

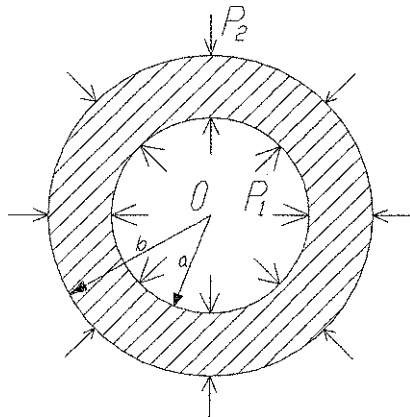
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛАМ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к решению задач  
по теории упругости и пластичности  
для студентов строительных специальностей



Брест 2016

УДК 539.3 (075.8)

Методические указания направлены на приобретение студентами навыков практического решения задач при изучении курса «Теория упругости и пластичности». В них приведены краткие теоретические сведения, примеры расчета некоторых задач теории упругости: исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела, плоская задача теории упругости, расчет тонких пластин, а также условия задач контрольной работы.

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

Составители: Веремейчик А.И., доцент  
Хвисевич В.М., доцент, к.т.н.

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	4
Требования к оформлению контрольной работы .....	4
Краткие теоретические сведения.....	4
Примеры решения задач.....	20
Задания для выполнения контрольной работы.....	48
Литература.....	58

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания соответствуют базовым учебным планам строительных специальностей и включают в себя краткие теоретические сведения, условия задания для выполнения контрольной работы и примеры расчетов по исследованию напряженно-деформированного состояния в точке упругого тела, решения плоской задачи теории упругости, расчета тонких пластин. Каждый студент-заочник по теории упругости и пластичности должен выполнить одну контрольную работу. При ее защите необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать тестовые задачи. Зачет по курсу принимается после того, как защищена контрольная работа.

### ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется на отдельных листах формата А4 с рамкой для текстовых документов.
2. Порядок оформления: титульный лист; бланк задания, выданный преподавателем, с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; перечень литературы.
3. Чертежи, схемы и эпюры выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «Брестский государственный технический университет».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Теория упругости** – раздел механики деформируемого твёрдого тела, рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. Теория упругости является научной основой для расчётов на прочность, жесткость и устойчивость частей машин и сооружений. Главная задача теории упругости — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях.

**Теория пластичности** — раздел механики сплошных сред, задачами которого является определение напряжений и перемещений в деформируемом теле за пределами упругости.

### Теория напряженно-деформированного состояния в точке тела

В твердом теле, нагруженном системой уравновешенных сил, происходит взаимное перемещение точек, возникают линейные и угловые упругие деформации, что вызывает изменение сил взаимодействия между частями тела. Эти изменения в силах взаимодействия называют внутренними силами, а их интенсивность на бесконечно малых площадках, проведенных внутри тела в той или иной точке, — напряжениями.

Выделим в некоторой точке нагруженного тела бесконечно близкими сечениями, параллельными координатным плоскостям, элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рисунок 1, а). Действие отброшенной части на параллелепипед будет выражаться девятью компонентами напряжений (рисунок 1 б, в). Совокупность этих девяти компонент полностью характеризует напряженное состояние в данной точке тела и образует тензор напряжений  $T_{\sigma}$  второго ранга, который записывается в виде матрицы:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Нормальные напряжения  $\sigma$  считаются положительными, если они вызывают растяжение. Для определения знака напряжений используется правило внешней нормали: если внешняя нормаль к площадке совпадает (противоположна) с направлением оси координат, то напряжение положительно, если оно также совпадает (противоположно) с осью координат.

Зная компоненты напряжений на трех взаимно ортогональных площадках в некоторой точке тела, можно найти нормальную и касательную составляющие на любой другой площадке, проведенной через данную точку тела ( $\sigma_{\nu}$ ,  $\tau_{\nu}$ ) (рисунок 1, в).

Известно, что в любой точке тела всегда существуют по крайней мере три такие взаимно ортогональные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения достигают экстремума. Эти площадки и напряжения называют главными (рисунок 1, г). Главные напряжения обозначают индексами 1, 2, 3, которые нумеруются в соответствии с неравенством  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Площадки равнонаклоненные к главным, и напряжения, действующие на них, называются октаэдрическими  $\sigma_{окт}$ ,  $\tau_{окт}$  (рисунок 2).

