МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

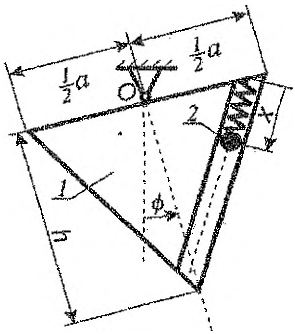
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание и методические указания к выполнению расчетно-графической работы по теоретической механике

для студентов дневной формы обучения



Брест 2014

УДК 531.8

Теоретическая механика является одной из фундаментальных дисциплин при подготовке инженеров. Для закрепления теоретического материала и приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-графические работы по основным разделам курса.

Настоящие методические указания содержат индивидуальные задания для выполнения расчетно-графической работы по теме: «Динамика относительного движения материальной точки», исходные данные и пример решения. В указаниях приведены также требования к оформлению расчетно-графической работы.

Основная цель методических указаний - оказание помощи студентам при изучении теоретической механики, активизация самостоятельной работы.

Составители: А.Е. Желткович, ст. преподаватель, к.т.н.
А.И. Веремейчик, доцент
В.М. Хвисевич, доцент, к.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В своей трудовой деятельности квалифицированный инженер должен обладать элементами фундаментальных знаний по общетехническим дисциплинам. К таким дисциплинам относится теоретическая механика. Задания и методические указания - один из важных разделов курса, посвященного изучению движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета. Методические указания позволяют студентам изучить и применить теоретический материал для решения практических задач по динамике относительного движения материальной точки.

В методических указаниях приведены требования к оформлению расчетно-графической работы и пример её выполнения.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Расчетно-графическая работа выполняется на отдельных листах формата А4.

2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.

3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «БрГТУ».

4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Относительным движением материальной точки называется движение точки в подвижной системе координат. Пусть $O_1x_1y_1z_1$ - неподвижная система координат; $Oxyz$ - подвижная система координат (рисунок 1).

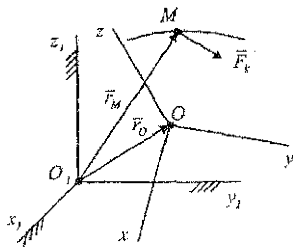


Рисунок 1

Второй закон динамики в системе $O_1x_1y_1z_1$

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k , \tag{1}$$

где $\overline{a}$ - абсолютное ускорение точки, равное геометрической сумме переносного $\overline{a}_e$, относительного $\overline{a}_r$ и кориолисова $\overline{a}_C$ ускорений, т.е.

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_C . \tag{2}$$

Подставив (1) в (2), получим запись второго закона динамики в системе $Oxyz$, т.е. в неинерциальной системе отсчета:

$$m\overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_C , \tag{3}$$

где $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ и $\overline{\Phi}_C = -m\overline{a}_C$ имеют размерность силы и называются переносной и кориолисовой силами инерции.

Проектируя уравнение (1.16) на подвижные оси $Oxyz$,получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в декартовых осях:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{C_x};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{C_y};$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{C_z}, k = 1,...,n. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно также записать в проекциях на естественные оси.

Если точка в подвижной системе покоится, то $\overline{a}_r = 0$, $\overline{V}_r = 0$ и $\overline{\Phi}_C = -2m(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r) = 0$, где ω_e - угловая скорость переносного вращения, V_r - относительная скорость точки. Тогда (3) примет вид уравнения относительного покоя точки:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e = 0 . \tag{5}$$

Например, рассмотрим тело, покоящееся на земной поверхности (рисунок 2). На тело действуют силы: $\overline{P}$— сила притяжения тела к центру Земли, $\overline{\Phi_e^n}$ - центробежная сила инерции и нормальная реакция $\overline{N}$. Силы $\overline{P}$ и $\overline{\Phi_e^n}$ обусловливают давление тела на поверхность Земли и их равнодействующая $\overline{G}$ представляет вес тела, т.е. вес тела $\overline{G} = \overline{P} + \overline{\Phi_e^n}$.

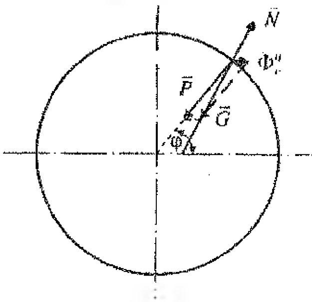


Рисунок 2

Поэтому при решении задач статики, принимая систему координат, связанную с Землей, за неподвижную, никаких поправок на вращение Земли не вводится. При движении тел по земной поверхности или вблизи ее с некоторой относительной скоростью $\overline{V_r}$, будет возникать кориолисово ускорение и соответствующая ему сила инерции $\Phi_C = 2m\omega_e V_r \sin\left(\overline{\omega_e}, \overline{V_r}\right)$ (рисунок 3).

