

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

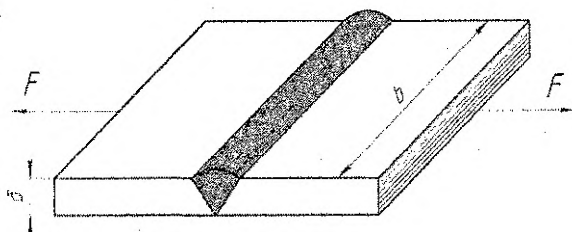
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению контрольной работы по механике материалов  
для студентов специальности

1-74 05 01 – «Мелиорация и водное хозяйство»



Брест 2010

Механика материалов относится к фундаментальным дисциплинам инженерного образования и позволяет овладеть методами расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций (машин, сооружений, механизмов, устройств), обеспечивая их надежную работу при минимальном расходе материала.

Для приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют контрольные задания по основным разделам курса.

Настоящие методические указания содержат краткий теоретический материал по разделам «Осевое растяжение и сжатие», «Прямой поперечный изгиб», «Устойчивость прямолинейных сжатых стержней» и примеры расчета задач по указанным разделам. Приведены также задания и расчетные схемы для выполнения контрольной работы по механике материалов.

Составители: В. М. Хвисевич, к.т.н., доцент  
С. С. Даркович, ст. преподаватель  
С. Р. Онысько, ст. преподаватель

Рецензент: директор филиала РУП «Институт БелНИИС» – «Научно-технический центр», д.т.н. А. Я. Найчук

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
Указания по оформлению и вычислению контрольной работы .....	4
1. Осевое растяжение и сжатие прямого бруса .....	5
1.1. Внутренние силы .....	5
1.2. Напряжения. Расчет на прочность .....	5
1.3. Деформации и перемещения. Расчет на жесткость .....	6
1.4. Вопросы для самопроверки .....	8
1.5. Пример расчета прямолинейного бруса на осевое растяжение и сжатие .....	8
2. Расчет статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость .....	11
2.1. Краткие теоретические сведения .....	11
2.2. Вопросы для самопроверки .....	13
2.3. Пример расчета статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость .....	14
3. Расчет прямолинейной сжатой стойки на устойчивость .....	23
3.1. Краткие теоретические сведения .....	23
3.2. Вопросы для самопроверки .....	25
3.3. Пример расчета сжатой стойки на устойчивость .....	25
4. Исходные данные к контрольной работе .....	28
4.1. Условия задач .....	28
4.2. Числовые данные .....	29
4.2.1. Числовые данные к задаче 1 .....	29
4.2.2. Числовые данные к задаче 2 .....	29
4.2.3. Числовые данные к задаче 3 .....	30
4.3. Исходные схемы .....	31
4.3.1. Схемы прямолинейного бруса к задаче 1 .....	31
4.3.2. Схемы статически определимой двутавровой балки к задаче 2 .....	33
4.3.3. Схемы стойки к задаче 3 .....	35
5. Приложения .....	36
6. Список литературы .....	41

## ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов является наукой, объединяющей те учебные дисциплины, которые в технических учебных заведениях по традиции излагаются раздельно. Это — сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, строительная механика. В то же время — это один из разделов механики сплошной среды, излагающей общую теорию построения определяющих уравнений для разного рода сред. С точки зрения инженерной практики, недостаточно написать определяющие уравнения, нужно уметь их решать при данных граничных условиях. Поэтому, с одной стороны, эти уравнения должны достаточно точно отражать действительность, с другой — быть доступным для интегрирования в пределах обычного вузовского курса математики.

В учебных планах технических университетов механика материалов имеет прикладную направленность, как дисциплина, дающая инженерные методы оценки прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций, включая рекомендации по оптимальным параметрам поперечных сечений этих элементов.

Данные методические указания соответствуют базовым учебным планам специальности 1-74 05 01 — «Мелиорация и водное хозяйство» и включают краткие теоретические сведения, а также примеры расчета трех задач:

- расчет прямолинейного бруса на осевое растяжение и сжатие;
- прямой поперечный изгиб балки;
- расчет прямолинейной сжатой стойки на устойчивость.

При защите контрольной работы необходимо ответить на вопросы, связанные с ее выполнением, и уметь решать контрольные задачи по ее тематике.

## УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ И ВЫЧИСЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется на стандартных листах формата А4 (210×297 мм) со штампом 15 мм и указанием нумерации страниц.
2. Порядок оформления: титульный лист с указанием варианта; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов стандарта УО «БрГТУ».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех-четырех значащих цифр, считая от левой руки к правой.
5. Эпюры усилий, напряжений, перемещений необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, при этом на эпюрах указывается общепринятое обозначение эпюры, размерность расчетных величин, числовые значения характерных ординат.
6. Все рисунки (схемы, эпюры, сечения и т. д.) должны быть пронумерованы, обозначены, упомянуты в тексте.
7. Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не рассматриваются.

# 1. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

## 1.1. Внутренние силы

При растяжении (сжатии) прямого бруса (стержня), в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ , которая определяется методом сечений и численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных к одной из отсечённых частей бруса:

$$\Sigma Z = 0; \quad F - N = 0; \quad F = N.$$

В общем случае действия нескольких сил  $N = \Sigma F_i$ . Растягивающая (т. е. действующая от сечения) сила  $N$  считается положительной, сжимающая — отрицательной. Закон изменения продольной силы по длине бруса удобно представить графически в виде эпюры продольных сил  $N$ . При действии на брус распределённых осевых сил интенсивностью  $q$  для проверки правильности построения эпюры  $N$  можно использовать дифференциальную зависимость  $q = \frac{dN}{dz}$ . В случаях, когда продольные силы в различных поперечных сечениях бруса не одинаковы, эпюра позволяет найти наибольшее значение продольной силы и положение сечения, в котором она возникает.

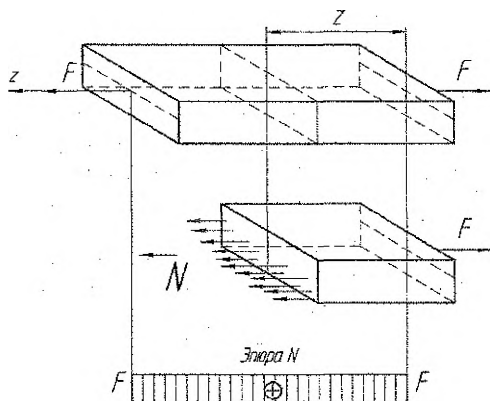


Рисунок 1.1 – Определение продольной силы  $N$

## 1.2. Напряжения. Расчет на прочность

При растяжении (сжатии) бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Чтобы определить их при известном значении продольной силы, необходимо знать закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению бруса. Задача решается на основе гипотезы плоских сечений: сечения бруса, плоские и нормальные к оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и при деформации. Эта гипотеза позволяет предположить, что все волокна в продольном направлении деформи-

руются одинаково. Поэтому считаем, что при растяжении (сжатии) бруса нормальные напряжения распределены по его поперечному сечению равномерно. Учитывая, что  $\sigma$  по всей площади  $A$  сечения постоянны, получаем:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A;$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

При растяжении напряжение считают положительным, при сжатии – отрицательным.

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных поперечных сечениях бруса не одинаковы, целесообразно показывать закон их изменения по длине бруса графически в виде эпюры нормальных напряжений.

Для всех точек рассчитываемого элемента должно соблюдаться условие прочности:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (1.2)$$

где  $\sigma$  — расчетное напряжение, которое возникает в элементе конструкции под действием приложенных к нему нагрузок;

$[\sigma]$  — допускаемое напряжение, которое можно допустить в рассчитываемой конструкции из условий ее безопасной, надежной и долговечной работы.

Условие прочности при растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (1.3)$$

где  $A$  — площадь опасного поперечного сечения;

$N$  — продольная сила в указанном сечении.

### 1.3. Деформации и перемещения. Расчет на жесткость

Умение вычислять деформации и перемещения необходимо для расчетов на жесткость, а также для определения сил в статически неопределимых системах.

Рассмотрим продольную деформацию бруса.

Выделим из бруса (рисунок 1.2) бесконечно малый элемент длиной  $dz$ . Приращение длины элемента в результате деформации обозначим  $\Delta(dz)$ .

Отношение приращения длины элемента к его первоначальной длине называется относительным удлинением или продольной деформацией:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} \quad (1.4)$$

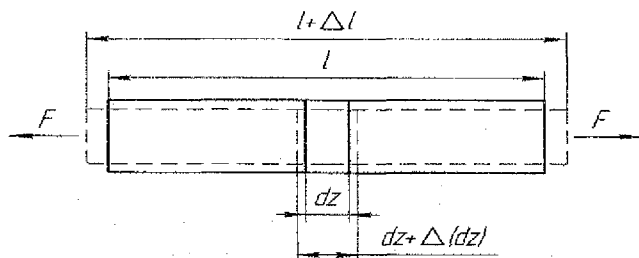


Рисунок 1.2 – Продольная деформация бруса

Экспериментально установлено, что для большинства материалов в пределах упругой работы между продольной деформацией и действующим в ее направлении нормальным напряжением существует прямопропорциональная зависимость. Это положение носит название закона Гука и записывается в виде:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

где  $E$  — модуль продольной упругости (или модуль Юнга), физическая константа материала, характеризующая его жесткость. Имеет размерность — Па или МПа.

Для растяжения (сжатия) элемента бесконечно малой длины  $dz$  закон Гука имеет вид:

$$\Delta(dz) = \frac{N \cdot dz}{E \cdot A},$$

где  $EA$  — величина, называемая жесткостью бруса при растяжении (сжатии).