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклонных под углом  $45^\circ$  к каждой паре главных площадок, и равны полуразности соответствующих главных напряжений. Их обозначают  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$  (рисунок 3).

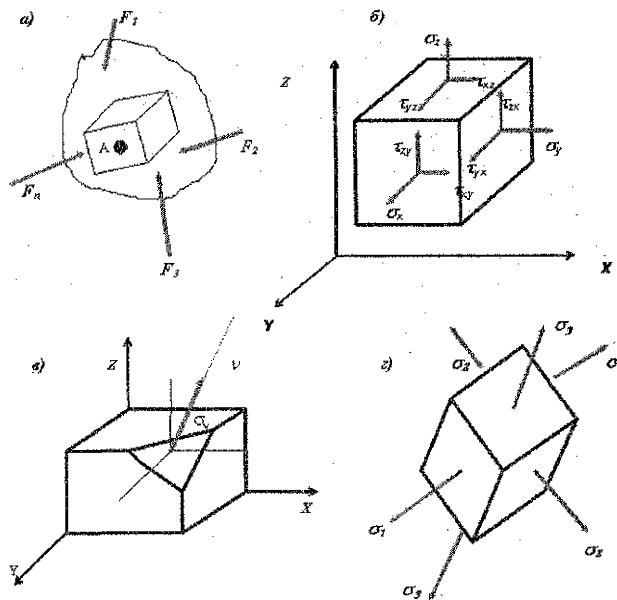


Рисунок 1 – Компоненты тензора напряжений, главные напряжения

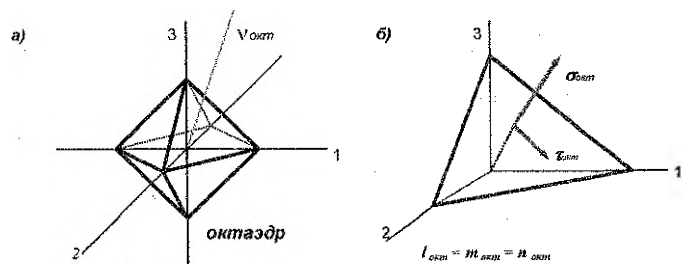


Рисунок 2 – Октаэдрические напряжения и площади

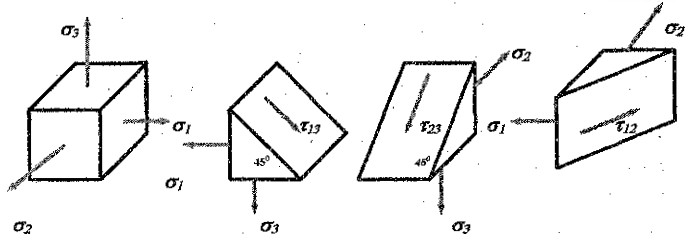


Рисунок 3 – Наибольшие касательные напряжения

Напряжения и поверхностные силы выражаются в МПа, сосредоточенные силы – в Н, объемные (массовые) нагрузки – в Н/м<sup>3</sup>.

Основные уравнения теории упругости:

I. Группа статических уравнений:

Дифференциальные уравнения равновесия (Навье - Коши):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  - проекции объемных сил на оси координат.

II. Группа геометрических уравнений:

Формулы Коши:

- линейные деформации:  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ; (2)

- угловые деформации:  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ;  $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ ;  $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ ;

где  $u, v, w$  - перемещения вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

Уравнения совместности деформаций (Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (3)$$

III. Группа физических уравнений:

Обобщенный закон Гука:

- прямая форма:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \quad (4)$$

- обратная форма:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}; \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода (Юнга),  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  
 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль упругости второго рода (сдвига),  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – относи-

тельное изменение объема,  $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ ;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$  – коэффициенты

Ляме.

Решение уравнений групп I, II, III должно удовлетворять условиям на поверхности (3). Система 15 уравнений (1), (2), (4) или (5) используется для определения 15 неизвестных ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$ ).

Способы решения задач теории упругости: решение в перемещениях, напряжениях или системной форме.