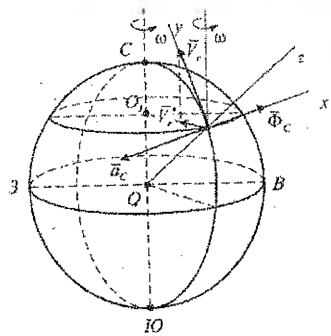


Рисунок 3

В северном полушарии при движении тела сила $\overline{\Phi_C}$ стремится отклонить тело вправо от направления движения. Этим объясняется боковое давление поезда на рельсы, подмыв правого берега рек, отклонение от вертикали к востоку свободно падающего тела.

Считая систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной, мы тем самым исключаем из числа сил, действующих на движущееся тело, кориолисову силу инерции, что не всегда оправданно.

Пример 1.

Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рисунок 4). При $t \le 0$ материальная точка М находится в точке О. Составить дифференциальное уравнение движения тяжелой материальной точки M вдоль направляющей OA.

Решение:

1. Вращение пластинки — переносное движение. Движение точки M по пластинке — относительное движение.

2. Свяжем подвижную систему координат Oxy с пластинкой, выбрав начало в точке О и направив ось x в сторону движения точки.

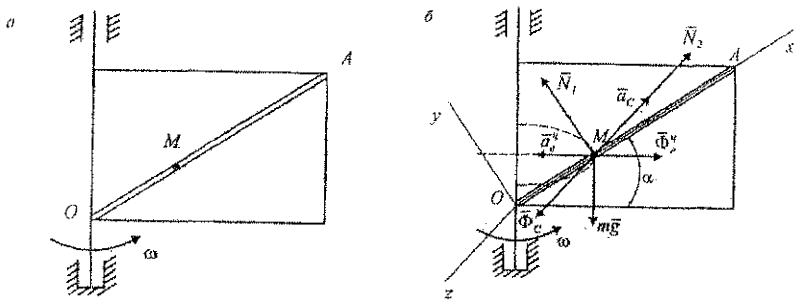


Рисунок 4

3. Изобразим точку в произвольном положении на оси x и покажем силы, действующие на нее: силу тяжести $m\bar g$, переносную $\bar Ф_e^ц$ и кориолисову $\bar Ф_C$ силы инерции, уравновешивающие их нормальные реакции $\bar N_1$ и $\bar N_2$ (рисунок 4б).

4. Запишем основное уравнение динамики относительного движения точки в векторной форме и затем в проекции на ось x.

$$m\bar a_r = m\bar g + \bar N_1 + \bar N_2 + \bar Ф_e^ц + \bar Ф_C.$$

Учитывая, что $Ф_e^ц = ma_e^ц = m\omega^2 x\cos\alpha$, получим в проекции на ось x%

$m\ddot x = -mg\sin\alpha + Ф_e^ц\cos\alpha$, или $m\ddot x = -mg\sin\alpha + m\omega^2 x\cos^2\alpha$.

Сократив на m и обозначив $\omega^2\cos^2\alpha = k^2$, получим: $\ddot x - k^2 x = -g\sin\alpha$.

Пример 2.

Используя условие примера 1, определить закон движения точки M по пластинке, если в начальный момент точка находилась на расстоянии a от начала координат и имела скорость, равную нулю.

Решение:

Полученное в примере 1 дифференциальное уравнение движения материальной точки является неоднородным. Его решение

$x = \bar x + x^*$,

где $\bar{x}$ — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} - k^2 x = 0$.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения

$Z^2 - k^2 = 0$.

Его корни $Z_{1,2} = \pm k$ — вещественные разные. Поэтому

$$\bar{x} = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

x^* - частное решение неоднородного уравнения. Его решение ищем в виде правой части дифференциального уравнения, т.е. $x^* = C_3 = \text{const}$. Так как $\ddot{x}^* = 0$, то

$$-k^2 C_3 = -g \sin\alpha \Rightarrow C_3 = \frac{g}{k^2} \sin\alpha.$$

Тогда

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{g}{k^2} \sin\alpha.$$

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}.$$

C_1 и C_2 найдем с учетом начальных условий движения: при $t = 0$ $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$

$$x_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{g}{k^2} \sin\alpha = a,$$

$$\dot{x}_0 = C_1 k e^0 - C_2 k e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = C.$$

$$2C + \frac{g}{k^2} \sin\alpha \Rightarrow C = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g}{k^2} \sin\alpha\right).$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g}{k^2} \sin\alpha\right)\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) + \frac{g}{k^2} \sin\alpha.$

Примечание *Переносная и кориолисова силы инерции могут обозначаться по-другому:* $\bar{F}^{ин}_{пер}$ *и* $\bar{F}^{ин}_{кор}$ *соответственно.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определяется модуль и направление переносной и кориолисовой сил инерции материальной точки?

2. В чем состоит отличие основного закона динамики относительного и абсолютного движений материальной точки?

3. Круговой конус вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. По каналу вдоль образующей перемещается шарик массы m. Определите:

а) какое из этих двух движений является относительным?

б) переносную и кориолисову силы инерции, если конус вращается с угловой скоростью ω, угол при вершине конуса равен 2α, шарик находится на расстоянии a от вершины конуса и движется вниз со скоростью V.

4. В каких случаях при переносном вращательном движении кориолисова сила инерции будет равна нулю?

