни в задачах К14, К15. Для определения скоростей точек С и О в задачах К8, К10 или точек В и D в задачах К9, К11—К13, или точки В в задачах К14, К15 удобно воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек плоского сечения на прямую, соединяющую эти точки.

При определении угловой скорости звена АВ нужно воспользоваться найденным уже мгновенным центром скоростей для этого звена.

Пятая задача этого задания относится к определению ускорений точек плоского механизма или плоской фигуры. При решении этой задачи следует сначала найти угловую скорость звена АВ, а также ускорения a''_A, a''_A, a''_{B_A} в задачах К16—К19 или угловые скорости звеньев АВ и O_2B и ускорения a_A, a''_B, a''_{B_A} в задаче 21.

Заметив, что направление ускорения точки В в задачах К16—К19 известно, воспользуемся равенством $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_A^r + \vec{a}_{B_A}^r + \vec{a}_{B_A}^t$ и спроектируем это равенство на прямую АВ (для определения ускорения a_B) и перпендикулярную к АВ (для определения углового ускорения звена АВ).

При определении ускорения точки В в задаче К21 нужно воспользоваться равенством $\vec{a}_B + \vec{a}_B^r = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_A}^r + \vec{a}_{B_A}^t$ и спроектировать его на прямую АВ.

При решении задачи К20 следует сначала найти угловую скорость и угловое ускорение колеса II и вычислить ускорения $a''_{O_2}, a''_{O_2}, a''_{A_{O_2}}, a''_{A_{O_2}}, a^T_{O_2}, a^H_{A_{O_2}}$ и воспользоваться равенством $\vec{a}_A = \vec{a}_{O_2} + \vec{a}_{O_2}^r + \vec{a}_{A_{O_2}}^r + \vec{a}_{A_{O_2}}^t$.

Для определения ускорения точки В нужно сначала найти скорость точки А и угловую скорость звена АВ, а затем ускорения a''_{B_A} и a_A и воспользоваться равенством $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B_A}^r + \vec{a}_{B_A}^t$. Заметив, что направление ускорения точки В известно, нужно спроектировать это векторное равенство на прямую АВ (для определения ускорения a_B).

Последняя задача этого задания относится к теме «Сложное движение точки» и решается при помощи теорем параллелограмма скоростей и параллелограмма ускорений, или теоремы Кориолиса. При решении этих задач за переносное движение следует принять: в задачах К22, К27 — вращение диска вокруг своего вертикального или горизонтального диаметра;

в задачах К25, К23 — вращение крана или конуса вокруг вертикальной оси;
 в задачах К23, К26 — вращение прямоугольника или прямоугольного тре-
 угольника вокруг своей стороны;
 в задачах К24, К29, К30 — вращение кулисы вокруг оси О (задачи К24,
 К29) или вокруг оси O_1 (задача К30).

Относительным движением в этих задачах является: движение точки М по
 диаметру диска (задача К27) или по его ободу (задача К22);
 в задачах К24, К29, К30 — движение ползуна А вдоль кулисы;
 в задачах К23, К25, К26 — движение точки М по гипотенузе ВС или по
 диагонали прямоугольника, или движение тележки вдоль крана.

При решении задач К24, К29, К30 необходимо учесть, что абсолютное дви-
 жение точки А есть прямолинейное движение этой точки по горизонтали (зада-
 ча К29) или по наклонной направляющей (задача К24), или равномерное вра-
 щение вокруг оси О.

Примеры к контрольным заданиям КИНЕМАТИКА

Пример К1 (определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям
 ее движения).

Дано: $x = 4t$; $y = 16t^2 - 1$; $t_1 = 0.5$ (x и y — см, t и t_1 — с). (1)

Найти: по заданным уравнениям движения точки М установить вид её траектории
 и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость,
 полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметриче-
 ские уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в ко-
 ординатной форме, исключим время t из уравнений (1).

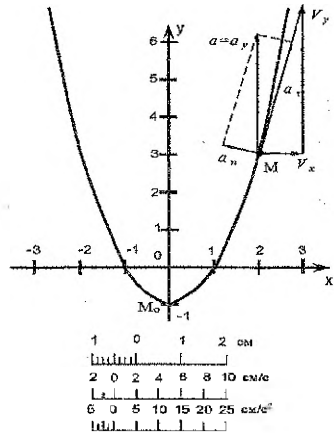


Рисунок К1

Получаем $y = x^2 - 1$, т.е. траекторией точки является парабола, показанная на рисунке К1.

Вектор скорости точки

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}. \quad (3)$$

Здесь \vec{i}, \vec{j} - орты осей x и y ; V_x, V_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдём их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = 0; \\ a_y &= \ddot{y} = 32 \text{ см} / \text{с}^2; \\ V_x &= \dot{x} = 4 \text{ м} / \text{с}; \\ V_y &= \dot{y} = 32t; \end{aligned}$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки $a_\tau = \left| \frac{dV}{dt} \right|$. (6)

Или $a_\tau = \left| \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \right|$. (7)

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление её скорости. Знак “+” при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления \vec{a}_τ и \vec{v} совпадают; знак “—” — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = V^2 / \rho. \quad (8)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}| / V. \quad (9)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |V_x a_y - V_y a_x| / V. \quad (10)$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (11)$$

После того как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (10), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = V^2 / a_n. \quad (12)$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 0.5$ с приведены в таблице.

Таблица К1

Координаты (см)		Скорость (см/с)			Ускорение (см/с ²)					Радиус кривизны (см)
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_t	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис.К1 показано положение точки М в заданный момент времени. Вектор \vec{v} строим по составляющим v_x, v_y , причём этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор \vec{a} строим по составляющим a_x, a_y и затем раскладываем на составляющие \vec{a}_t, \vec{a}_n . Совпадение величин a_t, a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Пример К2 (определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях).

Дано: схема механизма (рис. К2); $R_2 = 50$ см; $r_2 = 25$ см; $R_3 = 65$ см; $r_3 = 40$ см; $t_1 = 1$ с; $x = 36t^2 + 5t + 14$.

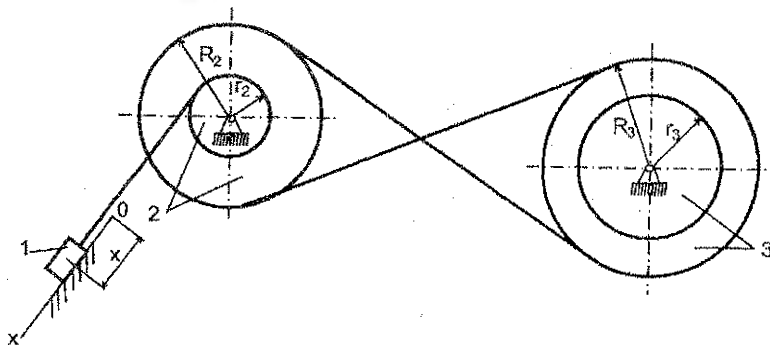


Рисунок К2

Найти: уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки М в момент времени $t = t_1$.

Решение:

Уравнение движения груза 1

$$x = 36t^2 + 5t + 14. \quad (1)$$

Скорость груза 1

$$V_1 = \dot{x} = 72t + 5. \quad (2)$$

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}^2. \quad (3)$$

Для определения скорости и ускорения точки М запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3 .

$$V_A = V_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}.$$

Так как $V_B = V_C$, получим

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3, \quad (4)$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3} = \frac{v_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

или с учётом (2) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2,215t + 0,154.$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2,215 \text{ рад/с}^2$$

Скорость точки М, её вращательное (касательное), центростремительное (нормальное) и полное ускорения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} v_M &= r_3 \omega_3; \\ a_M^{\tau} &= r_3 \varepsilon_3; \quad a_M^{\rho} = r_3 \omega_3^2; \\ a_M &= \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^{\rho})^2}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1=1$ с приведены в таблице.

Скорости и ускорения тела 1 и точки М показаны на рис. К2

Таблица К2

V (см/с)	a (см/с ²)	ω_3 (рад/с)	ε_3 (рад/с ²)	v_M (см/с)	a_M^{τ} (см/с ²)	a_M^{ρ} (см/с ²)	a_M (см/с ²)
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

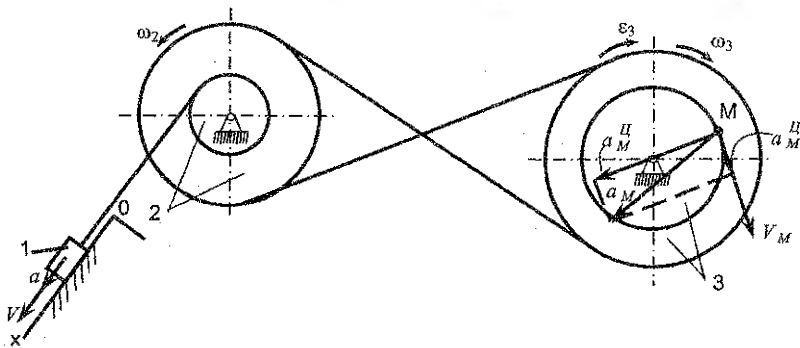


Рисунок К2а

Пример К3 (определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях).

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. К3); исходные данные (см. таблица К3).

Таблица К3

Размеры, см			ω_{OA} , см	ϵ_{OA} , см
OA	AB	AC		
10	60	20	1.5	2

Найти: скорости и ускорения точек В и С для заданного положения механизма, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Решение: Определение скоростей точек и угловой скорости звена .

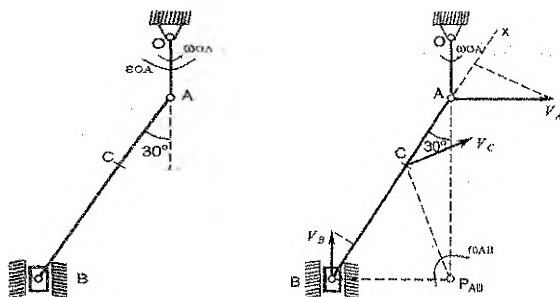


Рисунок К3

Кривошип OA совершает вращательное движение, звено АВ (шатун) – плоскопараллельное движение, ползун В – поступательное движение.