Методы решения:

1. Прямой метод. Интегрируется система 15-ти уравнений при выполнении условий на поверхности.
2. Обратный метод. Задаются функции напряжений или перемещений, удовлетворяющих системе уравнений, а затем из граничных условий определяются нагрузки, соответствующие такому решению.
3. Полуобратный метод (Сен-Венана). Часть неизвестных задаётся и представляется в систему уравнений, из которых определяются остальные неизвестные.

Формулы и уравнения, по которым можно вычислить  $\sigma_i, \tau_{ij}$ , величины главных напряжений и положение главных площадок,  $\tau_{окт}, \sigma_{окт}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ , а также другие необходимые зависимости, использующиеся в теории напряженно-деформированного состояния, будут приведены ниже в примере 1.

**Плоская задача теории упругости**

Плоской называется задача, в которой напряженное состояние тела определяется напряжениями, действующими только в одной плоскости. В теории упругости различают два вида плоских задач (в плоскости  $xOy$ ):

1. Плоское деформированное состояние (плоская деформация), при котором перемещения точек тела происходят только в двух направлениях параллельно одной плоскости ( $xOy$ ), а деформации из плоскости, т. е. в направлении оси  $z$ , равны нулю:  $\varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$ . К этой задаче относятся длинные цилиндрические или призматические тела, вытянутые вдоль оси  $z$ , под действием нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль нее (длинные пластины, подпорные стенки, плотины).

Так как условия работы всех сечений одинаковы, то:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y); \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y).$$

Из формул закона Гука (4) получим:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \quad \text{откуда} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$



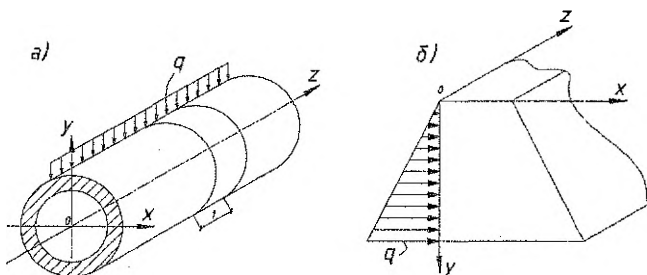


Рисунок 4 – Пример плоского деформированного состояния

2. Обобщенное плоское напряженное состояние, при котором напряжения  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  равны нулю. К этой группе задач относится расчет тонких пластин, нагруженных по боковым граням силами, параллельными плоскости пластин (рисунок 5).

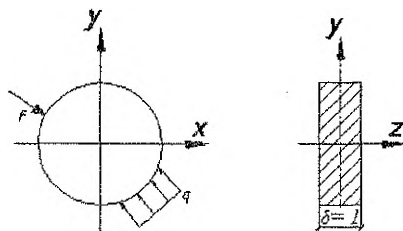


Рисунок 5 – Пример плоского напряженного состояния

Суть обобщения: для пластин конечной толщины  $\delta$  принимается то, что выполняется в бесконечно тонкой пластине: равенство нулю напряжений из плоскости, а также равномерное распределение неизвестных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  по толщине пластин.

Основные уравнения для плоской деформации.

1. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Условия на поверхности:

$$P_{xv} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad P_{yv} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m, \quad (7)$$

где  $l = \cos(\alpha, \nu)$ ,  $m = \cos(\beta, \nu)$  - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

2. Формулы Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

3. Закон Гука:

а) в прямой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (10)$$

б) в обратной форме:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad (11)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (12)$$

При плоском напряженном состоянии плоскости свободны от нагрузки:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad (13)$$

а другие напряжения не зависят от координаты z:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (14)$$

Из закона Гука  $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$ ,

$$\text{а } \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy};$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}.$$

При плоском напряженном состоянии имеет место деформация  $\varepsilon_z$ , но нет напряжения  $\sigma_z$ , при плоской деформации – наоборот, имеется напряжение  $\sigma_z$ , но отсутствует деформация  $\varepsilon_z$ .

В итоге, для решения плоских задач имеем восемь уравнений: два дифференциальных уравнения Навье-Коши; три геометрических соотношения Коши и три уравнения обобщенного закона Гука, с восьмью неизвестными:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ .