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Динамика относительного движения материальной точки

Точка (шарик) М, прикрепленный к пружине закреплённой в точке О, перемещается по цилиндрическому каналу тела А. Тело А равномерно вращается $(\omega = const)$ вокруг неподвижной горизонтальной оси x_1 или вертикальной оси z_1. В момент времени $t = 0$ точка, находившаяся в покое, начинает движение при заданных начальных условиях x_0, V_0.

Для групп факультета инженерных систем и экологии при заданном значении угловой скорости получить закон относительного движения точки *x=x(t)*. Определить амплитуду *a* и период T_1 собственных колебаний, а так же период биений T_2. Определить координату *x* и скорость *V* точки, а также давление точки на стенку канала *N* в заданный момент времени $t = t_1$. Построить графики *x=x(t)* для интервалов $[0,T_1]$ и $[0,T_2]$.

Для групп строительного факультета так же построить график *V=V(t)* и *N=N(t)* для интервала $[0,T_1]$. Определить, при каких значениях угловой скорости $\omega_{кр}$ движение точки перестаёт быть колебательным и точка будет совершать непериодическое движение. Принять значение угловой скорости $\omega \geq \omega_{кр}$ *для непериодического движения и найти уравнение движения точки* $x^*=x^*(t)$ за время прохождения точкой всего канала при непериодическом движении.

В схемы с номерами №5, 19, 21, 30 начало вращения несущего тела считать от горизонтального положения. Для схем с номерами №1, 2, 5, 7, 9, 10, 15, 17, 18, 22, 23, 27 – 29, размер *a* тела *A*, радиус *r* тела *A* в схемах № 6, 8, 13, 14, 16, 19, 21, 24, 25, 30, длина *l* стержня *A* в схемах № 3, 26, или размер *h* тела *A* в схемах 4, 11, 12, 19, 20, 29 определить по формуле $a,R,l,h = x_0 \cdot 2$.

Для групп машиностроительного факультета дополнительно построить графики перемещения $x^*=x^*(t)$, а также совмещённый график реакции стенки канала *N=N(t)* (при периодическом движении) и $N^*=N^*(t)$ (в случае непериодического движения) – для интервала времени $[0,t_2]$.

В задании приняты следующие обозначения: *m* – масса точки; **ω** – постоянная угловая скорость тела *A*; *c* – коэффициент жесткости пружины; l_0 – длина недеформированной пружины; x_0 – начальная координата точки; V_0 – начальная скорость точки; t_1 – время, для которого производятся необходимые вычисления.

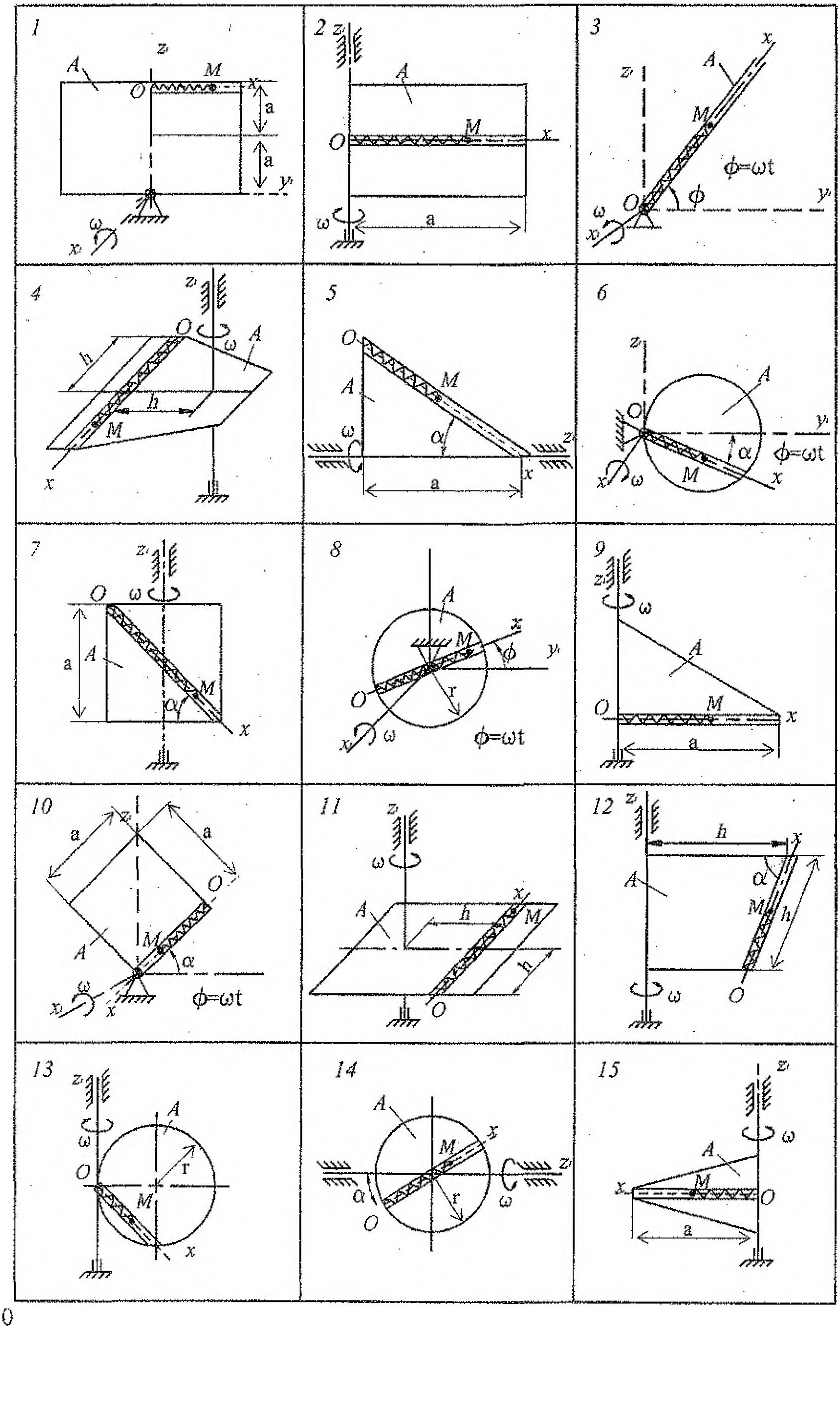
Числовые данные для каждого варианта либо выбираются по таблице 1, *либо формируются студентом самостоятельно*. При этом время t_1 может быть изменено по усмотрению преподавателя. Схемы выбираются в соответствии с порядковым номером студента в группе по рисунку 5.