Изменение длины бруса (или одного участка):

$$\Delta l = \int \frac{N \cdot dz}{E \cdot A} \quad (1.5)$$

Если жесткость бруса и продольная сила постоянны по всей длине бруса, из (1.5) получаем:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (1.6)$$

В общем случае, если законы изменения  $N$ ,  $E$  или  $A$  различны для отдельных участков бруса, интегрирование выражения (1.5) производят в пределах каждого из участков, а результаты алгебраически суммируют:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N \cdot dz}{E \cdot A} \quad (1.7)$$

Перемещение произвольного сечения бруса равно изменению длины участка, заключенного между этим сечением и заделкой. Взаимное перемещение двух сечений равно изменению длины части бруса, заключенной между этими сечениями.

Функция  $\delta = f(z)$ , показывающая перемещение  $\delta$  поперечных сечений в функции их расстояния  $z$  от неподвижного конца бруса (или сечения, условно принятого за неподвижное); графически изображается эпурой перемещений, которая проверяется по дифференциальной зависимости

$$\delta = \frac{d\sigma}{dz}$$

Расчет бруса на жесткость должен обеспечить выполнение условия жесткости:

$$\delta \leq [\delta], \quad (1.8)$$

где  $\delta = \sum_{i=1}^n \Delta l_i$  — изменение длины бруса (абсолютная деформация),

$[\delta]$  — допускаемая величина перемещения (обычно задается как некоторая часть полной длины бруса).

#### 1.4. Вопросы для самопроверки

1. Как нужно нагрузить прямой брус, чтобы он работал только на растяжение (сжатие)?
2. Как определяется напряжение в любой точке поперечного сечения при растяжении (сжатии)?
3. Что такое продольная и поперечная деформации бруса при растяжении (сжатии)? Какова зависимость между ними?
4. Сформулируйте закон Гука. Каков физический смысл модуля продольной упругости  $E$ ?
5. Как определяется удлинение (укорочение) участка бруса с постоянным поперечным сечением и постоянной продольной силой по всей его длине?
6. Круглый брус длиной  $l$  и диаметром  $d$ , нагруженный продольной силой  $F$ , удлинился на величину  $\Delta l$ . Какое удлинение получит нагруженный силой  $F$  брус: а) длиной  $2l$  и диаметром  $0,5d$ ; б) длиной  $2l$  и диаметром  $2d$ .
7. Что такое предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности?
8. Что называется условным пределом текучести и для каких материалов введена эта характеристика?
9. Что такое «расчетное напряжение» и что такое «предельное напряжение»?
10. Какие предельные напряжения приняты для различных групп материалов — хрупких, пластичных?
11. Что такое фактический коэффициент запаса прочности?
12. Что такое требуемый коэффициент запаса прочности и каковы приняты его числовые значения исходя из свойств материала?
13. Что такое допускаемое напряжение и как оно выбирается в зависимости от механических свойств материала?
14. Сформулируйте условие прочности. Как записывается в математической форме это условие при расчетах на растяжение (сжатие)?
15. Сколько различных видов расчета можно производить из условия прочности?
16. Сформулируйте закон Гука для растяжения (сжатия).
17. Как выполняются расчеты на жесткость при растяжении (сжатии)?

#### 1.5. Пример расчета прямолинейного бруса на осевое растяжение и сжатие

Дано: брус круглого сечения (рисунок 1.3) загружен вдоль оси сосредоточенными силами  $F_1 = 10 \text{ kH}$ ,  $F_2 = 30 \text{ kH}$  и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 18 \text{ kH/m}$ .

Требуется:

- а) построить эпюру продольных сил  $N$  и рассчитать требуемый диаметр бруса на каждом силовом участке;
- б) построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  в поперечных сечениях и эпюру перемещений  $\delta$  поперечных сечений.

При расчетах принять:  $a = 0,1 \text{ m}$ ;  $b = 0,2 \text{ m}$ ;  $c = 0,3 \text{ m}$ ;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .



## Решение

Разобьем брус на три силовых участка.

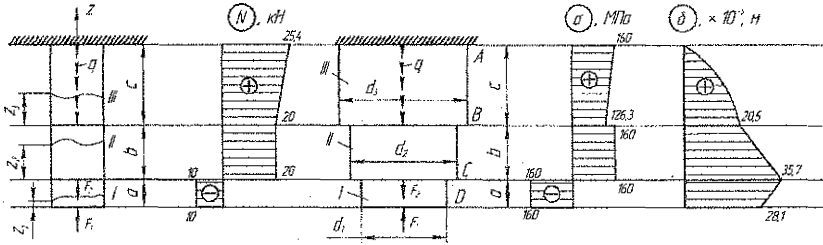


Рисунок 1.3 – Эпюры продольных сил, напряжений, перемещений

Используя метод сечений, на каждом участке записываем уравнение  $\Sigma Z = 0$  и получаем выражение продольной силы  $N$  от длины бруса:

Участок I:  $0 \leq z_1 \leq a$ ;  $N_1 = -F_1 = -10 \text{ кН}$ , т. е. первый участок сжат, продольная сила не изменяется по длине бруса.

Участок II:  $0 \leq z_2 \leq b$ ;  $N_2 = -F_1 + F_2 = -10 + 30 = 20 \text{ кН}$ , т. е. второй участок растянут, продольная сила не изменяется по длине бруса.

Участок III:  $0 \leq z_3 \leq \bar{h}$ ;  $N_3 = -F_1 + F_2 + q \cdot z_3$  продольная сила на третьем участке изменяется по линейному закону.

$$\text{При } z_3 = 0: N_3 = -F_1 + F_2 = -10 + 30 = 20 \text{ кН}$$

$$\text{При } z_3 = c: N_3 = -F_1 + F_2 + q \cdot c = -10 + 30 + 18 \cdot 0,3 = 25,4 \text{ кН}$$

Строим эпюру продольных сил  $N$  (рисунок 1.3).

Требуемые диаметры на каждом  $i$ -м участке рассчитываем из условия

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{[\sigma]}, \text{ следовательно } d_i \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N_i|}{\pi \cdot [\sigma]}}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_1|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,92 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,92 \text{ мм}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_2|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 12,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 12,6 \text{ мм}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_3|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 14,2 \text{ мм}$$

По рассчитанным значениям диаметров вычерчиваем схему полученного бруса.

Площади поперечных сечений на каждом участке:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (8,92 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 62,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (12,6 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d_3^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (14,2 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 158,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

Определяем напряжения  $\sigma$  на каждом участке бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-10 \cdot 10^3}{62,5 \cdot 10^{-6}} = -160 \cdot 10^6 \text{ Па} = -160 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{125 \cdot 10^{-6}} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}$$

$$\text{При } z_3 = 0: \sigma_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{158,3 \cdot 10^{-6}} = 126,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 126,3 \text{ МПа}$$

$$\text{При } z_3 = c: \sigma_3 = \frac{25,4 \cdot 10^3}{158,3 \cdot 10^{-6}} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа}$$

На третьем участке напряжения  $\sigma$  изменяются по линейному закону.

Строим эпюру  $\sigma$  (рисунок 1.3).

Вычисляем абсолютные деформации каждого участка:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 62,5 \cdot 10^{-6}} = -7,6 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 15,2 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$\Delta l_3 = \int_0^N \frac{N_3 \cdot dz}{E \cdot A_3} = \frac{\omega_N}{E \cdot A_3} = \frac{((20 + 25,4) / 2) \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 158,3 \cdot 10^{-6}} = 20,5 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

где  $\omega_N$  — площадь эпюры  $N$  на третьем участке.

Определяем перемещения  $\delta$  граничных сечений бруса:

$\delta_A = 0$  т. к. сечение жестко закреплено;

$$\delta_B = \Delta l_1 = 20,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\delta_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 20,5 \cdot 10^{-5} + 15,2 \cdot 10^{-5} = 35,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\delta_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 35,7 \cdot 10^{-5} - 7,6 \cdot 10^{-5} = 28,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

Строим эпюру  $\delta$  (рисунок 1.3) используя полученные данные

и дифференциальную зависимость:  $\sigma = \frac{d\delta}{dz} = \text{tg } \beta$

где  $\beta$  — угол наклона касательной, проведенной к эпюре  $\delta$ .

## 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

### 2.1. Краткие теоретические сведения

В большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в опасном поперечном сечении. Условие прочности для балок, материал которых одинаково сопротивляется растяжению и сжатию  $[\sigma_s] = [\sigma_c] = [\sigma]$ , имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.1)$$

где  $M_{max}$  — максимальный по абсолютной величине изгибающий момент, возникающий в балке;

$W_x$  — осевой момент сопротивления поперечного сечения балки, относительно нейтральной оси;

$[\sigma]$  — допускаемое нормальное напряжение.

Для подбора сечения балки из условия прочности (2.1) определяют необходимую величину осевого момента сопротивления.

$$W_x = \frac{|M_{max}|}{[\sigma]}, \quad (2.2)$$

По найденному  $W_x$ , выбрав форму поперечного сечения (прямоугольник, швеллер, двутавр), находят его размеры.

В тех случаях, когда материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, расчет ведется по двум условиям прочности: одно — для растянутых, другое — для сжатых волокон.

Для балок, сильно нагруженных вблизи опор и тонкостенных, где касательные напряжения имеют большую величину, расчет следует производить не только по наибольшим нормальным, но и по наибольшим касательным напряжениям. Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид (формула Д. И. Журавского):

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}| \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b} \leq [\tau] \quad (2.3)$$

где  $|Q_{max}|$  — максимальная поперечная сила, взятая из эпюры «Q»;

$S_x^{omc}$  — статический момент (относительно нейтральной оси) отсеченной части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения;

$I_x$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

$b$  — ширина сечения балки на том уровне, где определяются касательные напряжения  $\tau$ ;

$[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение при изгибе. Обычно для стальных балок принимают  $[\tau] = (0,5 \div 0,6) \cdot [\sigma]$ .