Вычисляем модуль скорости пальца А кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA$$

Скорость точки А перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна В направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна АВ находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек А и В к их скоростям.

Угловая скорость звена АВ: $\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}$.

Модули скоростей точек В и С: $v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}$; $v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}$.

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} : $AP_{AB} = 52,0$ см; $BP_{AB} = 30,0$ см; $CP_{AB} = 36,1$ см.

В соответствии с этим:

$$v_A = 15,0 \text{ см/с}; \omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}; v_B = 8,7 \text{ см/с}; v_C = 10,5 \text{ см/с}.$$

Вектор \vec{v}_C направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена АВ.

Для проверки определим скорость точки В другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведённую через эти точки. Направим ось x вдоль патуна АВ в направлении от В к А. Имеем $V_A \cos 60 = V_B \cos 30$, отсюда $V_B = 8.7 \frac{CM}{C}$.

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки С удовлетворяет этой теореме.

Определение ускорения точек и углового ускорения звена .

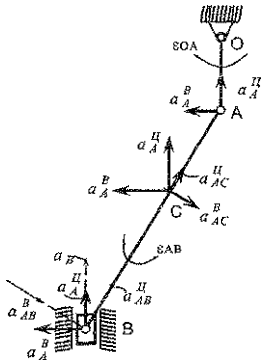


Рисунок К3а

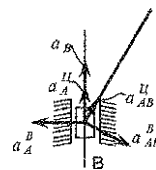


Рисунок К3б

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^H; \quad a_A^B = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^H = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^H,$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^B + \vec{a}_A^H + \vec{a}_{AB}^B + \vec{a}_{AB}^H. \quad (1)$$

Центростремительное ускорение точки В во вращательном движении патуна АВ вокруг полюса А

$$a_{AB}^H = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^B = 20,0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^H = 22,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^H = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_A^B направлен от А к О. Вектор \vec{a}_A^H перпендикулярен вектору \vec{a}_A^B и направлен противоположно \vec{V}_A (вращение кривошипа ОА – замедленное).

Вектор \vec{a}_{BA}^H направлен от В к А. Что касается ускорения \vec{a}_B точки В и вращательного ускорения \vec{a}_{BA}^B , то известны только линии действия этих векторов: \vec{a}_B – по вертикали вдоль направляющих ползуна, \vec{a}_{BA}^B – перпендикулярно АВ.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям. Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчёте.

Спроектировав векторное равенство (1) на направление прямой АВ и перпендикулярно ей (Рис. К3а), получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^B \cos 60^\circ + a_A^D \cos 30^\circ + a_{BA}^D; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^B \cos 30^\circ + a_A^D \cos 60^\circ + a_{BA}^B. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим $a_B = 16.7 \frac{CM}{C}$.

Ускорение \bar{a}_B направлено, как показано на рис. К3б.

Из уравнения (3) получаем $a_{BA}^B = -20.2 \frac{CM}{C^2}$.

Направление \bar{a}_{BA}^B противоположно показанному на рис.К3а.

Ускорение \bar{a}_B и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис.К3б.

Угловое ускорение шатуна АВ с учётом того, что здесь a_{BA}^B - алгебраическая величина, определяется по формуле: $\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^B| / AB$.

Вычисляя, находим $\varepsilon_{AB} = 0.34 \frac{1}{C^2}$.

Направление ускорения \bar{a}_{BA}^B относительно полюса А определяет направление углового ускорения ε_{AB} . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном – противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Пример К4. Пластина $OEAB, D$ ($OE=OD$, рис. К4) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \overset{\cup}{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s -от A к B).

Дано: $R=0.5$ м, $\varphi = t^2 - 0.5t^3$, $s = \pi R \cos(\pi t/3)$, (φ (рад), s (м), t (сек)). Определить: V_{abc} и a_{abc} в момент времени $t_1=2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины переносным движением.

Тогда абсолютная скорость V_{abc} и абсолютное ускорение a_{abc} точки найдутся по формулам:

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер} \quad (1)$$

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \quad (2)$$

где в свою очередь,

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^n, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n.$$

Определим все, входящие в равенства (1), (2) величины.

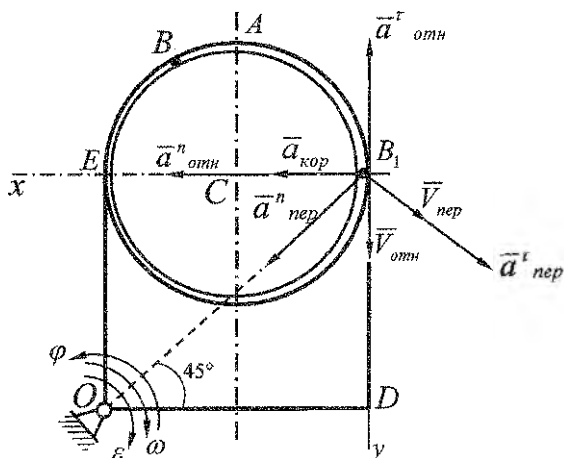


Рисунок К4

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R \cos(\pi t / 3). \quad (3)$$

Сначала установим, где будет находиться точка В на дуге окружности в момент времени t_1 . Полагая в уравнении (3) $t_1=2$ с, получим

$$s_1 = \pi R \cos(\pi 2 / 3) = -0.5 \pi R.$$

$$\text{Тогда } \angle ABC = \frac{s_1}{R} = -0.5\pi$$

Знак “минус” свидетельствует о том, что точка В в момент $t_1=2$ с находится справа от точки А. Изображаем ее на рис. К4 в этом положении. Теперь находим числовые значения $\bar{V}_{\text{отн}}, a^{\tau}_{\text{отн}}, a^n_{\text{отн}}$:

$$V_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = -\frac{\pi R}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = -\frac{\pi^2 R}{9} \cos(\pi t / 3),$$

$$a^n_{\text{отн}} = \frac{V_{\text{отн}}^2}{\rho_{\text{отн}}} = \frac{V_{\text{отн}}^2}{R},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента $t_1=2$ с, учитывая, что $R=0.5$ м, получим:

$$V_{\text{отн}} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi 2 / 3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42 \text{ м / с},$$

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(\pi 2 / 3) = 0,86 \text{ м / с}^2,$$

$$a^n_{\text{отн}} = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м / с}^2, \quad (4)$$

Знаки показывают, что вектор $\overline{a^{\tau}_{\text{отн}}}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s , а вектор $\overline{V_{\text{отн}}}$ – в противоположную сторону; вектор $\overline{a^n_{\text{отн}}}$ направлен к центру С окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К4.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0.5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1.5t^2 = 2 \cdot 2 - 1.5 \cdot 2^2 = -2 \frac{1}{c},$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 - 3t = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \frac{1}{c^2}. \quad (5)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ ; отметим это на рис. К4.

Для определения $a'_{отн}$ и $V_{отн}$ находим сначала расстояние $h = OB_1$ точки B_1 от оси вращения. Из рисунка видно, что $h = 2R\sqrt{2} = 1.41$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (5), получим:

$$V_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2.82 \frac{м}{с},$$

$$\overline{a'_{пер}} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5.64 \text{ м/с}^2, \quad \overline{a''_{пер}} = \omega^2 \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2.$$

Изображаем на рис. векторы $\overline{a'_{пер}}$ и $\overline{V_{пер}}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\overline{a''_{пер}}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{кор} = 2|\overline{V_{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha$, где α - угол между вектором $\overline{V_{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90° , так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\overline{V_{отн}}$. Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|\overline{V_{отн}}| = 1.42$ м/с и $|\omega| = 2c^{-1}$, получим $a_{кор} = 5.68$ м/с².

Направление $\overline{a_{кор}}$ найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор $\overline{V_{отн}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω , т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\overline{a_{кор}}$ на рис. К4.

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $\overline{V_{абс}}$ и $\overline{a_{абс}}$ остается только сложить эти векторы. Сложение выполним аналитически.

4. **Определение \overline{V}_{abc} .** Проведем координатные оси B_1XY

(см. рис. К4) и спроектируем почленно обе части равенства $\overline{V}_{abc} = \overline{V}_{отн} + \overline{V}_{пер}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1=2$ с :

$$V_{abcx} = V_{отнx} + V_{перx} = 0 - |V_{пер}| \cos 45^\circ = -1.99 \text{ м/с};$$

$$V_{abcy} = V_{отны} + V_{перy} = |V_{отн}| + |V_{пер}| \cos 45^\circ = 3.41 \text{ м/с}.$$

После этого находим $V_{abc} = \sqrt{V_{abcx}^2 + V_{abcy}^2} = 3.95 \text{ м/с}.$

Учитывая, что в данном случае угол между $\overline{V}_{отн}$ и $\overline{V}_{пер}$ равен 45° , значение V_{abc} можно еще определить по формуле

$$V_{abc} = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{пер}^2 + 2|V_{отн}| \cdot |V_{пер}| \cdot \cos 45^\circ} = 3.95 \text{ м/с}.$$

5. **Определение $a_{абс}$.** По теореме о сложении ускорений

$$\overline{a}_{abc} = \overline{a}_{отн}^r + \overline{a}_{отн}^n + \overline{a}_{пер}^r + \overline{a}_{пер}^n + \overline{a}_{кор}, \quad (6)$$

Для определения a_{abc} спроектируем обе части равенства (6) на проведенные оси B_1XY . Получим

$$a_{abcx} = a_{отн}^n + a_{кор} + a_{пер}^n \cos 45^\circ - |a_{пер}^r| \cos 45^\circ,$$

$$a_{abcy} = a_{пер}^n \cos 45^\circ + |a_{пер}^r| \cos 45^\circ - |a_{отн}^r|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени $t_1=2$ с, найдем, что в этот момент

$$a_{abcx} = 9.74 \text{ м/с}^2; \quad a_{abcy} = 7.15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда $a_{abc} = \sqrt{a_{abcx}^2 + a_{abcy}^2} = 12.08 \text{ м/с}^2.$

Ответ: $V_{abc} = 3.95 \text{ м/с}, \quad a_{abc} = 12.08 \text{ м/с}^2.$

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ
КИНЕМАТИКА

Задача К1. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки, если движение этой точки задано уравнениями в декартовых координатах: $x=f_1(t), y=f_2(t)$.