При решении задачи в напряжениях основными неизвестными будут  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Если объемные силы постоянны (например, собственный вес), то уравнения для обеих плоских задач совпадают. Решение упрощается, если все неизвестные напряжения выразить через одну функцию  $\varphi(x, y)$  (функцию напряжений Эри) следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \bar{X}_y + \bar{Y}_x \right), \quad (15)$$

где  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  – объемные силы в проекциях на оси x и y соответственно.

Функцию  $\varphi(x, y)$  можно определить из решения бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (16)$$

при граничных условиях:  $X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m$ ;  $Y_v = \tau_{xy} l + \sigma_y m$ .

Во многих случаях получить точное решение уравнения (16) оказывается сложным. Для приближенного решения этого уравнения применяют численные методы и в частности метод конечных разностей (МКР). Суть МКР состоит в том, чтобы решение плоской задачи с помощью функции напряжений  $\varphi$  свести к алгебраическим уравнениям. В этом методе частные производные уравнения (16) приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое. Это уравнение, как увидим далее, содержит значение функции напряжений в тринадцати точках, расположенных в определенном порядке на сетке вокруг центральной точки. Поэтому вместо одного бигармонического уравнения в частных производных приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений. Точность МКР прямо зависит от густоты сетки: чем гуще сетка, тем точнее будет решение задачи.

Рассмотрим некоторую функцию  $\varphi(x)$ , проходящую через точки 1, 2, 3 (рисунок 6). Представим приближенно эту функцию параболой  $\varphi = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ , тогда

$$\varphi_{лев} = a \cdot (\Delta x)^2 - b \cdot \Delta x + c; \quad \varphi_0 = c; \quad \varphi_{пр} = a \cdot (\Delta x)^2 + b \cdot \Delta x + c.$$

Находим коэффициенты  $a, b, c$ :  $a = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2}$ ,  $b = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}$ ,  $c = \varphi_0$ .

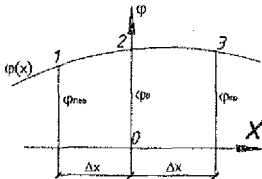


Рисунок 6 – Графическое представление функции  $\varphi$

Уравнение параболы примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2} \cdot x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x} \cdot x + c.$$

Находим производные

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \cdot x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2}.$$

При  $x=0$ :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad (a);$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \quad (б).$$

Воспользуемся этими формулами для решения плоской задачи. Нанесём на рассматриваемую область сетку с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рисунок 7).

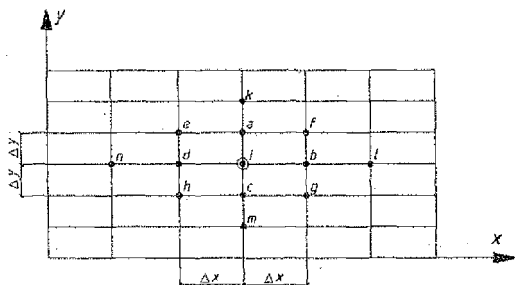


Рисунок 7 – Схема сетки

Выберем некоторую центральную точку “i”. На основании формул (а) и (б) для неё:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \cdot \Delta x}; \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{(\Delta x)^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \cdot \Delta y}; \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_i = \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_a}{(\Delta y)^2}; \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_i = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_c}{2 \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{1}{2 \Delta y} \left( \frac{\varphi_f - \varphi_e}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2 \cdot \Delta x} \right) = \frac{\varphi_f - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_h}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}.$$

Используя (17), находим 4-ю производную:

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_b + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_n)}{(\Delta x)^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_a + \varphi_c) + (\varphi_k + \varphi_m)}{(\Delta y)^4}; \quad (в)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i = \frac{4\varphi_i - 2 \cdot (\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_f + \varphi_e + \varphi_g + \varphi_h)}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}.$$

Подставим (в) в (16) и после преобразования получим алгебраическое уравнение, заменяющее бигармоническое:

$$\left(6\alpha^2 + 8\alpha + 6\right)\varphi_i - 4(\alpha + 1) \cdot (\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) +$$

$$+ (\varphi_k + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n) = 0, \quad (18)$$

где  $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ . Тогда напряжения в точке "i" получим по формулам:

$$\sigma_x = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i = \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_c}{(\Delta y)^2}; \quad \sigma_y = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_b - 2\varphi_i + \varphi_d}{(\Delta x)^2};$$

$$\tau_{xy} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y}. \quad (19)$$

Уравнения (19) должны составляться для каждой внутриконтурной точки. Когда уравнения составляются для внутриконтурных точек, лежащих на ближайшей линии, параллельной контуру, то в них вынужденно входят и значения функции  $\varphi$  контурных и законтурных точек. Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий (рисунок 8). Таким образом, неизвестных значений  $\varphi$  столько, сколько узлов внутри контура.