В случае самостоятельного расчёта исходных данных необходимо следующие приведённые в примере параметры: *m*, **ω**, l_0, x_0, V_0 умножить на коэффициент группы (например, для группы с первым номером 8 $k_{гр.} = 8/10 = 0{,}8$.

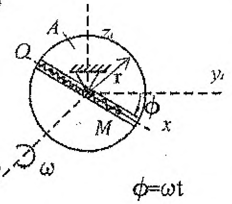
Тогда $x_0 = x_{0(пример)} \cdot k_{гр.} = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72 м$), а параметр c ещё раз умножить на коэффициент, соответствующий порядковому номеру студента в группе (например, если порядковый номер студента №8, $k_{ст.} = 8/10 = 0{,}8$. Тогда $c = \left(c_{(пример)} / k_{гр}\right) \cdot k_{ст.} = \left(9 / 0{,}8\right) 0{,}8 = 59 \frac{Н}{м}$).

Таблица 1 – Числовые данные

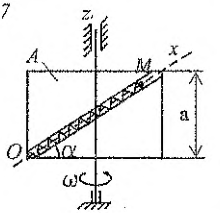
№ п/п	m, кг	ω, рад/с	c, Н/м	l_0, м	x_0, м	V_0, м/с	α, град
1	0,01	9	1	0,05	0,01	0	30
2	0,02	8	1,5	0,06	0,02	0,01	-
3	0,03	7,5	2	0,07	0,03	0,02	-
4	0,04	7	2,5	0,08	0,04	0,03	-
5	0,05	6,5	3	0,09	0,05	0,04	30
6	0,06	6	3,5	0,1	0,15	0,05	20
7	0,07	5,5	4	0,11	0,16	0,06	45
8	0,08	5	4,5	0,12	0,17	0,07	-
9	0,09	4,5	5	0,13	0,18	0,08	-
10	0,1	7	6	0,15	0,19	0,09	-
11	0,11	7,2	7	0,16	0,2	0,1	-
12	0,12	7,4	8	0,17	0,22	0,15	60
13	0,13	7,6	9	0,18	0,23	0,2	-
14	0,14	7,8	10	0,19	0,24	0,25	30
15	0,15	8	11	0,2	0,25	0,3	-
16	0,16	8,1	12	0,21	0,3	0,35	-
17	0,17	8,2	13	0,22	0,35	0,4	30
18	0,18	8,3	14	0,23	0,4	0,45	-
19	0,19	8,4	15	0,24	0,45	0,5	30
20	0,2	8,5	16	0,25	0,5	0,55	45
21	0,21	8,6	18	0,26	0,49	0,6	60
22	0,22	8,7	20	0,27	0,48	0,7	-
23	0,23	8,8	22	0,28	0,47	0,8	45
24	0,24	8,9	24	0,29	0,46	0,9	-
25	0,25	9	26	0,3	0,45	1	-
26	0,26	9,2	28	0,31	0,4	1,5	-
27	0,27	9,4	30	0,32	0,3	2	45
28	0,28	9,6	32	0,33	0,2	2,5	-
29	0,29	9,8	34	0,34	0,1	3	-
30	0,3	10	36	0,35	0,05	4	45


1
A
M
O
a
a
2
A
M
O
a
3
A
M
O
ϕ=ωt
4
A
O
M
h
h
5
O
A
M
α
a
6
A
O
M
α
ϕ=ωt
7
O
A
M
a
α
8
A
M
O
r
ϕ=ωt
9
A
O
M
a
10
a
a
A
O
M
α
ϕ=ωt
11
A
h
M
O
h
12
h
A
α
M
h
O
13
A
O
r
M
14
A
M
α
O
r
15
A
M
O
a