Кроме того, построить положения этой точки и вычислить ее скорость, полное, нормальное, касательное ускорения и радиус кривизны траектории для момента t_i ; показать на рисунке вид траектории, вектор скорости и ускорения по их составляющим $V_x, V_y, a_x, a_y, a_n, a_t$, в масштабе (табл. 1-5), где x и y заданы в сантиметрах, а t — в секундах.

Таблица 1

№	x	y	t_i
1	$2\sin^3 \frac{\pi}{2} t$	$2\cos^3 \frac{\pi}{2} t$	1
2	$2t^2$	$4t$	1
3	$\cos \frac{\pi}{4} t^2$	$\sin \frac{\pi}{4} t^2$	2
4	$3\sin \pi t$	$2\cos 2\pi t$	1
5	$e^{4t} + e^{-4t}$	$8t$	0.25
6	$2\sin \frac{\pi}{2} t$	$2\sin \pi t$	2
7	$2\sin \frac{\pi}{4} t$	$2\cos \frac{\pi}{2} t$	3
8	$20t^2 + 5$	$15t^2 - 3$	1
9	$4t - 2t^2$	$1.5t^2 - 3t$	1
10	$20t$	$245 - 49t^2$	1

Таблица 2

№	x	y	t_i
1	$2\cos^2 \pi t$	$2\sin^2 \pi t$	$\frac{1}{4}$
2	$2t^2$	$4t - 1$	2
3	$2e^{2t}$	e^{-2t}	0.5
4	$5\cos^2 \frac{\pi}{4} t$	$2\sin^2 \frac{\pi}{4} t$	1
5	$10t$	$20t - 5t^2$	1
6	$\frac{5}{2}(e^{2t} + e^{-2t})$	$\frac{5}{2}(e^{2t} - e^{-2t})$	1
7	$e^t - 2$	e^{2t}	2
8	$2\cos \frac{\pi}{4} t$	$3\cos \frac{\pi}{2} t$	2
9	$t^3 - 6t$	$2.5t$	2
10	$2(e^{2t} + e^{2t})$	$8t$	2

Таблица 3

№	x	y	t_1
1	$5 + 3\cos\frac{\pi}{2}t$	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	1
2	$2e^{2t}$	$3e^{2t}$	0.5
3	$10t$	$4.9t^2$	1
4	$2(e^{2t} + e^{-2t})$	$3(e^{2t} - e^{-2t})$	2
5	$5t$	$4.9t^2 - 5$	1
6	$75\cos\frac{\pi}{2}t^2$	$75\sin\frac{\pi}{2}t^2$	2
7	$4t$	$\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}$	4
8	$2\cos^2\frac{\pi}{2}t$	$2\sin\pi t$	0.5
9	$2\sin^3\frac{\pi}{2}t$	$2\cos^3\frac{\pi}{2}t$	0.5
10	$3\sin^2\frac{\pi}{4}t^2$	$2\cos\frac{\pi}{2}t^3$	1

Таблица 4

№	x	y	t_1
1	$4t^2 + 1$	$8t - 2$	1
2	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	$3\cos\frac{\pi}{2}t$	1
3	$2e^{t^2} + 4$	$3e^{t^2} - 5$	2
4	$\cos\pi^2 - 1$	$\sin\pi^2 + 2$	1
5	$250t$	$430t - 4.9t^2$	2
6	$2t^2$	$\frac{2}{t^2}$	2
7	$4t - 2t^2$	$6t - 3t^2$	0.5
8	$3 + 4\cos\pi^2$	$2 + 5\sin\pi^2$	1.5
9	$2\cos\pi^2$	$\cos 2\pi^2$	0.5
10	$9.8t$	$9.8 - 4.9t^2$	1

Таблица 5

№	x	y	t_1
1	$2\cos t$	$4\cos 2t$	$\frac{\pi}{6}$
2	$3\cos\frac{\pi}{2}t$	$2\sin\frac{\pi}{2}t$	0.5
3	$2t$	$\frac{3}{t}$	1
4	$3t$	$1 - t^2$	1
5	$4t^2$	$8t^3$	1
6	$e^{2t} + 1$	$e^{4t} - 3$	1

Продолжение таблицы 5

№	x	y	t ₁
7	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	$\cos\pi t$	0.5
8	$2+\cos\frac{\pi}{4}t^2$	$3+\sin\frac{\pi}{4}t^2$	1
9	$e^{2t}+3$	$e^{2t}-5$	0.5
10	$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$	$\cos^2\frac{\pi}{4}t$	0.5

Задача К2. Определить касательное и нормальное ускорения движущейся точки, а также радиус кривизны ее траектории для момента t₁ (с), если движение этой точки задано уравнениями в декартовых координатах: x=f₁(t), y=f₂(t), z=f₃(t). Кроме того, построить положение этой точки в плоскости x,y и вычислить ее скорость, полное ускорение для момента t₁; показать на рисунке вид траектории, вектор скорости и ускорения по их составляющим V_x, V_y, a_x, a_y, a_z, a_n в масштабе (табл. 39 – 43; где x и y заданы в сантиметрах).

Таблица 6

№	x	y	z	t ₁
1	$4\sin^2\frac{\pi}{4}t$	$2\sin^2\frac{\pi}{2}t$	$\sin\pi t$	1.5
2	100t	1960-490t ²	0	2
3	$\frac{1}{2}\sin\pi t^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\pi t^2$	$\frac{1}{2}\sin\pi t^2$	0.5
4	$\frac{3}{2}(e^{2t}+e^{-2t})$	$\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})$	0	0.5
5	10t-cos10t	1-sin10t	0	$\frac{\pi}{20}$
6	$2\cos^2\frac{\pi}{2}t$	2sin π	0	1
7	$4\sin\frac{\pi}{2}t$	cos π	0	0
8	t ²	2t-1	0	1
9	4sin ω t	4cos ω t	8sin ω t	$\frac{\pi}{3\omega}$
10	t ³	3t ² -3t	1-t	1

Таблица 7

№	x	y	z	t ₁
1	2t ³	3t ²	0	1
2	3sin π	2cos π	π ²	1
3	4t ² +1	12t-3	0	2
4	2sin ω t	2cos ω t	4sin ω t	$\frac{\pi}{2\omega}$

Продолжение таблицы 7

№	x	y	z	t_1
5	$2e^{\kappa t}$	$3e^{-\kappa t}$	0	$\frac{1}{\kappa}$
6	$\cos^2 \pi t$	$\sin^2 \pi t$	$\cos^2 \pi t$	0.5
7	$5t - \cos 5t$	$1 - \sin 5t$	0	$\frac{\pi}{5}$
8	$4 \cos^2 \frac{\pi}{4} t$	$2 \cos^2 \frac{\pi}{5} t$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \pi t$	1.5
9	$2t^3$	t^2	$3t$	1
10	$2 \sin \frac{\pi}{2} t$	$\cos \frac{\pi}{2} t$	0	1

Таблица 8

№	x	y	z	t_1
1	$e^t + e^{-t}$	$2t$	0	1
2	$4 \cos 2t^2$	$4 \sin 2t^2$	$6t^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
3	$2t$	$\frac{1}{3} t^{\frac{2}{3}}$	0	1
4	$3t$	$4t$	$2.5t^2$	1
5	$10t - \sin 10t$	$1 - \cos 10t$	0	$\frac{\pi}{20}$
6	$3e^{2t} + 1$	$3e^{-2t}$	0	2
7	$2 \cos \frac{\pi}{4} t$	$3 \sin \frac{\pi}{4} t$	0	2
8	$4 \sin \frac{\pi}{2} t$	$\cos \pi t$	$\pi + \sin \pi t$	1
9	$2 + 3t^2$	$4 - 3t$	$2t^3$	1
10	$\sin \pi t$	$\cos \pi t$	$\sin \pi t$	0.5

Таблица 9

№	x	y	z	t_1
1	$\sin \frac{\pi}{2} t$	$\cos \frac{\pi}{2} t$	$e^{\frac{\pi}{2} t}$	1
2	$3t$	$6t^2$	t^3	2
3	$5 \cos^2 \frac{\pi}{3} t$	$2.5 \sin \frac{2}{3} \pi t$	$5 \sin \frac{\pi}{3} t$	$\frac{3}{4}$
4	$4t^2$	$6t^3$	0	1.5
5	$4 \sin^2 \frac{\pi}{4} t$	$\cos \pi t$	$2 \sin \frac{\pi}{2} t$	1
6	$300t$	$400t - 5t^2$	0	20
7	$2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t$	$2 \sin \pi t$	$\sqrt{3} \cos \pi t$	0.5

Продолжение таблицы 9

№	x	y	z	t_1
8	$4t^2+1$	$8t$	0	1
9	$10t - 0.5\sin 20t$	$0.5 - 0.6\cos 20t$	0	$\frac{\pi}{60}$
10	$2t$	$t - 3t^2$	0	$\frac{1}{6}$

Таблица 10

№	x	y	z	t_1
1	$\sin \frac{\pi}{2}t$	$\cos \frac{\pi}{2}t$	$4\pi t^2$	1
2	$4e^{2t}$	$4e^{-2t}$	0	0.5
3	$\cos 2t$	$\frac{1}{2}\sin 2t$	$\cos t$	$\frac{\pi}{3}$
4	$\frac{1}{2}\cos 2t$	$\cos^2 t$	$\sin t$	$\frac{\pi}{4}$
5	$6t^2$	$2t^3$	0	2
6	$\frac{3}{2}(e^t + e^{-t})$	$\frac{5}{2}(e^t - e^{-t})$	0	2
7	$3t^2$	$4t^2$	t^3	1
8	$\cos \frac{\pi}{4}t^2$	$\sin \frac{\pi}{4}t^2$	0	2
9	$3\sin \frac{\pi}{2}t$	$\frac{3}{2}\sin \pi t$	0	1
10	$9t$	$8t^2$	$2t^3$	0.5

Задача К3. Изображенный на рис.1 механизм лебедки осуществляет вертикальное перемещение груза Р при вращении рукоятки О₁А. Ось Ох направлена по вертикали вниз. Числа зубцов колес лебедки: $z_1=13$, $z_2 = 39$, $z_3=11$, $z_4=77$. Диаметр барабана $d = 20$ см. Зная закон перемещения груза $x = f(t)$ и длину рукоятки $OA = a$, найти скорость и ускорение конца А рукоятки в момент t_1 (рис.1, табл. 11, x и a заданы в см, t — в сек).