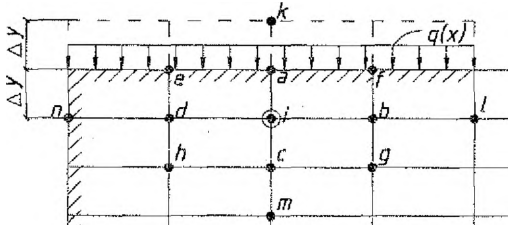


Рисунок 8 – Схема для определения  $\varphi$  на контуре и вне контура

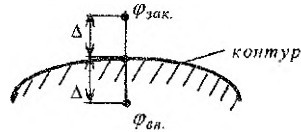


Рисунок 9 – Определение  $\varphi$  в законтурных точках

Для определения значений функции  $\varphi$  на контуре и вне его удобно воспользоваться так называемой рамной аналогией (идеи профессоров П.Л. Пастернака, П.М. Варвака, А.П. Синицина). Если, например, на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка  $q(x)$ , направленная вниз, то для этой грани можно записать:  $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q$ . Сравнивая это выражение с известной зависимостью  $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$ , заключаем, что функцию напряжений на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки (рамы) с такой же нагрузкой, т.е.  $\varphi_a = M_a$ , или в общем виде:

$$\varphi_{кон} = M. \quad (20)$$

Для отыскания  $\varphi$  в законтурной точке (рисунок 9) используется формула:

$$\varphi_{зак} = 2 \cdot \Delta \cdot N + \varphi_{ан}, \quad (21)$$

где  $N$  – значение продольной силы в контурной точке.

Из формул (20) и (21) следует, что для записи  $\varphi_{кон}$  и  $\varphi_{зак}$  нужно построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  для соответствующей ра-

мы. Под соответствующей рамой будем понимать такую раму, которая повторяет контур пластинки, геометрически неизменяемая и, желательнее, статически определимая.

На основании вышеизложенного следует придерживаться следующего порядка расчета балки-стенки (пластинки) методом конечных разностей:

1. На заданную балку-стенку наносится сетка с определенным шагом и нумеруются внутренние узлы сетки (с учетом симметрии).

2. В соответствии с методом рамных аналогий выбирается соответствующая рама и для нее строятся эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$ . Эпюра  $M$  строится на растянутых волокнах, изгибающие моменты, отложенные внутри контура рамы, считать положительными. Знак продольной силы: растяжение — плюс, сжатие — минус.

3. Выражаются значения функции  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные по формуле (21).

4. Записываются алгебраические уравнения по формулам (18) для каждой внутриконтурной точки, решается система уравнений и находятся значения функции  $\varphi$  в внутриконтурных точках.

5. Определяются напряжения в узлах сетки по формулам (19) и строятся их эпюры.

### Расчет тонких пластин

#### а) прямоугольные пластины.

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого толщина мала по сравнению с размерами поверхности, т.е.  $h \ll a \sim b$  (рисунок 10). Пластинки, которые будут рассматриваться далее, являются тонкими, жесткими, упругими и прямоугольными. Это значит, что толщина их  $h$  не превышает  $1/5$  наименьшего размера в плане, а наибольший прогиб  $w$  не превышает  $1/4$  толщины. Задача о расчете пластинок является трехмерной, однако вследствие некоторых гипотез она сводится к двумерной. Широкое практическое применение получила техническая теория изгиба на основе гипотез, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом [1-4].

Согласно этим допущениям, все напряжения и деформации можно выразить через функцию прогибов срединной поверхности пластинки  $w(x, y)$ . Считаем, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки, т.е. нормальной к срединной плоскости, а срединная плоскость совпадает с плоскостью  $xOy$  прямоугольной системы координат. Ось  $z$  направлена по вертикали вниз (рисунок 10).