Рассмотренная выше проверка прочности при изгибе по нормальным и касательным напряжениям (2.1), (2.3) относится к тем случаям, когда опасным слоем является нейтральный и один из крайних. Однако в балках с тонкостенным сечением (двутавр и др.) опасным может оказаться слой, расположенный в месте резкого изменения ширины сечения, в котором возникают и нормальные и касательные напряжения. Причем и те и другие довольно значительны по величине. В этом случае проверка прочности производится по главным напряжениям. Для определения величины и направления главных и экстремальных касательных напряжений используется или круг Мора (графический способ) или аналитические зависимости, получаемые из теории плоско-го напряженного состояния тел:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}$$

$$\tau_{\text{min}}^{\text{max}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}$$

Зависимости (2.4) можно свести к более простому виду с учетом напряжений при изгибе:  $\sigma_\alpha = \sigma$ ;  $\sigma_\beta = 0$ ;  $\tau_\alpha = \tau$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

$$\tau_{\text{min}}^{\text{max}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

Имея величину главных напряжений, составляют расчетные условия по теориям прочности.

По III теории прочности:

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (2.6)$$

По IV теории прочности:

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (2.7)$$

## 2.2. Вопросы для самопроверки

1. При каких внутренних силовых факторах в поперечном сечении бруса возникает деформация, названная чистым изгибом? Поперечным изгибом?
2. Как необходимо нагрузить брус, чтобы получить прямой поперечный изгиб и прямой чистый изгиб?
3. Каким образом определить в любом поперечном сечении бруса величину поперечной силы и величину изгибающего момента?
4. Сформулируйте правило знаков при определении поперечной силы и изгибающего момента.
5. Какими дифференциальными зависимостями связаны между собой изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q$ ?
6. На каких допущениях основаны выводы расчетных формул при изгибе?
7. Какому закону подчинено распределение напряжений в поперечном сечении бруса при чистом изгибе?
8. Каким уравнением выражается зависимость между кривизной оси бруса и изгибающим моментом?
9. Что такое жесткость сечения при изгибе?
10. Как определить напряжение в любой точке данного поперечного сечения при прямом изгибе?
11. Как определить наибольшие напряжения в данном поперечном сечении при прямом изгибе?
12. Что такое осевой момент сопротивления? В каких единицах измеряется его величина?
13. Какие формы поперечных сечений являются рациональными для балок из пластичных материалов (например, малоуглеродистая сталь) и для балок из хрупких материалов (например, чугун)? Дайте обоснование.
14. Запишите математическое выражение условия прочности при расчетах на изгиб для балок с симметричным сечением относительно нейтральной оси.
15. Какие виды расчетов можно производить из условия прочности при изгибе?
16. Каковы особенности расчетов на прочность балок из хрупких материалов?
17. Почему при изгибе балки в ее продольном сечении возникают касательные напряжения?
18. Какие сечения и точки в сечении считаются опасными по главным напряжениям?
19. Что понимают под упругой линией балки?
20. Какие знаете методы определения перемещений в балках?
21. Какой вид имеет универсальное уравнение изогнутой оси балки?
22. Что понимают под начальными параметрами?
23. Как осуществляется расчет балок на жесткость?
24. Какая существует связь эпюры прогибов и эпюры изгибающих моментов?

### 2.3. Пример расчета статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость

Двутавровая балка, закрепленная как показано на рисунке 2.1, загружена сосредоточенной силой, моментами и распределенной нагрузкой. Модуль упругости материала балки  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ ; допускаемый прогиб пролета балки  $[\frac{f}{l}] = [\frac{y_{\text{max}}}{l}] = \frac{1}{500}$ , где:  $l$  — длина пролета, а для консолей балки —  $[\frac{f_k}{a}] = [\frac{\max y_k}{a}] = \frac{1}{200}$ , где:  $a$  — длина консоли,  $y_k$  — максимальный прогиб консоли.

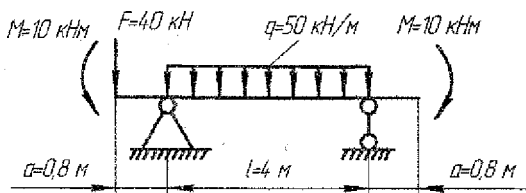


Рисунок 2.1 – Расчетная схема балки и нагрузки

#### Требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Подобрать по нормальным напряжениям двутавровое сечение балки из сортамента прокатной стали.
4. Проверить выбранную балку по касательным напряжениям. При необходимости увеличить номер.
5. Проверить полученную балку по третьей теории прочности на стыке полки и стенки.
6. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений для балки в опасном по п. 5 сечении.
7. Определить прогибы на концах консолей и в середине пролета. Проверить балку на жесткость. Построить эпюру прогибов.

#### Решение

##### 1. Определение опорных реакций

Обозначим вертикальные реакции опор балки  $R_A$  и  $R_B$ . Для их нахождения составим уравнения моментов относительно каждой из опор.

$$\sum M_A = 0: \quad F \cdot a - q \cdot \frac{l^2}{2} + R_B \cdot l + M - M = 0$$

$$R_B = \frac{1}{l} \cdot (-F \cdot a + q \cdot \frac{l^2}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (-40 \cdot 0,8 + 50 \cdot \frac{4^2}{2}) = 92 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F \cdot (a+l) + q \cdot \frac{l^2}{2} - R_A \cdot l + M - M = 0$$

$$R_A = \frac{1}{l} \cdot (F \cdot (a+l) + q \cdot \frac{l^2}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (40 \cdot (0,8+4) + 50 \cdot \frac{4^2}{2}) = 148 \text{ кН}$$

Проверка найденных реакций.

$$\sum Y = 0: \quad R_A + R_B - F - q \cdot l = 148 + 92 - 40 - 50 \cdot 4 = 0$$

Реакции найдены верно.

## 2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов определяем значения  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки.

$$Q_1 = -F = -40 \text{ кН}$$

$$M_1 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_2 = Q_1 = -F = -40 \text{ кН}$$

$$M_2 = -F \cdot a - M = -40 \cdot 0,8 - 10 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_3 = -F + R_A = -40 + 148 = 108 \text{ кН} \quad M_3 = M_2 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_4 = -R_B = -92 \text{ кН}$$

$$M_4 = -M = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q_5 = Q_6 = 0$$

$$M_5 = M_6 = M_4 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Используя полученные значения и дифференциальную зависимость  $q = \frac{dQ}{dz}$ ,

строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 2.2).

На участке  $A - B$  поперечная сила меняет знак, т.е. есть сечение, где  $Q = 0$ .

Находим положение этого сечения, приравняв к нулю поперечную силу в этом сечении.

$$Q_{(z_0)} = 0: \quad -R_B + q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{92}{50} = 1,84 \text{ м.}$$

Находим экстремальное значение изгибающего момента (в сечении  $z_0$ ).

$$M^{\text{экстр}} = M_{(z_0)} = R_B \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} - M = 92 \cdot 1,84 - 50 \cdot \frac{1,84^2}{2} - 10 = 74,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Используя полученные значения и зависимость  $Q = \frac{dM}{dz}$ , строим эпюру изгибающих моментов  $M$  (рисунок 2.2).

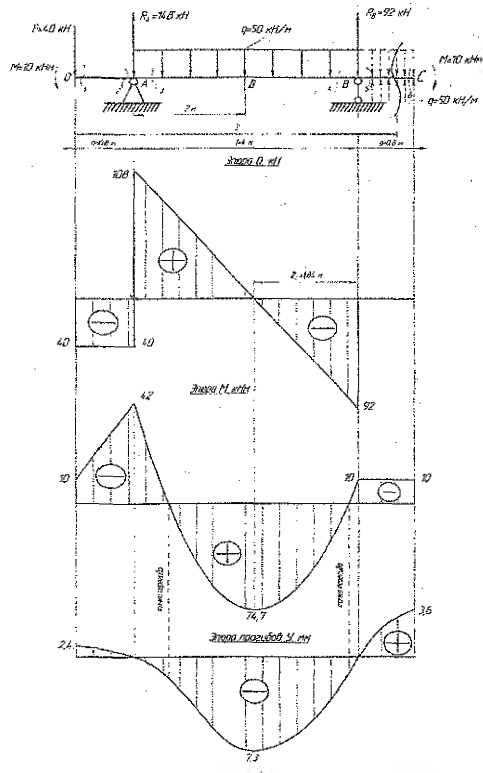


Рисунок 2.2 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов

### 3. Подбор сечения балки из прокатного двутавра

Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $|M_{\max}|$  — максимальный по абсолютной величине изгибающий момент (берется из эпюры  $M$ );

$[\sigma]$  — допускаемое значение нормального напряжения;

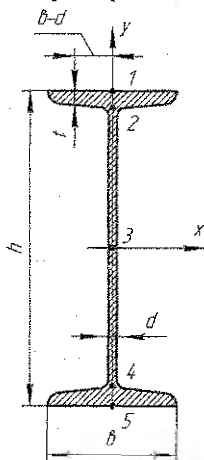
$W_x$  — осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

Требуемый момент сопротивления должен быть не меньше следующей величины:

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{74,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 467 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 467 \text{ см}^3$$



Из таблиц сортамента прокатной стали выбираем двутавр №30. Выписываем его характеристики:



$$\begin{aligned}
 h &= 30 \text{ см}; \\
 b &= 13,5 \text{ см}; \\
 t &= 1,02 \text{ см}; \\
 d &= 0,65 \text{ см}; \\
 I_x &= 7080 \text{ см}^4; \\
 W_x &= 472 \text{ см}^3; \\
 S_{x \text{ max}}^{\text{отн}} &= 268 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

Рисунок 2.3 – Схема двутавра

Примечание: нормальные напряжения при изгибе балок достигают максимального по модулю значения в крайних волокнах (верхнем и нижнем, точках 1 и 5, рисунок 2.3), поэтому подбор сечения производится из условия, чтобы по абсолютной величине нормальные напряжения в точках 1 и 5 не превышали допускаемого значения  $[\sigma]$ , но были максимально близки к нему.