Таблица 11

№	x	a	t_1
1	$\frac{\pi}{8}\cos \frac{\pi}{2}t$	60	6.5
2	$8t^2$	30	3
3	$50(1 - \cos \frac{\pi}{15}t)$	40	2.5
4	$10\cos^2 \frac{\pi}{6}t$	75	10
5	$25\sin^2 \frac{\pi}{4}t$	80	9

Продолжение таблицы 11

№	x	a	t ₁
6	$500(\frac{\pi}{20}t - \sin\frac{\pi}{20}t)$	40	10
7	$\frac{\pi}{16}(t^3 - \frac{t^2}{30})$	45	3
8	π^3	30	3
9	$4(t^2 - \frac{\pi}{2}t + \sin\frac{\pi}{2}t)$	35	$\frac{7}{3}$
10	$4(t^2 + \cos\frac{\pi}{8}t)$	32	4

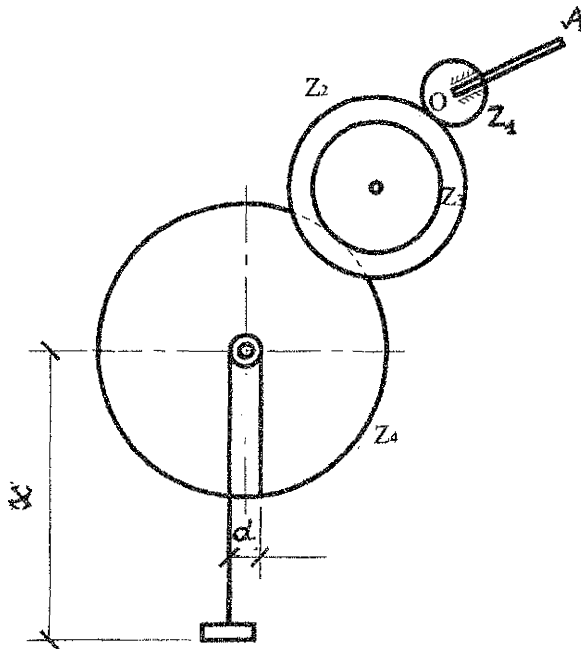


Рисунок 1

Задача К4. На рис. 2 изображена схема сложной ременной передачи. Шкивы II и III сидят на общей оси и неизменно соединены друг с другом. Диаметры шкивов $d_1 = 200$ мм, $d_2 = 500$ мм, $d_3 = 300$ мм и $d_4 = 200$ мм. Шкив I вращается с угловой скоростью $\omega = f(t)$. Определить в момент времени t_1 угловую скорость и угловое ускорение колеса III, а также скорость и ускорение точки, лежащей на ободу колеса IV, — в вариантах 1, 3, 7, 9, а в вариантах 2, 4, 5, 6, 8, 10 определить угловую скорость и угловое ускорение колеса IV и скорость и ускорение точки, лежащей на ободу колеса III (рис. 2, табл. 12, ω задана в сек⁻¹), а t — в сек).

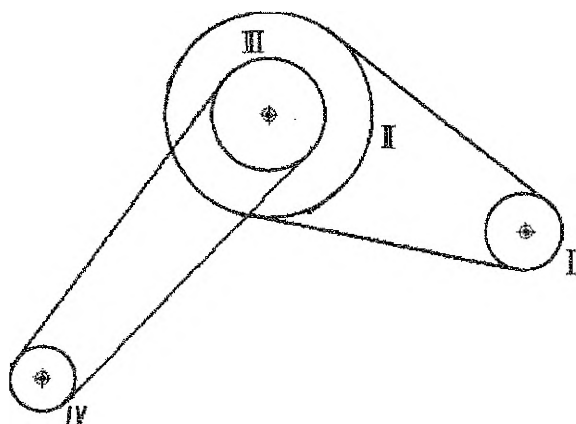


Рисунок 2

Таблица 12

№	ω	t_1
1	$6 \sin \frac{\pi}{2} t$	4,5
2	$12 \cos \frac{\pi}{4} t$	3
3	$\frac{\pi}{2} t^2 + 4\pi t$	2
4	$\pi \cos \frac{\pi}{8} t$	5
5	$10\pi t - \frac{\pi}{2} t^2$	4
6	$2\pi - 2\pi t$	6
7	$\pi(1 - \cos \frac{\pi}{2} t)$	8
8	$0,5t + 2t^2$	2
9	$8t$	1
10	$8t^2$	3

Задача К5. В механизме домкрата при вращении рукоятки O_1A начинают вращаться шестерни 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение рейку домкрата В. Радиус пятой шестерни $r_5 = 10$ см. Числа зубцов шестерен: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$ и $z_4 = 32$.

Зная закон движения рейки $x=f(t)$ и длину рукоятки $O_1A = a$, определить скорость и ускорение конца рукоятки в момент t_1 . Ось Ox направлена по вертикали вниз (рис. 3, табл. 13, x и a даны в см, а t — в сек).

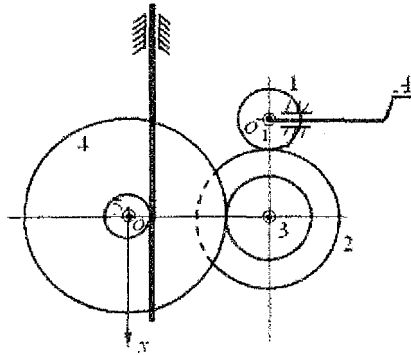


Рисунок 3

Таблица 13

№	x	a	t_1
1	$\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} t$	30	6
2	$\frac{\pi}{2} (t+2)$	40	3
3	$4(t^2 - \cos \frac{\pi}{4} t)$	28	$\frac{4}{3}$
4	πt^3	18	4
5	$\frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{3} t$	24	7
6	$\frac{\pi}{4} t^2$	16	5
7	$\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{2} t$	20	7
8	$20t^2 - 4t^3$	15	3
9	$4(1 - \cos \frac{\pi}{18} t)$	12	3
10	$t^3 - 3t^2$	32	2

Задача К6. Три колеса I, II, III с радиусами $r_1=20$ см, $r_2=5$ см, $r_3=15$ см, вращающиеся вокруг неподвижных осей O_1 , O_2 и O_3 , сцеплены между собой, как показано на рис. 5. К колесу I жестко прикреплена рукоятка длиной $O_1A = a$, а на вал радиуса $r_4=10$ см, жестко скрепленный с колесом III, намотана веревка, к концу которой подвешен груз P.

Зная закон движения груза $x = f(t)$, определить в момент t_1 в вариантах 2, 4, 6, 8, 10 угловую скорость и угловое ускорение колеса II, а также скорость и ускорение конца A рукоятки, а в вариантах 1, 3, 5, 7, 9 определить угловую скорость и угловое ускорение рукоятки и скорость и ускорение точки, лежащей на ободке колеса II. Ось Ox направлена по вертикали вниз (рис. 4, табл. 14; x и a заданы в сантиметрах, а t — в сек).

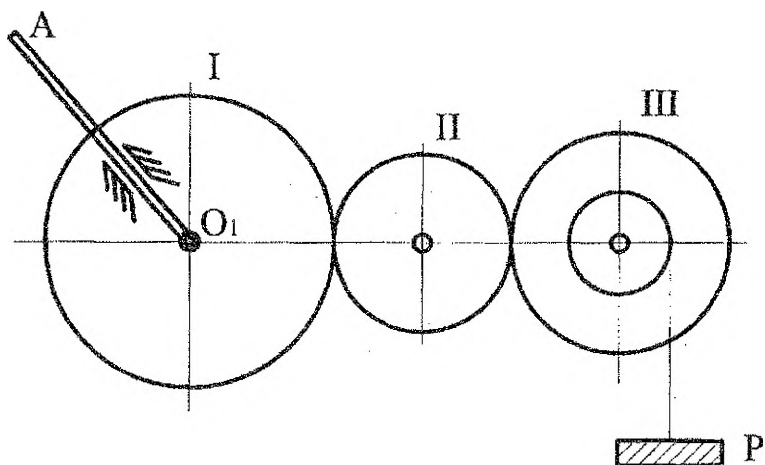


Рисунок 4

Таблица 14

№	x	a	t_1
1	$24t^3$	30	4
2	$3\pi(6 - \cos \frac{\pi}{12}t)$	28	4
3	$4\pi \sin^2 \frac{\pi}{4}t$	40	7
4	$15t^2 - t^3$	36	5
5	$4\pi t$	32	10
6	$\pi^2(t^2 - \cos \frac{\pi}{8}t)$	30	2
7	$\pi(8t + 0.3t^2)$	32	6
8	$20(\frac{\pi}{8}t - \sin \frac{\pi}{8}t)$	42	6
9	$25 \cos^2 \frac{\pi}{6}t$	40	3
10	$5t^2$	40	3

Задача К7. В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта 1 передается шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить в момент t_1 угловую скорость и угловое ускорение стрелки, а также скорость и ускорение точки на ободе колеса 3, если заданы радиусы колес $r_2=10$ см, $r_3=30$ см, $r_4=15$ см и закон поступательного движения рейки $x=f(t)$. Ось Ox направлена по вертикали вверх (рис. 5, табл. 15; расстояние x в см, а t — в сек).