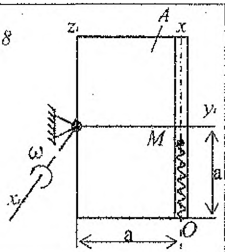
16



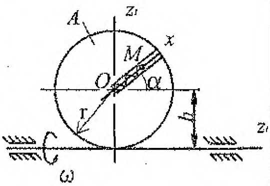
17



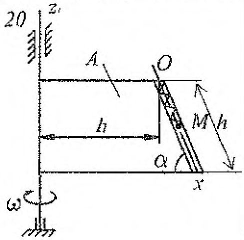
18



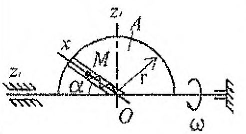
19



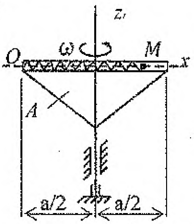
20



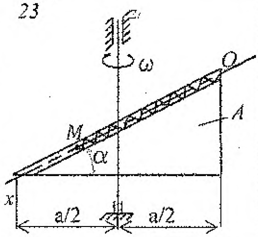
21



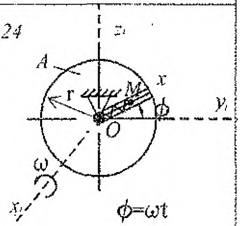
22



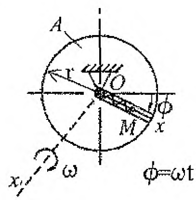
23



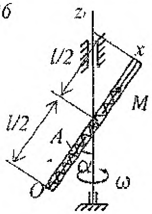
24



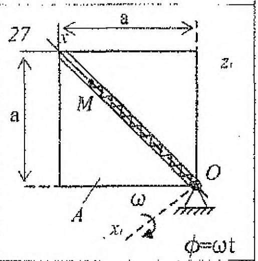
25



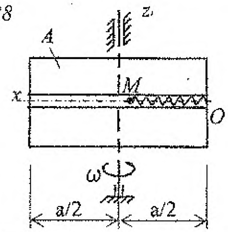
26



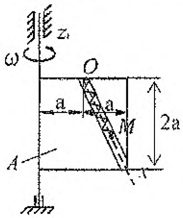
27



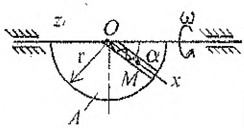
28



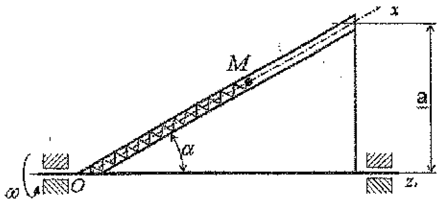
29



30



ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ



$m = 0.09кг;$

$\omega = 9 рад/с;$

$c = 0.1 Н/см;$

$l_0 = 0.2м;$

$\alpha = 30^0;$

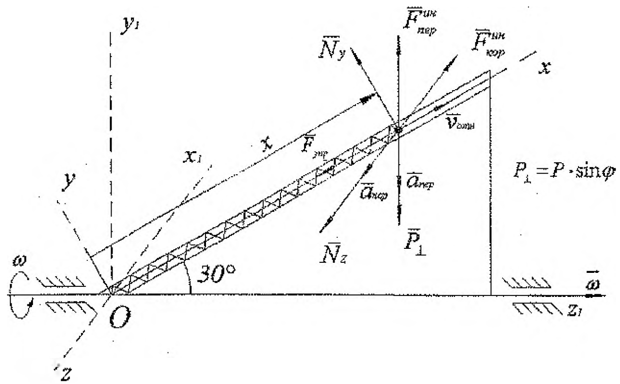
$x_0 = 0.9м;$

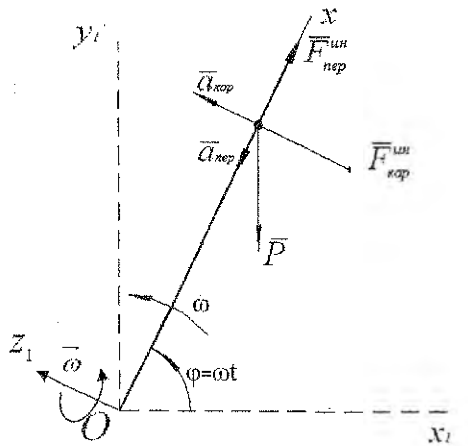
$v_0 = 0.7м/с;$

$t_1 = 0.16с;$

Рисунок 6 – Расчетная схема

Решение





Вращение пластинки вокруг оси z_1 является для точки М переносным движением, движение точки по каналу пластинки - относительным движением. Свяжем с пластинкой подвижную систему отсчета $Oxyz$, выбрав начало в точке О крепления пружины и направив ось x вдоль оси канала. Начало отсчёта оси x примем в точке О. Ось y – в плоскости рисунка.