#### 4. Проверка прочности балки по касательным напряжениям

Опасным является сечение балки, где поперечная сила является максимальной для данной балки по абсолютной величине (в нашем случае это сечение А справа), опасной является точка 3 (рисунок 2.3), лежащая на нейтральной линии.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{|Q_{\text{max}}| \cdot S_{x \text{ max}}^{\text{отн}}}{I_x \cdot b} \leq [\tau]$$

где  $|Q_{\text{max}}|$  — максимальная по абсолютной величине поперечная сила (берется из эпюры  $Q$ );

$S_{x \text{ max}}^{\text{отн}}$  — статический момент относительно оси  $x$  части поперечного сечения, лежащей по одну сторону от этой оси;

$I_x$  — осевой момент инерции поперечного сечения балки;

$b$  — ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения (в данном случае  $b = d$ );

$[\tau]$  — допускаемое напряжение материала на срез.

Тогда:

$$\tau_{\max} = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 62,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 62,9 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

### 5. Проверяем прочность балки по главным напряжениям, используя третью теорию прочности

Проверка по главным напряжениям осуществляется в том поперечном сечении балки, где одновременно действуют максимальные или близкие к максимальным величины  $Q$  и  $M$ . В нашем случае таким является сечение близкое к точке А справа, где  $Q = 108 \text{ кН}$  и  $M = 42 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Опасными являются точки примыкания полки двутавра к стенке в месте перехода от малой ширины сечения к большей (точки 2 и 4, рисунок 2.3).

По третьей теории прочности условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Для определения  $\sigma$  и  $\tau$  используем формулы:

$$\sigma = \frac{I}{I_x} \cdot y \qquad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

Для точки 2 (стенка):

$$y = y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{30}{2} - 1,02 = 13,98 \text{ см}$$

$$S_x^{\text{отс}} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2}\right) = 13,5 \cdot 1,02 \cdot \left(\frac{30-1,02}{2}\right) = 199,5 \text{ см}^3$$

$$b(y) = d = 0,65 \text{ см}$$

$$\sigma = \frac{42 \cdot 10^3}{7080 \cdot 10^{-8}} \cdot 13,98 \cdot 10^{-2} = 82,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 82,9 \text{ МПа}$$

$$\tau = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 199,5 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 46,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 46,8 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{82,9^2 + 4 \cdot 46,8^2} = 125 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

### 6. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений для сечения, опасного по главным напряжениям (п. 5)

При определении величины нормальных напряжений используем формулу:

$$\sigma = -\frac{M}{I_x} \cdot y,$$

где  $y$  — расстояние от нейтральной линии (ось  $x$ ) до точки в которой надо найти напряжение;

$M$  — берется из эпюры изгибающих моментов с учетом знака.

Примечание: знак минус в приведенной формуле учитывает соответствие выбранного направления оси  $y$  (вверх) и принятого ранее правила знаков для изгибающих моментов.

Из формулы видно, что величина  $\sigma$  по высоте сечения изменяется по линейному закону. При значении  $y=0$ , т.е. на нейтральной линии,  $\sigma=0$ . При  $y = \pm \frac{h}{2}$ , т.е. в крайних волокнах (точки 1 и 5), нормальные напряжения равны:

$$\text{При } y = y_1 = \frac{h}{2}: \quad \sigma_{(1)} = \frac{(-42 \cdot 10^3) \cdot 30}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 2} = 88,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 88,9 \text{ МПа}$$

$$\text{При } y = y_5 = -\frac{h}{2}: \quad \sigma_{(5)} = -\frac{(-42 \cdot 10^3)}{7080 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-\frac{30}{2}\right) = -88,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = -88,9 \text{ МПа}$$

Эпюра  $\sigma$  показана на рисунке 2.4.

Для построения эпюры касательных напряжений  $\tau$  используем формулу Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{омс}}{I_x \cdot b(y)}$$

где  $S_x^{омс}$  — статический момент относительно оси  $x$  части поперечного сечения, лежащей по одну сторону от линии действия  $\tau$ ;

$b(y)$  — ширина сечения по линии действия  $\tau$ ;

$Q$  — берется из эпюры поперечных сил с учетом знака (в сечении А справа).

Определим величину касательных напряжений в характерных точках.

Точка 1:  $\tau = 0$ , т. к.  $S_x^{омс} = 0$ ;

Точка 2 (принадлежит полке в месте перехода от полки к стенке):

$$b(y) = b = 13,5 \text{ см}; \quad S_x^{омс} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 199,5 \text{ см}^3; \quad Q = 108 \text{ кН}; \quad I_x = 7080 \text{ см}^4.$$

$$\tau = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 199,5 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 13,5 \cdot 10^{-2}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,2 \text{ МПа}$$

Точка 2 (принадлежит стенке в месте перехода от стенки к полке):

$$b(y) = d = 0,65 \text{ см}; \quad S_x^{омс} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 199,5 \text{ см}^3.$$

$$\tau = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 199,5 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 46,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 46,8 \text{ МПа}$$

Точка 3:  $S_x^{омс} = 268 \text{ см}^3$  (из сортамента);

$$\tau = \frac{108 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 62,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 62,9 \text{ МПа}$$

Ниже оси  $x$  в точках 5, 4 касательные напряжения совпадают с напряжениями соответственно в точках 1, 2.

Строим эпюру  $\tau$  (рисунок 2.4.)

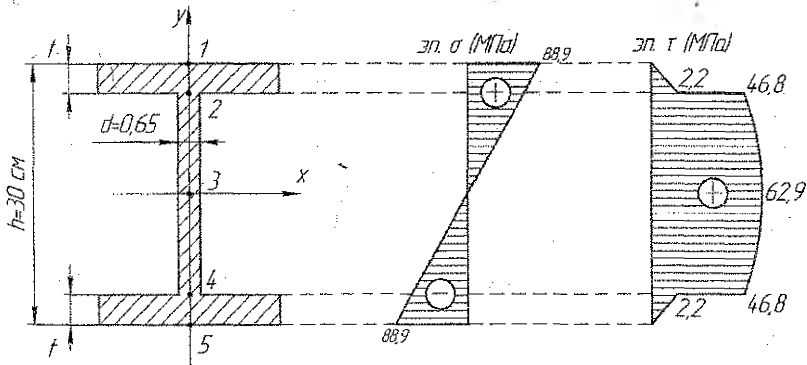


Рисунок 2.4 – Эпюры напряжений в сечении А (справа)

### 7. Определяем прогибы в пролете и на консолях. Проверяем жесткость

Универсальное уравнение прогибов для заданной балки запишем по методу начальных параметров.

Начало координат выбираем в крайнем сечении левого конца балки (точка  $O$ ). Продлим равномерно распределенную нагрузку  $q$  до правого конца балки и уравновесим ее, компенсирующей распределенной нагрузкой обратного направления (см. рисунок 2.2). Уравнение прогибов записываем для последнего силового участка (участок  $BC$ ).

$$E \cdot I_x \cdot y(z) = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot z - M \cdot \frac{z^2}{2} - F \cdot \frac{z^3}{6} + R_A \cdot \frac{(z-a)^3}{6} - q \cdot \frac{(z-a)^4}{24} + q \cdot \frac{(z-(a+l))^4}{24} + R_B \cdot \frac{(z-(a+l))^3}{6},$$

где  $\theta_0$  и  $y_0$  — угол поворота и прогиб сечения в начале координат (начальные параметры). Они определяются из граничных условий:

$$\text{При } z = a: \quad y_A = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_A = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot a - M \cdot \frac{a^2}{2} - F \cdot \frac{a^3}{6} = 0$$

$$\text{При } z = a+l \quad y_B = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_B = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot (a+l) - M \cdot \frac{(a+l)^2}{2} - F \cdot \frac{(a+l)^3}{6} + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - q \cdot \frac{l^4}{24} = 0$$

Решаем систему уравнений:

$$E \cdot I_x \cdot y_A = 0 \quad E \cdot I_x \cdot y_B = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 0,8 - 10 \cdot \frac{0,8^2}{2} - 40 \cdot \frac{0,8^3}{6} = 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4,8 - 10 \cdot \frac{4,8^2}{2} - 40 \cdot \frac{4,8^3}{6} + 148 \cdot \frac{4^3}{6} - 50 \cdot \frac{4^4}{24} = 0$$

После вычислений получаем:

$$E \cdot I_x \cdot y_0 + 0,8 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 = 0,21 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$E \cdot I_x \cdot y_0 + 4,8 \cdot E \cdot I_x \cdot \theta_0 = -192,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

Решаем относительно начальных параметров, получаем:

$$E \cdot I_x \cdot \theta_0 = -49,77 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

$$E \cdot I_x \cdot y_0 = 46,43 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

Проверим правильность вычислений при решении системы уравнений:

$$E \cdot I_x \cdot y_A = 46,43 + (-49,77) \cdot 0,8 - 10 \cdot \frac{0,8^2}{2} - 40 \cdot \frac{0,8^3}{6} \approx 0$$

$$E \cdot I_x \cdot y_B = 46,43 + (-49,77) \cdot 4,8 - 10 \cdot \frac{4,8^2}{2} - 40 \cdot \frac{4,8^3}{6} + 148 \cdot \frac{4^3}{6} - 50 \cdot \frac{4^4}{24} \approx 0$$

Для построения эпюры прогибов балки вычислим прогибы консолей и середины пролета.