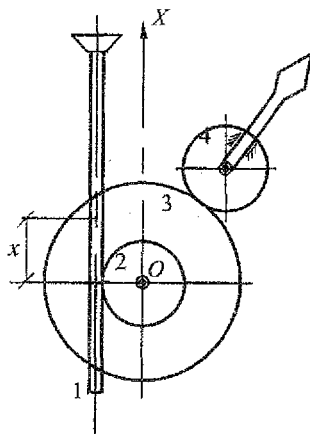


Рисунок 5

Таблица 15

№	x	t ₁
1	$40\left(\frac{\pi}{10}t - \sin\frac{\pi}{10}t\right)$	5
2	$25\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}t\right)$	4
3	$t^2 - \frac{\pi}{6}t + \sin\frac{\pi}{6}t$	8
4	$\pi\left(3t^3 - \frac{t^3}{15}\right)$	3
5	$\pi\left(t^2 - \cos\frac{\pi}{2}t\right)$	1.5
6	$6\pi\cos\frac{\pi}{12}t$	4
7	$10\sin\frac{\pi}{6}t$	2
8	$\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t$	3
9	$15\sin^2\frac{\pi}{3}t$	7
10	$18\cos^2\frac{\pi}{8}t$	6

Задача К8. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма OAB вращается с постоянной угловой скоростью ω . К шатуну $AB = l$ шарнирно прикреплен в точке C ($AC = a$) стержень CD , соединенный концом D шарнирно со звеном

DE, которое вращается вокруг неподвижной оси E. Построить мгновенные центры скоростей звеньев AB и CD, вычислить скорости точек B, C, D и угловую скорость звена AB (рис.6, табл. 16; длины заданы в см, а ω – в сек⁻¹), а также ускорение точек B, C и угловое ускорение звена AB.

Таблица 16

№	φ	α	β	r	l	a	ω
1	0	45	90	30	120	40	6π
2	60	45	60	40	$40\sqrt{3}$	$10\sqrt{3}$	4 л
3	0	90	90	25	80	30	3 л
4	60	90	90	20	$20\sqrt{3}$	$15\sqrt{3}$	3 л
5	45	30	45	60	60	30	4 л
6	90	45	45	30	$30\sqrt{2}$	$15\sqrt{2}$	2 л
7	90	90	60	40	80	20	4 л
8	0	90	60	20	60	20	3 л
9	30	90	60	40	40	20	4 л
10	90	60	45	40	80	40	2 л

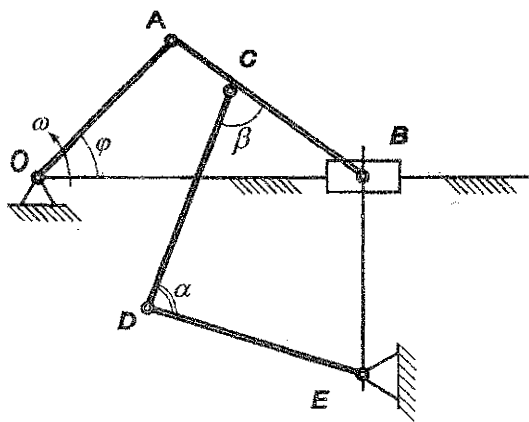


Рисунок 6

Задача К9. Кривошип $O_1A = r$ шарнирного четырехзвенника O_1ABO_2 с неподвижными шарнирами в точках O_1 и O_2 вращается с постоянной угловой скоростью ω . К концу B звена $AB = l$ прикреплен шарнирно стержень BD , конец D которого соединен шарнирно с ползуном; точка D перемещается по горизонтальной, проходящей через точку O_1 . Построить мгновенные центры скоростей звеньев AB и BD и найти скорости точек B и D, а также угловую скорость звеньев AB и $O_2B = a$ (рис. 7, табл. 17, длины заданы в сантиметрах, а ω — сек⁻¹).

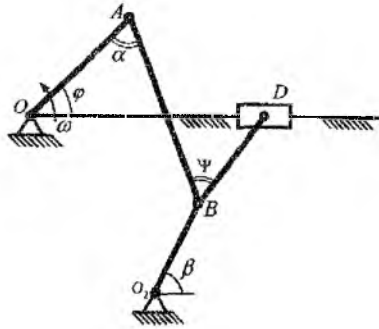


Рисунок 7

Таблица 17

№	φ	α	β	ψ	r	l	a	ω
1	0°	150°	60°	120°	40	60	$60\sqrt{3}$	π
2	90°	90°	45°	135°	30	75	$60\sqrt{2}$	0.5π
3	30°	120°	90°	120°	40	80	90	3π
4	30°	150°	90°	150°	32	$24\sqrt{3}$	56	5π
5	90°	45°	0°	105°	25	$45\sqrt{2}$	35	6π
6	90°	90°	60°	150°	25	65	90	4π
7	90°	90°	45°	150°	20	50	$40\sqrt{2}$	π
8	0°	135°	45°	90°	30	45	45	3π
9	0°	120°	30°	60°	40	60	$50\sqrt{3}$	4π
10	0°	150°	30°	120°	24	32	32	2π

Задача К10. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма OAB вращается с постоянной угловой скоростью ω . К шатуну $AB = l$ шарнирно прикреплен в точке C ($AC = a$) шатун CD , соединенный шарнирно с ползуном, точка D которого перемещается по вертикали, отстоящей от точки O на расстоянии h . Точка B движется по горизонтальной прямой, проходящей через точку O . Построить мгновенные центры скоростей звеньев AB и CD и найти скорости точек B , C и D , а также угловую скорость звена AB (рис. 8, табл. 18; длины заданы в см, а $\omega - c^{-1}$).

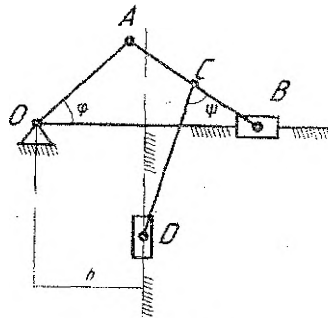


Рисунок 8

Таблица 18

№	φ	ψ	r	l	a	h	ω
1	60°	90°	30	$30\sqrt{3}$	$15\sqrt{3}$	0	2π
2	45°	90°	40	40	20	0	π
3	90°	30°	20	40	20	$20\sqrt{3}$	8
4	30°	60°	60	60	30	$45\sqrt{3}$	5π
5	0°	120°	10	60	40	30	3
6	90°	120°	40	$40\sqrt{37}$	$30\sqrt{37}$	120	5
7	30°	90°	60	60	30	$30\sqrt{3}$	6π
8	90°	90°	15	60	40	$5\sqrt{15}$	12
9	0°	135°	20	100	25	0	4π
10	45°	90°	40	40	30	$20\sqrt{2}$	3π

Задача К11. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма OAB вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω . Ползун B перемещается по прямой, составляющей с горизонталью угол α . К шатуну $AB = l_1$ в точке A шарнирно прикреплен стержень $AD = l_2$, соединенный шарнирно с ползуном D , который перемещается в горизонтальных неподвижных направляющих, как указано на рис. 9. Построить мгновенный центр скоростей для звена AD и определить скорости точек B и D , если заданы значения ω (c^{-1}), r , l_1 , l_2 (см) и углы α , β , угол $OAB = \gamma$, φ (табл.19).

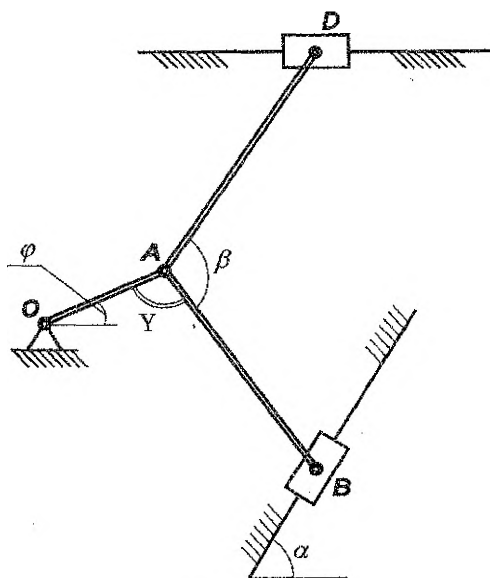


Рисунок 9

Таблица 19

№	α	β	γ	φ	r	l_1	l_2	ω
1	30°	120°	60°	90°	8	60	24	$0,5\pi$
2	45°	120°	30°	90°	6	45	20	4π
3	60°	45°	180°	0°	10	35	25	$1,2\pi$
4	0°	150°	90°	60°	12	60	24	$2,4\pi$
5	90°	120°	75°	45°	15	45	30	$1,5\pi$
6	45°	60°	135°	45°	10	60	80	2π
7	0°	90°	60°	60°	15	80	40	π
8	90°	45°	180°	30°	12	60	45	π
9	90°	90°	210°	30°	10	15	45	2π

Задача К12. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма OAB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω . Ползун B перемещается по прямой, составляющей с горизонталью угол α . К шатуну $AB = l_1$ в точке B шарнирно прикреплен стержень $BD = l_2$ соединенный шарнирно с ползунком D , который перемещается в горизонтальных неподвижных направляющих. Построить мгновенный центр скоростей для звена BD и определить скорости точек B и D , если заданы значения ω (c^{-1}), r , l_1 , l_2 (в см) и углы α , β , угол $OAB = \gamma$, φ (рис. 10, табл. 20).