Приложим к точке вес $\overline{P}=m\overline{g}$, силу упругости пружины $\overline{F}_{упр}$ и реакцию стенки канала $\overline{N}$. Так как стенка гладкая (отсутствует трение), то $\overline{N}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси x (плоскость Oyz). Направление ее неизвестно, поэтому разложим $\overline{N}$ на составляющие $\overline{N}y$, $\overline{N}z$ в направлении осей y, z.

Так как система отсчета $Oxyz$ неинерциальная (пластинка вращается), для исследования относительного движения точки к силам, действующим на точку, добавим переносную $\overline{F}^{ин}_{пер}$ и кориолисову $\overline{F}^{ин}_{кор}$ силы инерции.

$$\overline{F}^{ин}_{пер}=-m\overline{a}_{пер};\ \overline{F}^{ин}_{кор}=-m\overline{a}_{кор};\ \overline{F}_{упр}=c(x-l_0).$$

Вектор $\overline{a}_{кор}$ перпендикулярен плоскости векторов $\omega_{пер}$ и $\overline{V}_{отн}$, то есть, параллелен оси z.

$$a_{кор}=2\omega_{пер}\cdot V_{отн}\sin 30^{\circ};\ \omega_{пер}=\omega;\ V_{отн}=\dot{x}$$

$$a^{n}_{пер}=\omega^2 x\sin\alpha$$

Составим дифференциальные уравнения относительного движения точки в проекциях на оси $Oxyz$:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-P\sin\varphi\sin\alpha-F_{пр}+F^{ин}_{пер}\sin\alpha \\ 0=N_y-P\sin\varphi\cos\alpha+F^{ин}_{пер}\cos\alpha; \quad (*) \\ 0=N_z-P\cos\varphi-F^{ин}_{кор} \end{cases}$$

При этом учтено, что $a_{отн.y}=0, a_{отн.z}=0$ (движение вдоль оси x).

Из второго и третьего уравнений определяется реакция направляющих N.

Для определения $F^{ин}_{пер}$ и $F^{ин}_{кор}$ необходимо найти решение первого уравнения системы. Оно принимает вид:

$$m\ddot{x}=-mg\sin\alpha\sin\omega t-c(x-l_0)+m\omega^2 x\sin^2\alpha$$

или

$$\ddot{x}+\left(\frac{c}{m}-\omega^2\sin^2\alpha\right)x=-g\sin\alpha\sin\omega t+\frac{cl_0}{m}.$$

При заданных числовых значениях

$$\left(\frac{c}{m}-\omega^2\sin^2\alpha\right)=\frac{0.1\cdot 100}{0.09}-9^2\cdot 0.5^2=90.561\ c^{-2}$$

Так как $\left(\frac{c}{m}-\omega^2\sin^2\alpha\right)>0$, обозначим

$$\left(\frac{c}{m}-\omega^2\sin^2\alpha\right)=k^2;\ -g\sin\alpha=A^*;\ \frac{cl_0}{m}=D^*.$$

При этом

$$k=\sqrt{90.561}=9.53\ c^{-1};\ A^*=-9.81\cdot 0.5=-4.905\ м/c^2;\ D^*=\frac{10\cdot 0.2}{0.09}=22.22\ м/c^2.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{x}+k^2x=A^*\sin\omega t+D^*.$$

Это есть обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Его общее решение имеет вид:

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}$ – общее решение однородного уравнения,

x^* – частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение для данного однородного дифференциального имеет вид:

$$\lambda^2+k^2=0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2}=\pm ki.$$

Так как корни мнимые, то общее решение x_1 имеет вид:

$$\bar{x}=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Частное решение ищем в виде:

$$x^*=A\sin\omega t+D.$$

Подставив частное решение в дифференциальное уравнение, получим:

$$-A\omega^2\sin\omega t+k^2A\sin\omega t+k^2D=A^*\sin\omega t+D^*$$

или

$$(-\omega^2+k^2)A\sin\omega t+k^2D=A^*\sin\omega t+D^*.$$

Частное решение будет удовлетворять дифференциальному уравнению, если

$$(-\omega^2+k^2)A=A^*\ \text{и}\ k^2D=D^*.$$

Отсюда

$$A=\frac{A^*}{k^2-\omega^2}=\frac{-4.905}{9.53^2-9^2}=-0.5\ м;\ D=\frac{D^*}{k^2}=\frac{22.22}{9.53^2}=0.245\ м.$$

Уравнение относительного движения точки получает вид:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+A\sin\omega t+D.$$

Скорость точки

$$V=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt+A\omega\cos\omega t.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий:

при $t=0\quad x_0=0.9\ м,\quad \dot{x}_0=0.7\ м/c.$

$$\begin{cases}0.9=C_1+0.245\\0.7=9.53\cdot C2-0.5\cdot 9\end{cases}$$

отсюда

$$C_1 = 0.9 - 0.245 = 0.655\ м; \quad C_2 = \frac{0.7 + 0.5 \cdot 9}{9.53} = 0.546\ м/с.$$

А тогда

$$x = 0.655\cos 9.53t + 0.546\sin 9.53t - 0.497\sin 9t + 0.245;$$

$$\dot{x} = -6.242\sin 9.53t + 5.203\cos 9.53t - 4.736\cos 9t.$$

Представим общее решение однородного уравнения в амплитудной форме, для чего введем следующую подстановку:

$$C_1 = a\sin\beta; \quad C_2 = a\cos\beta.$$

Тогда решение примет вид:

$$x = a\sin\beta\cos kt + a\cos\beta\sin kt = a\sin(kt + \beta).$$

При этом a – амплитуда колебаний, $kt+\beta$ – фаза колебаний, β – начальная фаза колебаний.