В сечении  $O$  ( $z = 0$ ):

$$E \cdot I_x \cdot y_0 \doteq 46,43 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = 46,43 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^3$$

$$E \cdot I_x = 2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8} = 14160 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

$$y_0 = \frac{46,43 \cdot 10^3}{14160 \cdot 10^3} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,3 \text{ мм}$$

В сечении  $D$  ( $z = 2,8 \text{ м}$  — середина пролета):

$$E \cdot I_x \cdot y_D = E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot \left(a + \frac{l}{2}\right) - M \cdot \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right)^2}{2} - F \cdot \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right)^3}{6} +$$

$$+ R_A \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} - q \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24} = 46,43 - 49,77 \cdot \left(0,8 + \frac{4}{2}\right) - 10 \cdot \frac{\left(0,8 + \frac{4}{2}\right)^2}{2} -$$

$$- 40 \cdot \frac{\left(0,8 + \frac{4}{2}\right)^3}{6} + 148 \cdot \frac{2^3}{6} - 50 \cdot \frac{2^4}{24} = -144,1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$y_D = -\frac{144,1 \cdot 10^3}{14160 \cdot 10^3} = -10,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -10,2 \text{ мм}$$

В сечении  $C$  ( $z = 2a + l = 5,6 \text{ м}$ )

$$\begin{aligned}
 E \cdot I_x \cdot y_c &= E \cdot I_x \cdot y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0(2 \cdot a + l) - M \cdot \frac{(2 \cdot a + l)^2}{2} - F \cdot \frac{(2 \cdot a + l)^3}{6} + \\
 &+ R_A \cdot \frac{(l + a)^3}{6} - q \cdot \frac{(l + a)^4}{24} + q \cdot \frac{a^4}{24} + R_B \cdot \frac{a^3}{6} = 46,23 - 49,77 \cdot (2 \cdot 0,8 + 4) - \\
 &- 10 \cdot \frac{(2 \cdot 0,8 + 4)^2}{2} - 40 \cdot \frac{(2 \cdot 0,8 + 4)^3}{6} + 148 \cdot \frac{(0,8 + 4)^3}{6} - 50 \cdot \frac{(0,8 + 4)^4}{24} + \\
 &+ 50 \cdot \frac{0,8^4}{24} + 92 \cdot \frac{0,8^3}{6} = 71 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \\
 y_c &= \frac{71 \cdot 10^3}{14160 \cdot 10^3} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5,0 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

Проверяем балку на жесткость.

В пролете ( $l = 4 \text{ м}$ ):

$$\frac{|y_D|}{l} = \frac{|-10,2|}{4 \cdot 10^3} = \frac{1}{398} > \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{500}$$

Условие жесткости не выполняется. Проверяем поочередно большие по сортаменту двутавры. Жесткость выполняется для двутавра N33,  $I_x = 9840 \text{ см}^4$

$$y_D = -\frac{144,1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = -7,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -7,3 \text{ мм}$$

Условие жесткости в пролете для двутавра N33:

$$\frac{|y_D|}{l} = \frac{|-7,3|}{4 \cdot 10^3} = \frac{1}{548} < \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{500}$$

Условие жесткости выполняется.

Проверим жесткость правой консоли для двутавра N33:

$$y_C = \frac{7,1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,6 \text{ мм}$$

Условие жесткости правой консоли для двутавра N33:

$$\frac{y_C}{a} = \frac{3,6}{0,8 \cdot 10^3} = \frac{1}{222} < \left[ \frac{f}{a} \right] = \frac{1}{200}$$

Для построения окончательной эпюры прогибов определяем для двутавра N33 прогиб в начале левой консоли (сечение O):

$$y_O = \frac{46,43 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,4 \text{ мм}$$

Эпюра прогибов построена на рисунке 2.2.

### 3. РАСЧЕТ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ СЖАТОЙ СТОЙКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

#### 3.1. Краткие теоретические сведения

Если стойку с прямолинейной осью последовательно нагружать все возрастающей продольной нагрузкой, то при некотором ее значении стойка будет иметь две формы равновесия: прямолинейную неустойчивую и криволинейную устойчивую.

Явление изгиба стойки при приложении к ней продольной силы носит название потери устойчивости. Минимальное значение сжимающей силы, при которой ось стойки может иметь устойчивую криволинейную и неустойчиво прямолинейную форму упругого равновесия, называется критической силой. Опасность явления потери устойчивости состоит в том, что оно может наступить внезапно при значении напряжения существенно меньшего, чем предел прочности материала стойки. Поэтому сжатый стержень помимо условия прочности должен удовлетворять условию устойчивости:

$$F \leq \frac{F_{кр}}{n_y},$$

где  $F$  — значение силы, сжимающей стержень;

$F_{кр}$  — значение критической, для заданного стержня, силы;

$n_y$  — нормативный коэффициент запаса устойчивости.

Величина  $F_{кр}$  для длинных стержней с различными опорными устройствами определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $I_{\min}$  — наименьший момент инерции поперечного сечения стойки;

$l$  — длина стойки;

$\mu$  — коэффициент приведения длины стойки, учитывающий условия ее закрепления относительно оси  $I_{\min}$ .

Если  $F_{кр}$  определить по формуле Эйлера, то формула критического напряжения имеет вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где  $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$  — гибкость стойки;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  — минимальный главный центральный радиус инерции поперечного сечения стойки;

$A$  — площадь поперечного сечения.

Если закрепление стержня в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости различно, то расчет следует вести по наибольшей гибкости, которая может соответствовать как максимальному, так и минимальному моменту инерции поперечного сечения стержня.

Формула Эйлера применима лишь в пределах справедливости закона Гука, т.е. при условии:  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пр}$ , а значит  $\lambda > \lambda_{пред}$ ,

где  $\lambda_{пред} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр}}}$  — предельная гибкость для материала стержня, зависящая только от физико-механических свойств материала.

При гибкостях, меньших предельных, т.е. для стоек средней длины, критические напряжения определяются по формуле Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda,$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, имеющие размерность напряжений, выбираются для различных материалов из таблиц.

Последовательность расчета стоек на устойчивость:

1. Определяется гибкость стойки  $\lambda$ .
2. Сопоставляется  $\lambda$  с предельной гибкостью  $\lambda_{пред}$ .

В случае если  $\lambda \geq \lambda_{пред}$ , то расчет производят по формуле Эйлера. Если  $\lambda < \lambda_{пред}$ , то критическое напряжение необходимо определять по формуле Ф.С. Ясинского.

Примечание. Часто вводится значение гибкости  $\lambda_0$ , при котором критическое напряжение равно предельному (опасному) напряжению при чистом сжатии. Поэтому при малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ) стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность. Значения  $\lambda_0$  для различных материалов приводятся в таблице.

Практический интерес представляет собой расчет стоек на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемого напряжения. В этом случае условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_c]$$

где  $F$  — сила, сжимающая стержень;

$A$  — площадь брутто (без учета местных ослаблений) поперечного сечения стержня;

$[\sigma_c]$  — допускаемое напряжение на сжатие;

$\varphi$  — коэффициент снижения допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба), величина которого зависит от материала и гибкости, изменяется от 0 до 1 и выбирается из таблиц.

При решении задачи о подборе сечения в приведенном выше условии устойчивости одновременно присутствуют две неизвестные величины:  $\varphi$  и  $A$ . Задача решается путем последовательных приближений. Более подробно суть метода показана в примере расчета.



### 3.2. Вопросы для самопроверки

1. Что называется критической силой?
2. Какой вид имеет формула Эйлера для критической силы при различных случаях закрепления стержня?
3. Что называется гибкостью стержня?
4. Всегда ли можно пользоваться формулой Эйлера?
5. Как производится проверочный расчет сжатого стержня на устойчивость?
6. Каковы наиболее рациональные формы поперечных сечений сжатых стержней?
7. Когда при расчетах на устойчивость применяется формула Ясинского?
8. Что понимают под коэффициентом продольного изгиба и как определяется его величина?
9. Как осуществляется подбор сечений стоек при расчете на устойчивость?
10. Что понимают под условием равноустойчивости?

### 3.3. Пример расчета сжатой стойки на устойчивость

На стойку из стали Ст. 3 длиной  $l = 1,5 \text{ м}$  с шарнирно опертыми концами действует сжимающая сила  $F = 67 \text{ кН}$ . Допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ .

Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения стойки;
- 2) определить критическую силу, найти коэффициент запаса устойчивости.

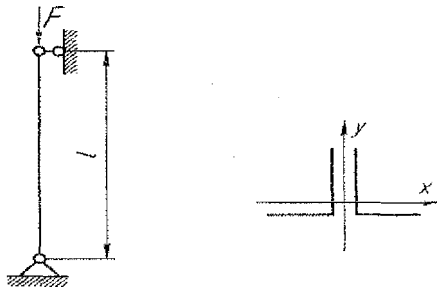


Рисунок 3.1 – Схема стойки и форма поперечного сечения

#### Решение

1. Подбираем размер поперечного сечения составной стойки.

Предварительно принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ . Определяем необходимую величину площади сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 8,38 \text{ см}^2$$

Требуемая площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{8,38}{2} = 4,19 \text{ см}^2$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $56 \times 56 \times 4$  с  $A_{ye} = 4,38 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,73 \text{ см}$  (очевидно, для сечения из 2-х уголков  $i_y > i_x$ , т. е.  $i_x = i_{\min}$ , и относительно оси  $X$  радиус инерции всего сечения равен радиусу инерции уголка).