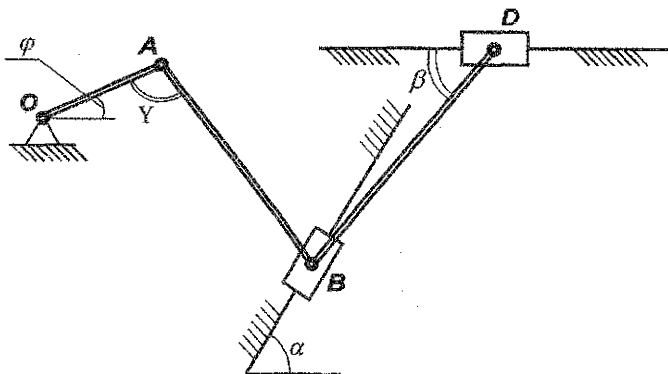


Рисунок 10

Таблица 20

№	α	β	γ	φ	r	l_1	l_2	ω
1	45°	135°	135°	45°	20	20	50	2π
2	90°	45°	120°	45°	30	30	40	π
3	90°	60°	180°	90°	40	40	75	2π
4	60°	150°	120°	60°	45	45	60	5π
5	90°	30°	90°	45°	45	45	60	2π
6	60°	120°	150°	90°	60	60	20	4π

Продолжение таблицы 20

№	α	β	γ	φ	r	l_1	l_2	ω
7	45°	120°	90°	60°	45	45	75	3π
8	0°	60°	120°	0°	60	60	80	2π
9	30°	120°	90°	0°	50	50	80	4π
10	30°	60°	30°	30°	15	15	60	3π

Задача К13. Кривошип $OA = r$ кривошипно-шатунного механизма OAB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω . Ползун B перемещается по неподвижной горизонтальной направляющей, отстоящей от оси O на расстоянии h . Стержень $CD = l_1$ соединен шарнирно в точке C с шатуном AB , а в точке D — со стержнем DE , вращающимся вокруг неподвижной оси E . Построить мгновенный центр скоростей для звена CD и определить скорости точек B , C и D , а также угловую скорость звена $DE = l_2$ если заданы ω (c^{-1}), $r, h, l_1, l_2, AC = l_3$ (в см) и углы $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ (рис. 11, табл. 21).

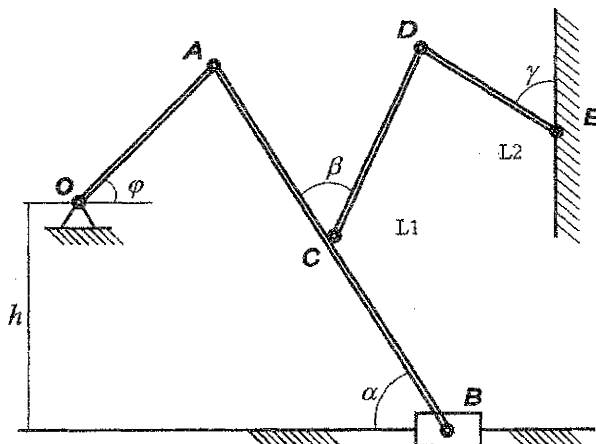


Рисунок 11

Таблица 21

№	ω	φ	α	β	γ	h	r	l_1	l_2	l_3
1	π	300°	0°	135°	90°	$8\sqrt{3}$	16	60	25	$AB=48$
2	2π	0°	60°	90°	90°	30	15	45	10	0
3	π	90°	60°	120°	0°	40	20	60	15	AB
4	3π	0°	30°	90°	0°	50	25	80	10	AB
5	2π	90°	0°	45°	90°	20	20	60	12	$AB=60$
6	$1,5\pi$	45°	45°	60°	90°	0	40	60	30	40
7	π	0°	30°	60°	0°	50	20	40	20	0
8	2π	90°	30°	90°	90°	0	40	50	15	0
9	$2,5\pi$	30°	60°	120°	90°	40	30	45	20	0
10	2π	60°	45°	30°	0°	35	10	50	10	AB

Задача К14. Кривошип O_1O_2 вращается вокруг неподвижной оси O_1 с постоянной угловой скоростью ω и приводит в движение колесо II радиуса r_2 , катящееся без скольжения по неподвижному колесу I радиуса r_1 . С колесом II в точке A соединен шарнирно стержень AB, который приводит в движение ползун B, перемещающийся по горизонтальной направляющей, проходящей через точку O_1 . Построить мгновенный центр скоростей звена AB и найти скорости точек A и B, а также угловую скорость звена AB (рис. 12, табл. 22, где длины заданы в см, а ω - c^{-1}).

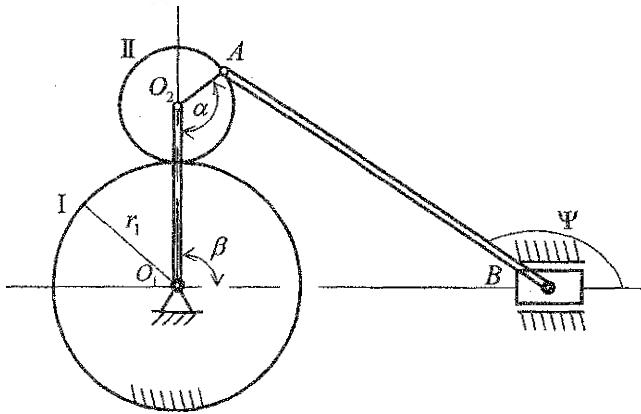


Рисунок 12

Таблица 22

№	α	β	ψ	r_1	r_2	ω
1	180°	30°	120°	20	20	12
2	180°	45°	135°	30	30	8
3	180°	60°	150°	40	40	4π
4	90°	90°	120°	10	40	2π
5	90°	90°	135°	20	10	8
6	180°	90°	135°	25	10	4
7	90°	60°	150°	30	10	3
8	90°	0°	210°	10	30	2π
9	60°	0°	210°	10	30	3π
10	120°	45°	150°	6	20	2π

Задача К15. Решить задачу К14 при условии, что колесо II катится без скольжения внутри неподвижного колеса I (рис. 13, табл.23, где длины заданы в см, а ω - в c^{-1}).

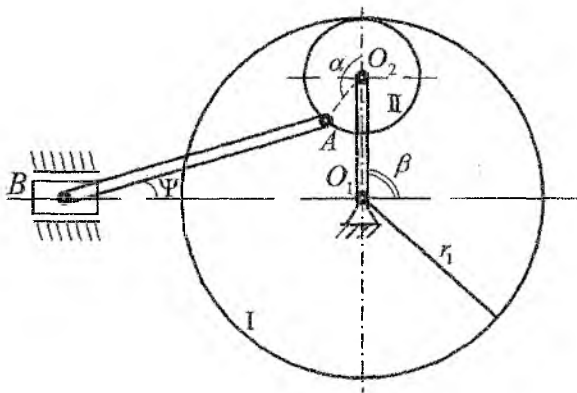


Рисунок 13

Таблица 23

№	α	β	ψ	r_1	r_2	ω
1	90°	180°	15°	50	20	3
2	240°	180°	330°	45	15	2π
3	270°	150°	15°	40	10	6
4	210°	135°	45°	50	20	5
5	90°	180°	15°	60	20	8
6	0°	90°	30°	60	15	4π
7	270°	90°	30°	50	20	3π
8	120°	90°	30°	40	10	2π
9	60°	180°	15°	45	15	2
10	240°	120°	45°	50	20	4

Задача К16. В задаче К11 определить ускорения точек А, В и D, если кривошип OA вращается с угловым ускорением ε (с^{-2}) (рис. 9, табл. 19 и 24).

Таблица 24

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε	$0,5\pi$	$0,4\pi$	$0,6\pi$	$0,4\pi$	$0,8\pi$	$0,5\pi$	π	$0,6\pi$	$0,6\pi$	π

Задача К17. В задаче К12 определить ускорения точек В и D, если кривошип OA вращается с угловым ускорением ε (с^{-2}) (рис. 10, табл. 20 и 25).

Таблица 25

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε	$0,4\pi$	π	$0,5\pi$	$0,4\pi$	$0,2\pi$	2π	π	$0,8\pi$	$0,5\pi$	$0,6\pi$

Задача К18. В задаче К13 определить ускорения точек В, С и D, если кривошип OA вращается равномерно.

Задача К19. В задаче К10 определить ускорение точки В, угловое ускорение звена АВ и ускорение точки С, если кривошип ОА вращается с угловым ускорением ε (с^{-2}) (рис.8, табл. 18 и 26).

Таблица 26

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε	$\pi/2$	$0,4\pi$	$0,6\pi$	$0,8\pi$	π	$0,4\pi$	$0,6\pi$	$0,4\pi$	$0,3\pi$	π

Задача К20. В задаче К14 определить угловое ускорение колеса II и ускорение точек А и В, если кроме данных указанных в задаче 14, задано угловое ускорение ε (с^{-2}) (рис. 12, табл. 22 и 27).

Таблица 27

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε	2	3	$0,5\pi$	$0,5\pi$	π	$0,4\pi$	2	1	$0,2\pi$	$0,1\pi$

Задача К21. В задаче К9 определить ускорения точек А, В, и D, если кривошип O_1A вращается равномерно (рис. 7, табл. 17).

Задача К22. Диск радиусом R вращается вокруг своего неподвижного вертикального диаметра с угловой скоростью ω . По ободу этого диска перемещается точка М так, что угол $O_1OM = \varphi = f(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент t_1 (рис.14, табл. 28, где φ – в рад, R – в см, t_1 - сек, ω - в с^{-2}).