Подставим числовые значения:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0.655^2 + 0.546^2} = 0.853\ м;$$

$$\beta = arctg\frac{C_1}{C_2} = arctg\frac{0.655}{0.546} = 0.846\ рад = 50.2°$$

Закон движения точки:

$$x = 0.853\sin(9.53t + 0.846) - 0.497\sin 9t + 0.245;$$

$$\dot{x} = 8.114\cos(9.53t + 0.846) - 4.736\cos 9t.$$

Определим координату x и скорость $\dot{x}$ в момент времени $t = t_1 = 0.16\ с$.

$$x = 0.34\ м; \qquad \dot{x} = -6.580\ м/с.$$

Строим графики движения точки за время $0 \le t \le T_1$. Где период колебаний T_1 определяется по формуле:

$$T_1 = 2\cdot\frac{\pi}{k}\ \ с.$$

График движения на интервале [0,T]

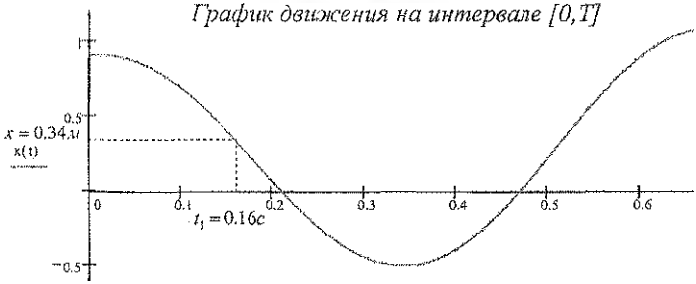


График изменения скорости на интервале [0,T₁]

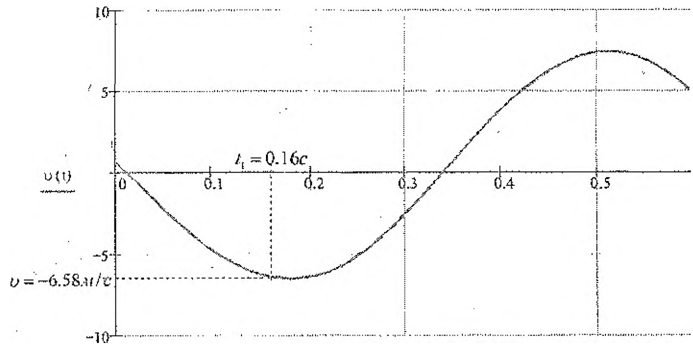


Рисунок 7 – Зависимость изменения координаты и скорости.

Ищем период биения T_2 по формуле:

$$T_2 = \frac{4\pi}{|\Delta|},$$

где $\Delta = \omega - k$; $k = \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2 \cdot \sin^2(\alpha)}$.

Таким образом, период биений или нижней частоты колебаний будет:

$$T_2 = \frac{4\pi}{|9 - 9,53|} = 23,7\ с.$$

График движения на интервале [0,T₂]

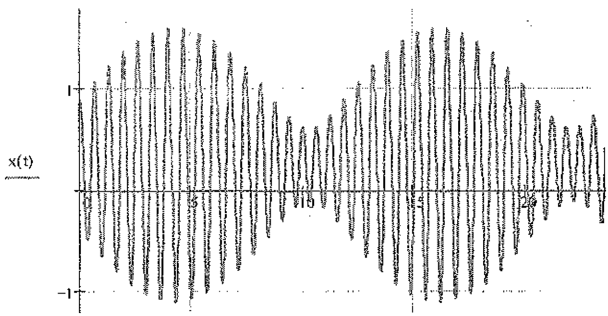


Рисунок 8 – Зависимость координаты от времени на интервале времени [0, T₂]

Из уравнений системы (*) определим реакции N_y и N_z для момента времени $t_1 = 1.16$ с.

$$N_y = 0.09 \cdot 9.81 \cdot \sin(9 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 0.16) \cdot 0.866 - 0.09 \cdot 9^2 \cdot 0.34 \cdot 0.5 \cdot 0.866 = -0.136\, H;$$

$$N_z = 0.09 \cdot 9.81 \cdot \cos(9 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 0.16) + 0.09 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 6.58 \cdot \sin 30° = -4.01\, H.$$

Реакция стенки трубки:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{-0.136^2 + (-4.009)^2} = 4.011\, H.$$

Исследуем непериодическое движение.