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 87$$

По таблице 1 приложений методом интерполяции определяем коэффициент продольного изгиба: при  $\lambda = 80$ :  $\varphi = 0,75$ ; при  $\lambda = 90$ :  $\varphi = 0,69$ .

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 7 = 0,708$$

Для второй попытки принимаем:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,708}{2} = 0,604$$

Площадь сечения:

$$A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,604 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6,93 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 6,93 \text{ см}^2$$

Площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{6,93}{2} \approx 3,46 \text{ см}^2$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $45 \times 45 \times 4$ , для которого  $A_{ye} = 3,48 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,38 \text{ см}$ .

Тогда гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,38 \cdot 10^{-2}} = 109$$

С учетом таблицы 1 методом интерполяции определяем:

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,528$$

Для третьей попытки принимаем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,604 + 0,528}{2} = 0,566$$

Площадь сечения:

$$A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,566 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,4 \text{ см}^2$$

Площадь одного уголка:

$$A_{\text{уг}} = \frac{A}{2} = \frac{7,4}{2} = 3,7 \text{ см}^2$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $50 \times 50 \times 4$ , для которого  $A_{\text{уг}} = 3,89 \text{ см}^2$ ,  $i_x = 1,54 \text{ см}$

Тогда гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,54 \cdot 10^{-2}} = 97,5$$

Методом интерполяции определяем  $\varphi_{\text{табл}} = 0,622$

Принимаем  $\varphi = \varphi_{\text{табл}} = 0,622$  и проверим принятый профиль:

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,622 \cdot 2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4}} = 138 \cdot 10^6 \text{ Па} = 138 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$$

Сечение принятого профиля недогружено на 13%. Нетрудно убедиться, что при любом ином номере профиля из сортамента будет либо недопустимая перегрузка, либо еще большая недогрузка.

## 2. Определение критической силы.

Для принятой стойки,  $\lambda = 97,5 < \lambda_{\text{сп}} = 100$  следовательно, для определения критической силы используем формулу Ф.С. Ясинского для стали:

$$\sigma_{\text{сп}} = a - b \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 97,5 = 199 \text{ МПа}$$

Определим критическую силу:

$$F_{\text{сп}} = \sigma_{\text{сп}} \cdot A = 199 \cdot 10^6 \cdot 7,78 \cdot 10^{-4} = 155 \cdot 10^3 \text{ Н} = 155 \text{ кН}$$

## 3. Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{сп}}}{F} = \frac{155}{67} = 2,3$$

**Примечание.** Если для принятой стойки  $\lambda \geq \lambda_{\text{сп}}$  то критическую силу необходимо определять по формуле Эйлера:  $F_{\text{сп}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2}$

## 4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

### 4.1. Условия задач

#### Задача 1. Расчет статически определимого ступенчатого бруса

Дано: схема нагружения бруса и величина внешних сил.

Требуется:

- 1) определить внутренние силы и построить эпюру  $N$ ;
- 2) рассчитать из условия прочности требуемый диаметр бруса на каждом силовом участке;
- 3) вычертить в масштабе полученный ступенчатый брус;
- 4) рассчитать величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса и построить эпюру напряжений по длине бруса;
- 5) определить перемещения поперечных сечений бруса и построить эпюру перемещений.

В расчетах принять:  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$

#### Задача 2. Расчет статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: схема нагружения закрепленной двутавровой балки; числовые значения нагрузок.

Требуется:

- 1) определить опорные реакции и построить эпюры поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ );
- 2) подобрать сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям;
- 3) проверить полученную балку по максимальным касательным напряжениям и главным напряжениям по третьей теории прочности; при необходимости увеличить номер двутавра;
- 4) построить эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении опасном по главным напряжениям (п. 3);
- 5) построить эпюру прогибов балки, определив прогибы сечений в середине пролета и на концах консолей;
- 6) проверить балку на жесткость.

В расчетах принять:  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ , допустимый прогиб для пролета  $[f] = \frac{l}{500}$  и для консолей  $[f] = \frac{a}{200}$ ,

где  $l$  — длина пролета;

$a$  — длина консоли.

### Задача 3. Расчет сжатого бруса на устойчивость

Дано: стальная стойка, нагруженная продольной сжимающей силой  $F$ , схема поперечного сечения и схема закрепления стойки.

Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения составной стойки;
- 2) определить величину критической силы;
- 3) определить коэффициент запаса устойчивости.

В расчетах принять:  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ .

#### 4.2. Числовые данные

##### 4.2.1. Числовые данные к задаче 1

№ строки	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	a, м	b, м	c, м
1	120	70	115	100	0,4	0,3	0,38
2	60	150	120	200	0,6	0,5	0,44
3	140	170	150	130	0,8	0,7	0,54
4	150	190	200	110	0,3	0,62	0,66
5	160	110	135	145	0,5	0,58	0,78
6	170	120	150	115	0,7	0,46	0,82
7	180	140	160	125	0,25	0,34	0,72
8	90	60	140	85	0,35	0,42	0,32
9	200	80	145	90	0,45	0,6	0,68
0	210	200	180	155	0,55	0,8	0,56
	a	б	в	г	а	б	в

##### 4.2.2. Числовые данные к задаче 2

№ строки	Размер a, м	Нагрузка		
		$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кН/м
1	1,0	80	100	80
2	0,9	100	120	70
3	0,8	110	140	60
4	1,1	90	170	50
5	1,2	85	180	70
6	1,3	80	190	60
7	0,7	120	170	90
8	1,1	100	180	85
9	0,8	110	150	75
0	0,9	120	160	65
	a	б	в	г

### 4.2.3. Числовые данные к задаче 3

№ строки	$F$ , кН	$l$ , м
1	380	3,0
2	400	3,8
3	420	3,6
4	340	3,4
5	360	3,2
6	390	3,3
7	410	3,5
8	420	3,7
9	380	3,4
0	420	3,1
	в	г

**Примечание:** Для выбора числовых данных преподавателем может выдаваться четырехзначный шифр, который ставится в соответствие первым 4 буквам русского алфавита. Записав шифр под каждой буквой (первая цифра соответствует букве а, вторая б и т. д.)

буква а б в г

шифр 1 2 3 4

из таблицы выбирается число, которое находится пересечением соответствующей строки и столбца.

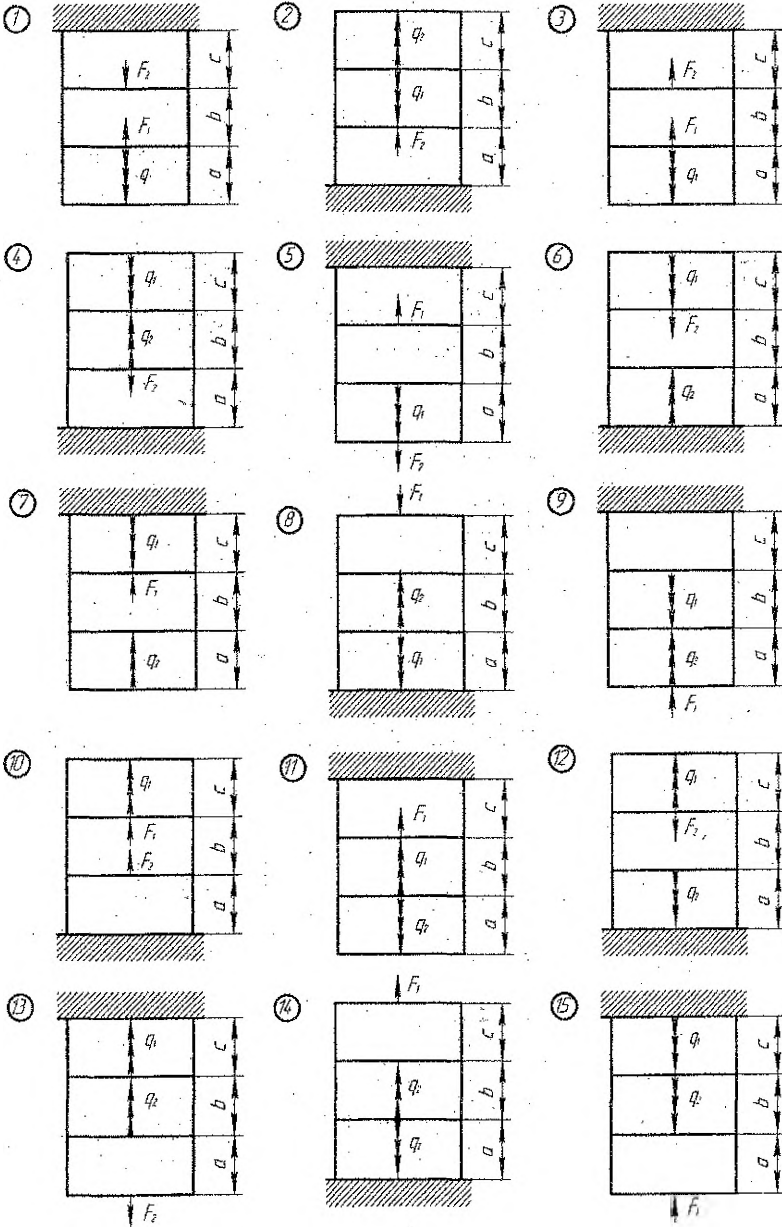
**Пример:** Шифр 1234. Выбор числовых данных к задаче 1. Первая буква, по горизонтали «а», на пересечении этого со строкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре «1» находим величину силы  $F$ , равную 120кН. Затем по следующей букве «б» и цифре «2» находим  $F_2=150$  кН и т.д.