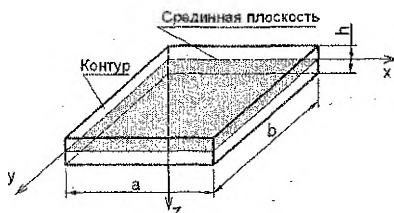


Рисунок 10 - Схема пластинки

Усилия в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости, выраженные через функцию прогибов  $w(x, y)$  (погонные, т. е. приходящиеся на единицу длины сечения срединной плоскости) определяются по формулам:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right).$$
(22)

где  $M_x, M_y$  - погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалью  $x$  и  $y$  соответственно;  $M_{xy} = M_{yx}$  - погонные крутящие моменты в тех же сечениях;

$Q_x, Q_y$  - погонные перерезывающие (поперечные) силы;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жесткость пластинки.

Напряжения связаны с  $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}, Q_x, Q_y$  следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_x}{I}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_y}{I};$$
(23)

где  $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$  - погонный момент инерции сечения пластинки (осевой момент

инерции полоски единичной ширины),  $S_x = S_y = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$  - статический момент

отсеченной части площади сечения, находящейся выше или ниже уровня точки, в которой определяются напряжения. Эти формулы аналогичны формулам, используемым в сопротивлении материалов при изгибе балки прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Действие силовых факторов и распределение напряжений в сечениях пластинки показаны на рисунках 11, 12, 13.

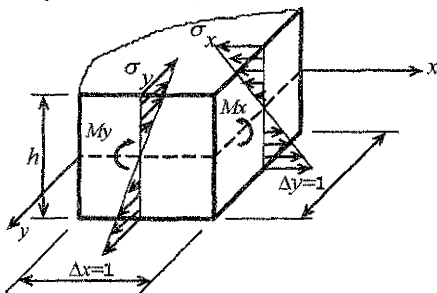


Рисунок 11 - Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$

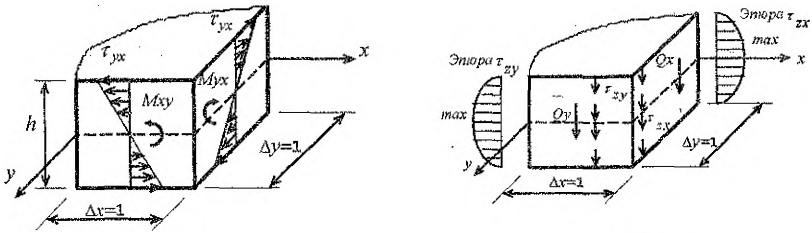


Рисунок 12 - Эторы касательных напряжений  $\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

**Примечание.** На рисунках 11, 12, 13 показаны положительные направления указанных усилий.

Из формул (22) и (23) следует, что для определения усилий и напряжений необходимо знать функцию прогибов  $w(x, y)$ , которая должна в каждой точке пластинки удовлетворять основному дифференциальному уравнению ее изогнутой поверхности (уравнению Софи Жермен) и условиям на опорном контуре (граничным условиям). Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (24)$$

где  $\nabla$  - оператор Лапласа,  $q(x, y)$  — распределенная нормально к поверхности пластинки нагрузка.

Укажем, каковы должны быть граничные условия для функции  $w(x, y)$  в различных случаях закрепления пластинки (рисунок 13).



Рисунок 13 - Варианты закрепления граней пластинки

Для каждого края пластинки должно быть два граничных условия.

1. Зашемленный край:

при  $x=0$ : прогиб  $w=0$ , угол поворота  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ , изгибающий момент

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \neq 0.$$

2. Шарнирно опертый край:

при  $y=0$ : прогиб  $w=0$ , угол поворота  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ , изгибающий момент

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$



3. Свободный край:

при  $x=a$ : прогиб  $w \neq 0$ , изгибающий момент

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{приведенная поперечная сила}$$

$$Q_x^{прив} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Здесь рассмотрены три основных способа закрепления краев пластинки и показаны соответствующие граничные условия для функции  $w$ . На практике приходится встречаться и с другими способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворот же края возможен, но сопровождается появлением изгибающих моментов, пропорциональных повороту — упруго заделанный край ( $w=0, \varphi \neq 0, M \neq 0$ ). Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку — упруго опертый край ( $w \neq 0, Q \neq 0$ ).