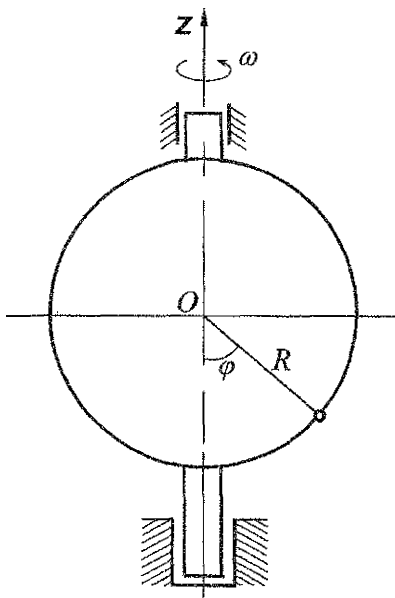


Рисунок 14

Таблица 28

№	φ	R	ω	t_1
1	$\frac{2}{5}\pi^2$	15	$\pi \sin \pi t$	2.5
2	$\frac{\pi}{21}(8t-t^2)$	21	$4t^2-3t$	1
3	$\frac{\pi}{4}t^2$	10	$8t-t^2$	3
4	$\pi \sin \frac{\pi}{3}t$	15	$\cos \frac{\pi}{2}t$	2.5
5	$\frac{2}{5}\pi \cos^2 \frac{\pi}{6}t$	18	t^2+2t	2
6	$\pi(t^2+t)$	20	$2t^2-5$	3.5
7	$\frac{3}{4}\pi \sin \frac{\pi}{4}t$	12	t^2+1	2
8	$\frac{2}{9}\pi^3$	18	$\pi \sin \pi t$	1.5
9	$\frac{2}{9}\pi \sin \frac{\pi}{6}t$	18	$4t^2-3$	3
10	$\frac{2}{3}\pi \sin^2 \frac{\pi}{4}t$	12	$2t-3$	2

Задача К23. Прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC=a и углом α вращается вокруг катета AC с угловой скоростью ω . По его гипотенузе перемещается точка M по закону $CM = s = f(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент t_1 (рис. 15, табл. 29, длины заданы в см, t_1 - сек, ω - в c^{-1}).

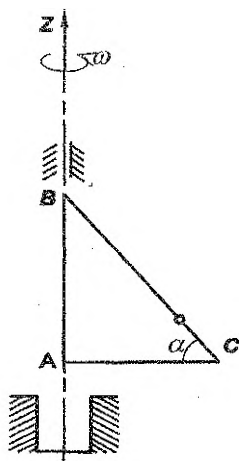


Рисунок 15

Таблица 29

№	a	α	s	ω	t_1
1	48	60°	$2t^3$	$\pi \sin^2 \frac{\pi}{2} t$	2
2	50	45°	$25 + 5 \cos \frac{\pi}{4} t$	$2\pi^2 - \pi$	2
3	36	60°	$4t^2$	$\pi \cos^2 \frac{\pi}{3} t$	2.5
4	60	30°	$\pi^2 - 2\pi$	$2\pi \cos \frac{\pi}{4} t$	5
5	60	45°	$1.5\pi^2$	$\pi \sin^2 \frac{\pi}{4} t$	3
6	80	45°	$5 \cos^2 \frac{\pi}{2} t$	$2t - t^2$	2
7	80	45°	$20t - 4t^2$	$\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} t$	2.5
8	40	30°	$20 + 5 \sin \frac{\pi}{2} t$	$4t^2 + 2t$	1.5
9	24	30°	$6 \sin^2 \frac{\pi}{4} t$	$2\pi + \pi^2$	3
10	98	60°	$2.4t^3$	$\pi \cos^2 \frac{\pi}{4} t$	3

Задача К24. В кулиском механизме при качании кривошипа ОС вокруг неподвижной оси О, перпендикулярной к плоскости чертежа, ползун А, перемещаясь вдоль кривошипа ОС, приводит в движение стержень АВ, соединенный с ползуном А шарнирно и перемещающийся в наклонных направляющих, образующих с осью Ох угол α . Определить скорость и ускорение стержня АВ в момент t_1 , если заданы угол поворота кривошипа φ , отсчитываемый от положительного направления оси Ох как функция времени t , и расстояние h (рис. 16, табл. 30, где h — в см, φ — в рад).

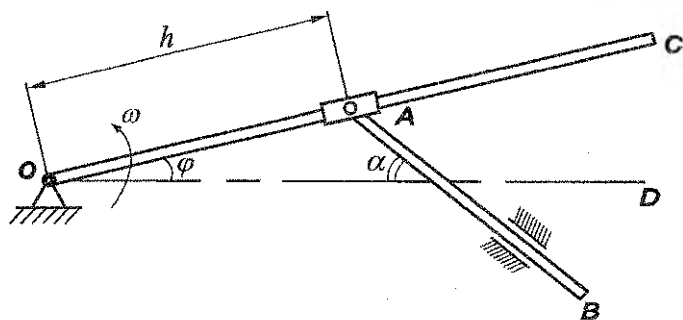


Рисунок 16

Таблица 30

№	h	α	φ	t_1
1	20	0°	$\frac{\pi}{3} \cos^2 \frac{2}{3} \pi$	4
2	30	60°	$\frac{4}{9} \pi \cos^2 \pi$	$\frac{7}{6}$
3	16	90°	$\frac{\pi}{3} \cos^2 \pi$	1
4	40	45°	$\frac{\pi}{4} \sin^2 \pi$	$\frac{3}{2}$
5	24	45°	$\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} t$	3
6	20	60°	$\frac{\pi}{2} \cos \pi$	$\frac{1}{3}$
7	24	30°	$\frac{\pi}{3} \sin^2 \pi$	$\frac{2}{3}$
8	30	90°	$\frac{\pi}{2} \cos 2\pi$	$\frac{5}{6}$
9	28	0°	$\frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} t$	1.5
10	18	90°	$\pi \sin^2 \frac{2}{3} \pi$	3.5

Задача К25. Кран вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi = f_1(t)$. Крайовая тележка перемещается по закону $s = f_2(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение тележки в момент t_1 (рис. 17, табл. 31, где φ — в рад, а t — в сек).

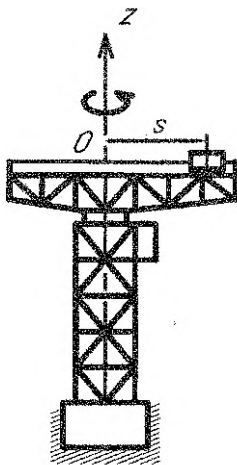


Рисунок 17

Таблица 31

№	φ	s	t_1
1	$8\pi + \cos \frac{\pi}{4} t$	$t^3 - 1.5t^2$	3
2	$3\pi^2 - 2\pi t$	$0.5\pi t + \cos \frac{\pi}{3} t$	2
3	$4\pi \sin^2 \frac{2}{3} \pi t$	$2t - 0.1t^2$	2
4	$2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2} t$	$0.2(t^2 - 2t + 6)$	2
5	π^3	$6\pi t + 0.5 \cos \frac{\pi}{4} t$	1
6	$\frac{\pi}{2} t^2 + 3\pi t$	$0.5\pi t + \sin \frac{\pi}{3} t$	2
7	$2\pi t^2 + \frac{\pi}{2} t$	$0.2t^3 - 0.4t^2$	3
8	$2\pi t + \pi \sin \frac{\pi}{3} t$	$0.1(t^3 - 3t^2 + 5)$	4
9	$\pi^2 + \frac{\pi}{2} t$	$1.2\pi t + \sin \frac{\pi}{2} t$	3
10	$4\pi^2 - \pi t$	$0.2t + 2 \cos \frac{\pi}{2} t$	3

Задача К26. Прямоугольник ABCD вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = f_1(t)$. По его диагонали AC перемещается точка M по закону $AM = s = f_2(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент t_1 сек, если диагональ AC составляет с осью вращения угол α (рис. 18, табл. 32, где s — в см, а угол φ — в рад).

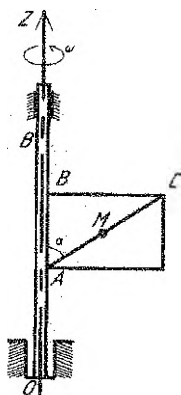


Рисунок 18

Таблица 32

№	φ	s	t_1	α
1	$\frac{\pi}{2}t^2 + \pi t$	$2t^2 + 5$	2	45°
2	$\pi \cos \frac{\pi}{2}t$	$5t^2 + 2t$	3	30°
3	$\pi t + \cos \frac{\pi}{3}t$	$4t^2 + 2t$	3	30°
4	$\frac{\pi}{2}t^2$	$\pi + 6\pi \cos \frac{\pi}{3}t$	4	60°
5	$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4}t$	$\pi + 4 \cos \frac{\pi}{3}t$	2	45°
6	π^3	$5 \sin^2 \frac{\pi}{4}t$	5	60°
7	$2\pi^2$	$2 \cos^2 \frac{\pi}{2}t$	4	30°
8	$\pi^3 - \frac{\pi}{2}t^2$	$\pi t + \pi \sin \pi t$	3	45°
9	$\pi + 5 \sin \frac{\pi}{3}t$	$4t^2 + 2t$	2	60°
10	$3\pi^2$	$4t^2 + 5$	1.5	45°

Задача К27. Диск вращается вокруг своего горизонтального диаметра с угловой скоростью ω . По его диаметру, наклоненному к оси вращения под углом α , перемещается точка М по закону $OM = s = f(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент t_1 (рис. 19, табл. 33, где s — в см, ω — в с^{-1} , t — в сек).