Таблица 1 – Значения коэффициента  $\varphi$  для различных гибкостей

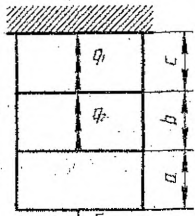
Гибкость элементов $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$	Коэффициент $\varphi$ для стали марки Ст.3	Гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$	Коэффициент $\varphi$ для стали марки Ст.3
0	1,00	120	0,45
10	0,99	130	0,40
20	0,96	140	0,36
30	0,94	150	0,32
40	0,92	160	0,29
50	0,89	170	0,26
60	0,86	180	0,23
70	0,81	190	0,21
80	0,75	200	0,19
90	0,69	210	0,16
100	0,60	220	0,15
110	0,52	230	0,13

### 4.3. Исходные схемы

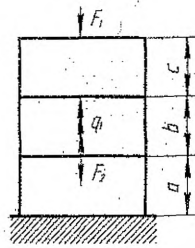
#### 4.3.1. Схемы прямолинейного бруса к задаче 1



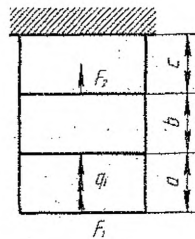
16



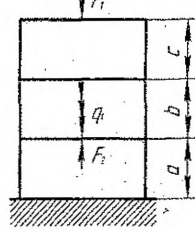
19



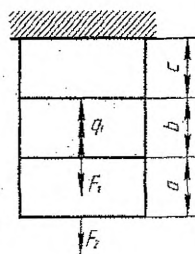
22



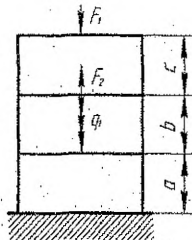
25



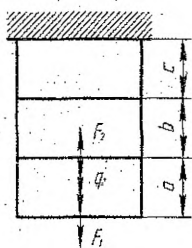
28



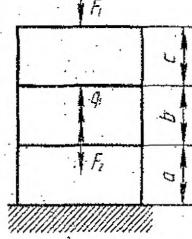
17



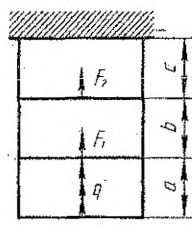
20



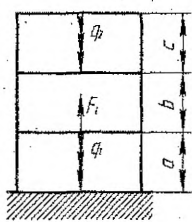
23



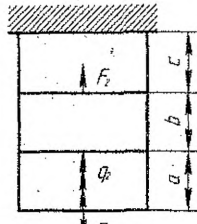
26



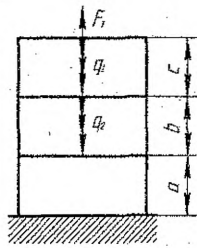
29



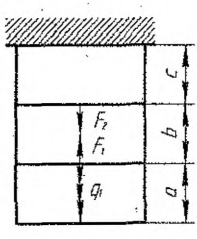
18



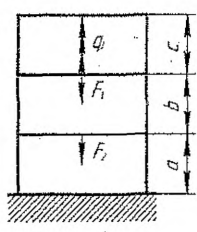
21



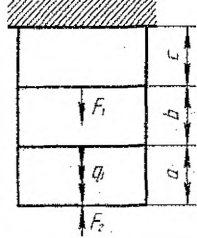
24



27

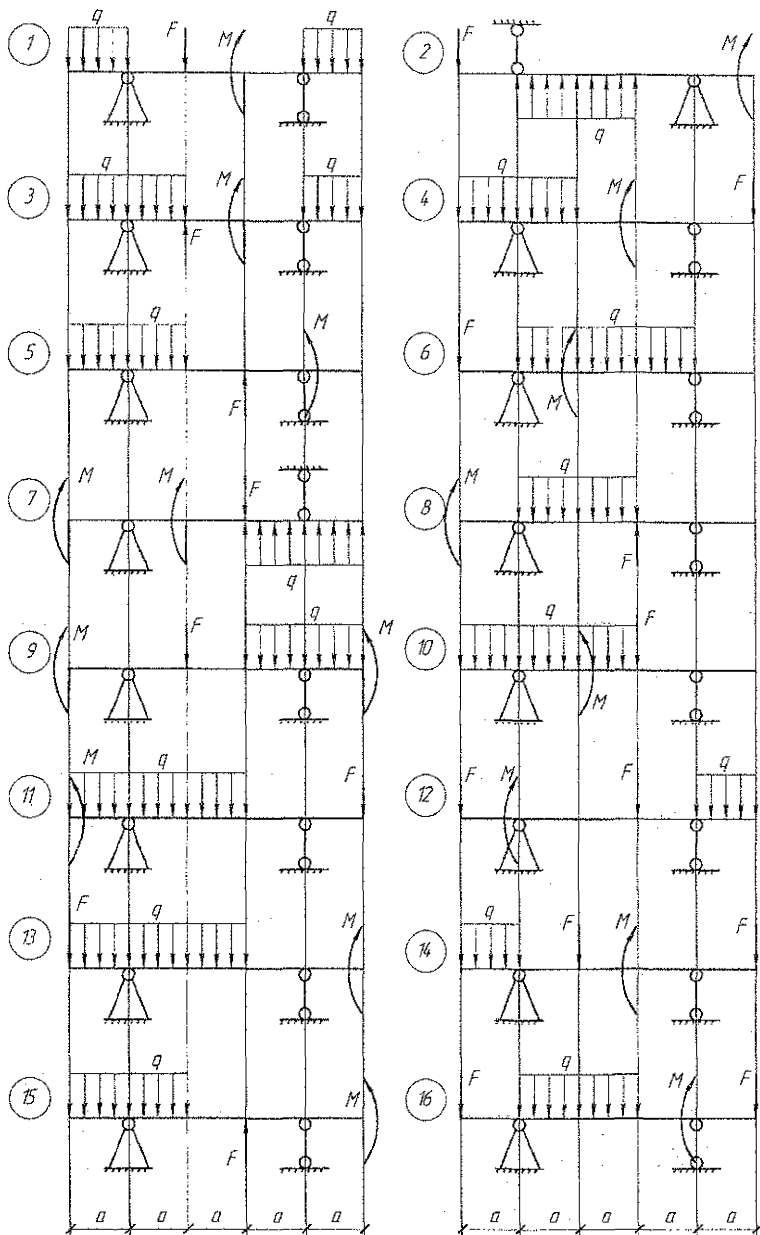


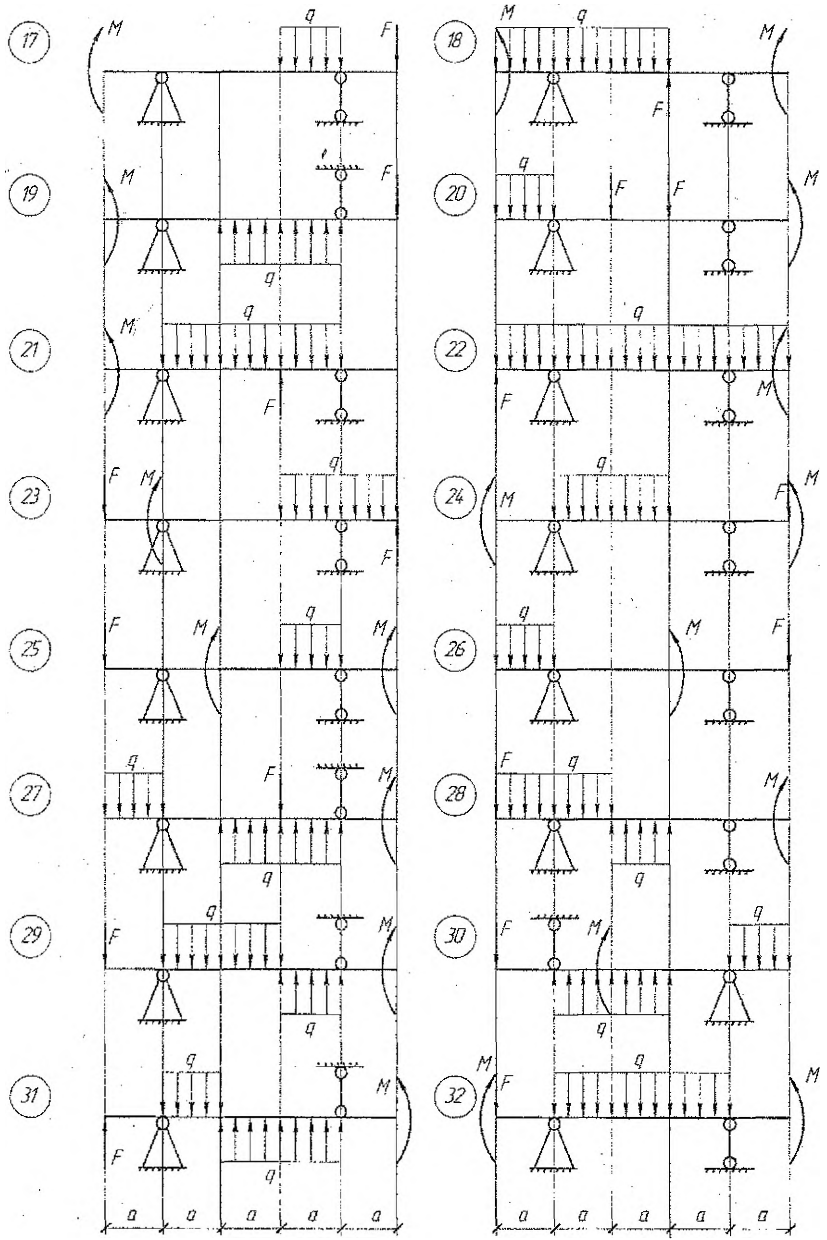
30



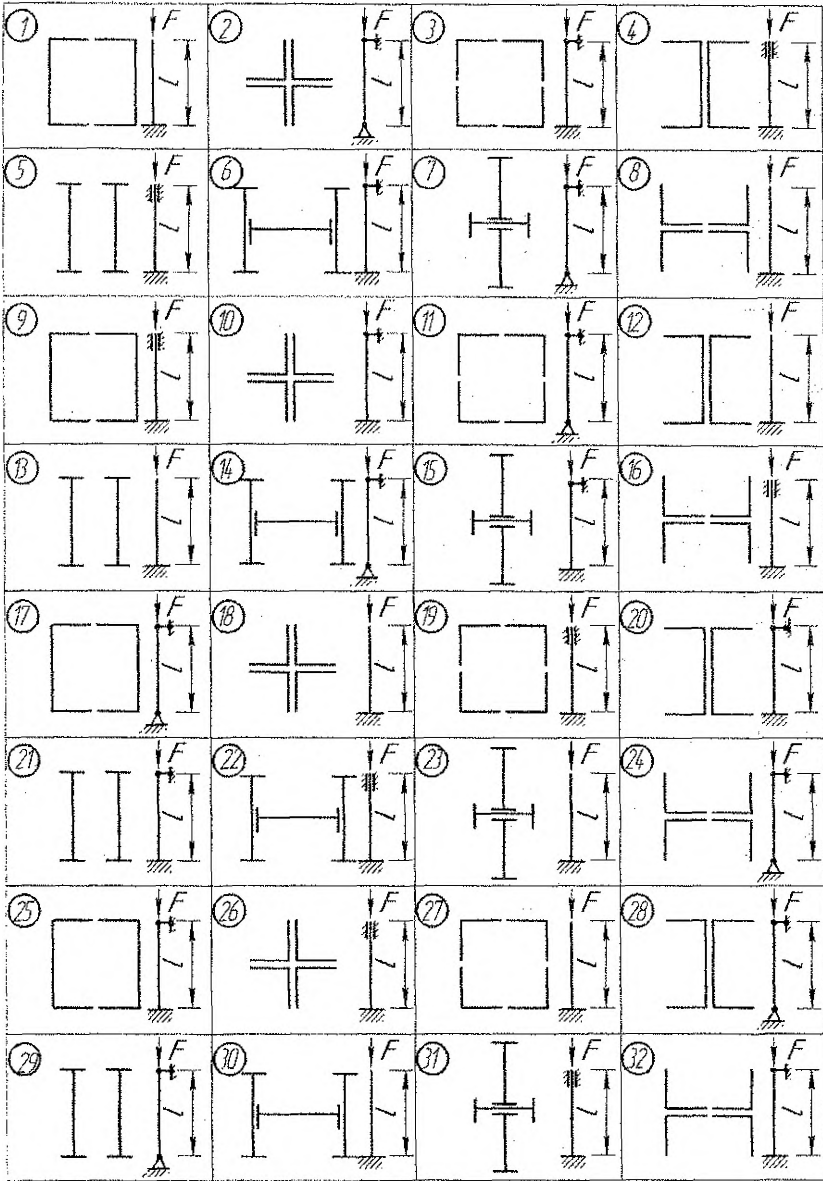


4.3.2. Схемы статически определимой двутавровой балки к задаче 2



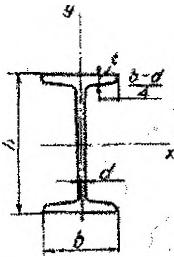


### 4.3.3. Схемы стойки к задаче 3



## 5. ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-89\*)



$I$  — момент инерции;

$W$  — момент сопротивления;

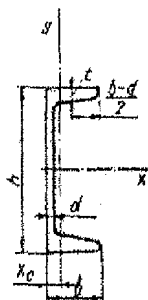
$S$  — статический момент площади полусечения;

$i$  — радиус инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	Линейная плотность $P$ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
	$h$	$b$	$d$	$r$			$x$			$y$			
							$I_{x^2}$ , см <sup>4</sup>	$W_{x^2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{x^2}$ , см	$S_{x^2}$ , см <sup>3</sup>	$I_{y^2}$ , см <sup>4</sup>	$W_{y^2}$ , см <sup>3</sup>	$i_{y^2}$ , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

## 2. Сталь горячекатаная. Швеллеры

(по ГОСТ 8240-89\*)



$I$  — момент инерции;

$W$  — момент сопротивления;

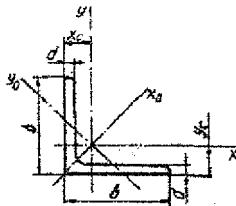
$S$  — статический момент площади полусечения;

$i$  — радиус инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	Линейная плотность $\rho$ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							$x_c$ см
	$h$	$b$	$d$	$t$			$x$				$y$			
							$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

### 3. Рекомендуемый сортимент равнополочных уголков

(по ГОСТ 8509-86)



$b$  — ширина полки;

$I$  — момент инерции;

$d$  — толщина полки;

$i$  — радиус инерции;

$x_c, y_c$  — расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

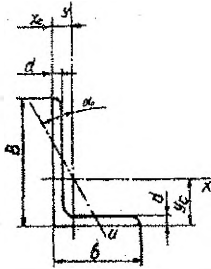
Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	Линейная плотность $P$ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей							$I_{x_c}$	$x_c, y_c$
	$b$	$d$			$x$		$y$		$y_0$		$I_{y_0}$		
					$I_{x_0}$	$i_{x_0}$	$I_{y_0}$	$i_{y_0}$	$I_{x_c}$	$i_{x_c}$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
2	20	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6	
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64	
3	30	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85	
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89	
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09	
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13	
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17	
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33	
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38	
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42	
		6	5,69	4,47	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46	
6,3	63	4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69	
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74	
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78	
7	70	5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9	
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94	
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99	
		8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02	
7,5	75	5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02	
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06	
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1	
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15	
8	80	9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18	
		6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19	
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23	
8	80	8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27	
		6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43	
		7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47	
9	90	8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51	
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55	

Окончание

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	100	7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
		12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