Движение будет непериодическим, если корни характеристического уравнения будут действительными, то есть:

$$\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m} > 0 \text{ или } \omega \geq \sqrt{\frac{c}{m \cdot \sin^2 \alpha}}; \quad \omega_{кр} = \sqrt{\frac{10}{0.09 \cdot 0.5^2}} = 21.08\, c^{-1}.$$

Примем $\omega = 25c^{-1} \rangle \omega_{кр}$.

Тогда корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}} = \pm\sqrt{25^2 \cdot 0.5^2 - \frac{10}{0.09}} = \pm\sqrt{45.14} = \pm 6.72\, c^{-2}$$

Обозначим

$$\left(\omega^2 \sin^2 \alpha - \frac{c}{m}\right) = k_1^2; - g \sin \alpha = A^*; \frac{cl_0}{m} = D^*.$$

$$k_1^2 = 45.14\, c^{-1}; \quad A^* = -4.905\, м/c^2; \quad D^* = 22.22\, м/c^2$$

Дифференциальное уравнение примет вид:

$$\ddot{x} - k_1^2 x = A^* \sin \omega t + D^*.$$

Решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + A \sin \omega t + D.$$

При этом

$$A = \frac{-A^*}{k_1^2 + \omega^2} = \frac{4.905}{6.45^2 + 25^2} = 0.007\, м; \; D = -\frac{D^*}{k_1^2} = -\frac{22.22}{6.72^2} = -0.492\, м.$$

Определим постоянные C_1 и C_2.

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \omega \cdot A \cos \omega t.$$

Подставим начальные условия:

при $t = 0 \quad x_0 = 0.9м, \quad \dot{x}_0 = 0.7 м/с.$

$$\begin{cases} 0.9 = C_1 + C_2 - 0.492, \\ 0.7 = 6.72 \cdot C_1 - 6.72 \cdot C_2 + 25 \cdot 0.007 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0.734\, м, \quad C_2 = 0.658\, м/с.$

Итак

$$x = 0.734 \cdot e^{6.45t} + 0.658 \cdot e^{-6.45t} + 0.007 \sin(25 \cdot t) - 0.492\, м$$

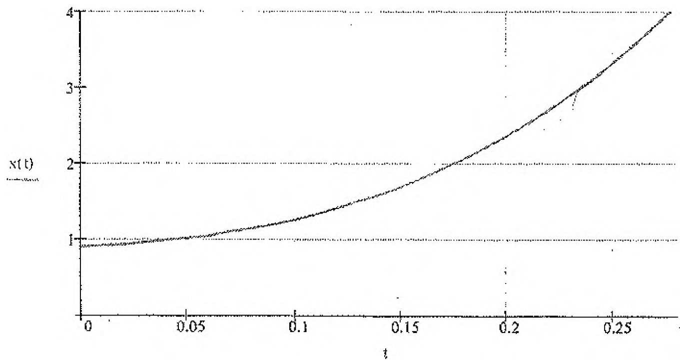
Определим время t_2 – время прохождения точкой всего канала. Время рассчитывается в одном из существующих математических пакетов (Mathcad, Mathematica и др.) или графически.

Время t_2 определим графически. Для этого назначим длину канала. По условию задачи $a = 2x_0 = 1.8$ *м*.

$x = a/\sin(\alpha) =$ 1,8/0,5 = 3,6м

Строим график непериодического движения. Из графика движения видно, что точка покинет канал через $t_2 = 0{,}26$ *с*. Важно отметить, что решение для области $t > t_2$ теряет смысл.

График непериодического движения
на интервале времени $[0,t_2]$



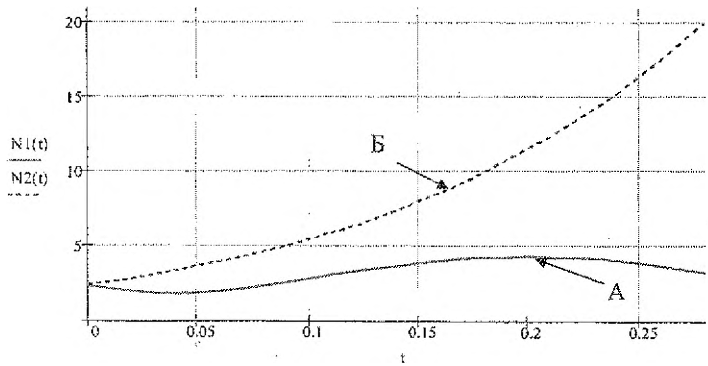


Рисунок 9 – Графики изменения реакции шарика на стенку трубки в случаях
А - периодического движения
Б - непериодического движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. - М., 1979. - Т. 2.

2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. - М., 1977. – Т. 2.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. - М., 2003.

4. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - М., 1975. - Ч. 1.

5. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики. - М., 1974.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Желткович Андрей Евгеньевич
Веремейчик Андрей Иванович
Хвисевич Виталий Михайлович
Батрак Валентин Васильевич
Томашев Игорь Геннадьевич

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание и методические указания к выполнению расчетно-графической работы по теоретической механике

для студентов дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Желткович А.Е.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 03.10.2014 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Гарнитура Times New Roman. Бумага «Performer». Усл. п. л. 1,16. Уч. изд. 1,25. Заказ № 812. Тираж 50 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.