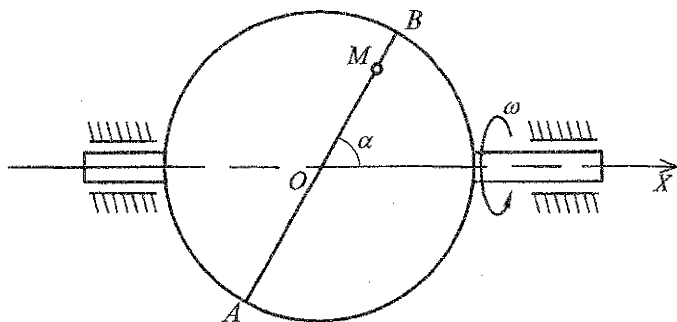


Рисунок 19

Таблица 33

№	s	α	ω	t_1
1	$\pi(9t+t^2)$	45°	$2t^2$	1
2	$\pi(16t-t^2)$	60°	$2t^3$	1
3	$\frac{\pi}{8}t^2$	30°	$\pi \sin^2 \frac{\pi}{4}t$	2
4	$\pi \cos^2 \frac{\pi}{2}t$	45°	$4\pi - \frac{\pi^2}{2}$	2.5
5	$\frac{2}{9}\pi^3$	30°	$10\cos \frac{\pi}{3}t$	2
6	$10\cos \frac{\pi}{3}t$	90°	$t^2 - 2t$	0.75
7	$10\sin \frac{\pi}{2}t$	45°	π^2	0.5
8	$5+5\sin 2\pi t$	90°	$4t^2 + t$	0.75
9	$2\pi \sin^2 \frac{\pi}{4}t$	60°	$8t - t^2$	3
10	$3\sqrt{2}t^2$	30°	$\frac{2}{3}\pi t^2$	3

Задача К28. Точка М движется по образующей конуса по закону $s = OM = f_1(t)$. Конус вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = f_2(t)$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент t_1 , если угол $MOA = \alpha$ (рис. 20, табл. 34; s задано в см, t — в сек, ω — в c^{-1}).

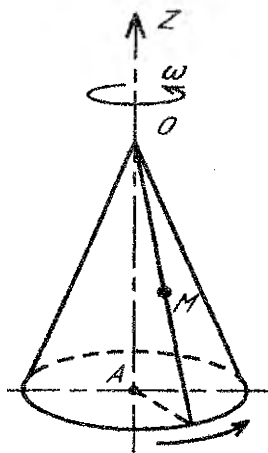


Рисунок 20

Таблица 34

№	ω	s	α	t_1
1	$4t^2 - 5t$	$4\pi \sin \pi t + 2\pi t$	30°	1.5
2	$4t - t^3$	$\pi t^2 \cdot \sqrt{2}$	45°	2
3	$\pi - \frac{\pi^2}{2}$	$\sqrt{3}(10t - t^2)$	60°	2.5
4	$t + t^2$	$6t^3 - 2t^2$	30°	2.5
5	$\frac{t^3 - t^2}{3}$	$\sqrt{2}(10\pi t + \pi \cos \pi t)$	45°	2.5
6	$6(1 + \frac{3}{1+4t})$	$\sqrt{3}(6t^3 - 2t)$	60°	2
7	$4(2 + \frac{3}{1+2t})$	$2\pi t + 4\pi \cos \frac{\pi t}{2}$	30°	3
8	$4t^2$	$6\pi \cos^2 \frac{\pi}{3} t$	45°	4
9	$\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} t$	$6\pi \sin^3 \frac{\pi}{3} t$	45°	4
10	$\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} t$	$0.8\pi^3 + 0.1\pi t^2$	60°	3

Задача К29. Кулиса ОС кулисного механизма вращается вокруг неподвижной оси О, оставаясь в верхней полуплоскости. Вдоль кулисы перемещается ползун А, соединенный шарнирно с изогнутым стержнем АВD, который движется поступательно, причем часть стержня BD перемещается по горизонтальной прямой, проходящей через точку О. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение стержня АВ при заданном значении угла поворота φ кулисы ОС, если при этом значении угла φ угловая скорость кулисы равна $\omega \cdot e^{-1}$, ее угловое ускорение $\varepsilon=0$, $AB = L$ см и угол $ABD=150^\circ$.

Указание. Точка А в абсолютном движении перемещается по горизонтальной прямой, отстоящей от точки О на расстоянии $AE=L \cdot \sin 30^\circ = \text{const}$. Длина ОА определяется по теореме синусов из треугольника ОАВ (рис. 21, табл. 35).

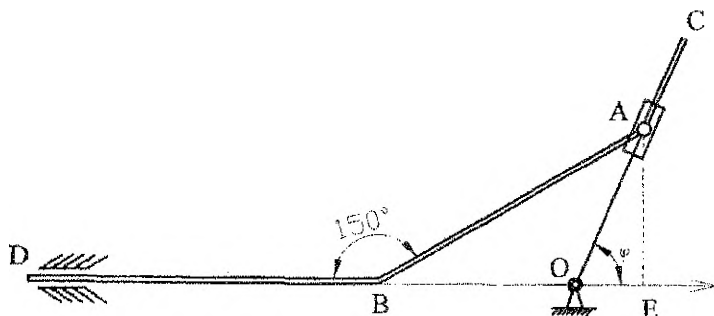


Рисунок 21

Таблица 35

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	64	30	40	60	50	32	40	50	24	30
ω	2π	4π	4π	2π	3π	3π	2π	3π	2π	5π
φ	120°	150°	60°	60°	120°	45°	45°	90°	135°	90°

Задача К30. Механизм состоит из двух параллельных валов O и O_1 , кривошипа OA и кулисы O_1B . Кривошип $OA = r$ (см) вращается с постоянной угловой скоростью ω (c^{-1}). Конец A кривошипа соединен шарнирно с ползуном, скользящим вдоль прорези кулисы. Определить угловую скорость и угловое ускорение кулисы в момент t_1 сек, если расстояние $OO_1 = a$ (см) (рис. 22, табл. 36).

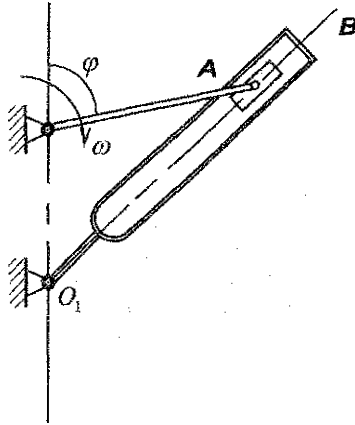


Рисунок 22

Таблица 36

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	60	60	60	$40\sqrt{2}$	60	60	40	60	40	60
r	80	$30\sqrt{3}$	30	40	30	30	80	60	30	80
φ	0°	150°	120°	135°	240°	270°	180°	60°	90°	60°
ω	3π	5	π	2π	8	2π	8	3π	6	2π

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется законом или уравнением движения точки по данной траектории?
2. Какие применяются в кинематике способы задания движения точки и в чем они состоят?
3. Как направлена и чему равна по величине скорость точки в данный момент?
4. Какая существует зависимость между радиусом-вектором движущейся точки и вектором скорости этой точки?
5. Чему равны проекции скорости точки на оси декартовых координат?
6. Что называется ускорением точки?
7. Какая зависимость существует между радиусом-вектором движущейся точки и вектором ускорения этой точки?
8. Чему равны проекции ускорения на оси декартовых координат?
9. Какие оси называются естественными осями?
10. Чему равны проекции ускорения точки на естественные оси?
11. В каких движениях равны нулю касательное ускорение, нормальное ускорение точки?
12. Какое движение твердого тела называется поступательным?
13. В чем состоит теорема о движении точек твердого тела, движущегося поступательно?
14. Что называется законом, или уравнением, вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси?
15. Что называется угловой скоростью тела, угловым ускорением?
16. Какое вращение твердого тела называется равномерным, равнопеременным?
17. Какая зависимость существует между угловой скоростью вращающегося тела и числом его оборотов в минуту?
18. Как изображается угловая скорость тела в виде вектора?
19. Как выражается зависимость между угловой скоростью вращающегося тела и линейной скорости какой-нибудь точки этого тела?
20. Как выражается касательное и центростремительное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
21. Каково геометрическое место точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, ускорения которых имеют в данный момент одинаковую величину?
22. Будет ли поступательным движение шатуна в кривошипно-шатунном механизме?
23. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным? Сколькими уравнениями оно определяется?
24. На какие два движения можно разложить плоскопараллельное движение тела?

25. Что называется мгновенным центром вращения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости?
26. Как можно графически найти положение мгновенного центра вращения плоской фигуры, если известны скорости двух точек этой фигуры?
27. Каковы будут скорости точек плоской фигуры в том случае, когда мгновенный центр вращения этой фигуры окажется в бесконечности?
28. Даны две точки А и В движущейся плоской фигуры, причем известно, что скорость точки А перпендикулярна к АВ. Как направлена скорость точки В?
29. Что называется мгновенным центром ускорений?
30. Суммой каких трех составляющих ускорений является ускорение произвольно выбранной точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости?
31. Угловая скорость плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, постоянна. Заданы ускорения a_A и a_B точек А и В этого тела. Как построить мгновенный центр ускорений?
32. В чем состоит теорема о перемещении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
33. В чем состоит теорема о перемещении твердого тела?
34. Как выражаются проекции на координатные оси скорости какой-нибудь точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку?
35. Тело движется вокруг неподвижной точки с постоянной угловой скоростью. Как направлен вектор углового ускорения в этом случае?
36. Сумме каких двух составляющих скоростей равна скорость какой-нибудь точки свободного твердого тела в общем случае?
37. Какое движение точек называется относительным?
38. Какое движение называется переносным?
39. Какая скорость называется относительной скоростью точки?
40. Как определяется переносная скорость точки?
41. В чем состоит теорема о сложении скоростей?
42. Какие ускорения точки называются относительным, переносным?
43. Как определяется абсолютное ускорение точки в том случае, когда переносное движение является поступательным, вращательным?
44. В каких случаях кориолисово ускорение равно нулю?
45. Чему равна проекция кориолисова ускорения движущейся точки на направление относительной скорости этой точки?

Учебное издание

Составители:

Батрак Валентин Васильевич

Сазонов Михаил Иванович

Хвисевич Виталий Михайлович

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению контрольных работ
по теоретической механике**

Часть 2

«КИНЕМАТИКА»

**для студентов строительных специальностей
заочной формы обучения**

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 06.01.2015 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 092. Тираж 75 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.