12,5	125	8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
		12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
14	140	9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9
16	160	10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
		11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
		16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
20	200	12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
		20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
25	250	16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
		28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

#### 4. Рекомендуемый сортамент неравноволокных уголков

(по ГОСТ 8510-86)



$B$  — ширина большой полки;  
 $b$  — ширина малой полки;  
 $d$  — толщина полки;

$I$  — момент инерции;  
 $i$  — радиус инерции;  
 $x_c, y_c$  — расстояния от центра тяжести до наружных граней полок;  
 $\alpha$  — угол наклона главной центральной оси

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения $A$ , см <sup>2</sup>	Линейная плотность $D$ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						$x_c$ , см	$y_c$ , см	$I_{xc}$ , см <sup>4</sup>	$I_{yc}$ , см <sup>4</sup>	$I_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$\alpha$
	$B$	$b$	$d$			$x$		$y$		$u$							
						$I_{x'}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x'}$ , см	$I_{y'}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y'}$ , см	$I_{u'}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u'}$ , см						
	2	3	4			5	6	7	8	9	10						
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392		
			4	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382		
3,2/2	32	20	4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374		
			5	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385		
4/2,5	40	25	4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281		
			5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374		
5/3,2	50	32	4	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,60	2,01	0,403		
			5	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401		
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397		
			5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396		
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393		
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386		
7,5/5	75	60	5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12	0,436		
			6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435		
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435		
			8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43		
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384		
			6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384		
			8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,38		
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393		
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392		
			8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40,5	0,391		
12,5/8	125	80	10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,4	48,6	0,387		
			7	14,06	11,04	226	4,01	73,73	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	74,7	0,407		
			8	15,98	12,58	225	4	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,1	0,406		
10	19,7	15,47	311	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	2	4,2	102	0,404			
			12	23,36	18,34	364	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2	4,22	118	0,4		



Окончание

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16/10	160	100	9	22,87	17,96	605	5,15	186	2,85	110,4	2,2	2,24	5,19	194	0,391
			10	25,28	19,85	666	5,13	204	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213	0,390
			12	30,04	23,58	784	5,11	238	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388
			14	34,72	27,26	897	5,08	271	2,8	162,49	2,16	2,43	5,4	282	0,385
20/12,5	200	125	11	34,87	27,37	1449	6,45	446	3,58	263	2,75	2,79	6,5	465	0,392
			12	37,89	29,74	1568	6,43	481	3,57	285	2,74	2,83	6,54	503	0,392
			14	43,87	34,43	1800	6,41	550	3,54	326	2,73	2,91	6,62	575	0,390
			16	49,77	39,07	2026	6,38	616	3,52	366	2,72	2,99	6,71	643	0,388

### 6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А. В., Шпиро, Г. С. Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. — изд. 4-е. — М.: Высш. школа, 1975. — 736 с.
2. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
3. Сопротивление материалов / Под ред. Г. С. Писаренко — 5-е изд., перераб. и доп. — К.: Вища шк, 1986. — 775 с.
4. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. — М.: Наука, 1976. — 608 с.

**УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ**

Составители:

*Хвисевич Виталий Михайлович*

*Даркович Сергей Семенович*

*Онысько Сергей Романович*

## **ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению контрольной работы по механике материалов  
для студентов специальности

1-74 05 01 – «Мелиорация и водное хозяйство»

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

Редактор: Строчак Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 29.07.2010 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,55. Уч. изд. л. 2,75.  
Заказ № 802. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет»  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267