Задача об изгибе пластинки будет решена, если будет найдена функция  $w(x, y)$ , удовлетворяющая уравнению (24) и граничным условиям. Эта задача в некоторых случаях решается обратным методом, т. е. задается вид функции прогибов  $w(x, y)$ , а затем определяются нагрузки и условия закрепления, которым соответствует эта функция.

В тех случаях, когда не удовлетворяется уравнение (24), расчет производится приближенным методом Бубнова-Галеркина. Он состоит в том, что для заданной нагрузки  $q(x, y)$  задается вид функции  $w(x, y)$ , удовлетворяющей только граничным условиям. При подстановке  $w(x, y)$  и  $q(x, y)$  в уравнение Софи Жермен последнее может тождественно не удовлетворяться. Поэтому уравнение удовлетворяют в среднем для всей площади пластинки, т. е. в интегральном смысле. Исходя из этого, получают следующее уравнение Бубнова-Галеркина:  $\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS$ , где  $S$  — плоская область, ограниченная контуром пластинки. Методика расчета рассмотрена в [1-5].

При определении толщины пластины, например, по энергетической теории прочности, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma].$$

Главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  определяются как корни кубического уравнения:  $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$ ,

где  $I_1, I_2, I_3$  — инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

При изгибе пластин напряжением  $\sigma_z$  пренебрегают. В частном случае,

когда  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , инварианты примут вид:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \\ I_2 = \sigma_x \sigma_y, \\ I_3 = 0. \end{cases} \quad \text{а кубическое}$$

уравнение -  $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma = 0$ . Отсюда  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$ . Решение квадратного уравнения по определению  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не представляет сложностей.

### б) круглые пластины.

Задача об изгибе круглой пластины будет осесимметричной, если нагрузка и условия закрепления её краев не зависят от полярного угла  $\theta$ . В этом случае прогибы также не зависят от угла  $\theta$ , а являются функцией координаты  $r$ , т.е.  $w = f(r)$ . Тогда имеем:

а) дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}. \quad (25)$$

б) внутренние силы:

$$\text{изгибающие моменты: } M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

$$\text{поперечная сила: } Q_r = -D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right);$$

в) граничные условия:

$$\text{жесткое защемление - } w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} = 0, M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \neq 0,$$

$$\text{шарнирное закрепление - } w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} \neq 0; M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$$

свободный край (в зависимости от действующих нагрузок) -  $w \neq 0; M_r = 0$  или  $M_r = m, Q_r = 0$  или  $Q_r = F$ .

Уравнение (25) можно решить в общем виде:  $w = w_1 + w_2$ , где  $w_1$  - общее решение однородного уравнения,  $w_2$  - частное решение неоднородного уравнения:  $w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$ .

Например, для равномерно распределённой нагрузки  $q(r) = q = const$ :  $w_2 = \frac{qr^4}{64D}$ . Тогда  $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$ . Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из граничных условий.

Рассмотрим сплошную пластинку, шарнирно опёртую по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ . Для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  имеем следующие условия: в центре пластинки при  $r=0$  прогиб  $w$  должен иметь конечное значение. Т. к.  $\ln 0 = \infty$ , то  $C_2=C_4=0$ . Решение имеет вид:  $w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3r^2$ .

Определим  $C_1$  и  $C_3$ ; при  $r=a$ :  $w=0$ ;  $M_r=0$ . Из первого условия ( $w=0$ ):  $\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3a^2 = 0$ . Из второго условия ( $M_r=0$ ):

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left( C_3 \cdot 2a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0, \text{ откуда } C_1 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{qa^2}{32D}.$$

Подставляем полученные величины в выражение для  $w(r)$ :

$$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right).$$

Подставляем функцию  $w(r)$  в выражения для  $M_r$  и  $M_\theta$ , получим:

$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2); \quad M_\theta = \frac{q}{16} \left( (3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \right). \quad (26)$$

Эпюры  $M_r$  и  $M_\theta$  построены при  $\nu=0,3$  (рисунок 14а).

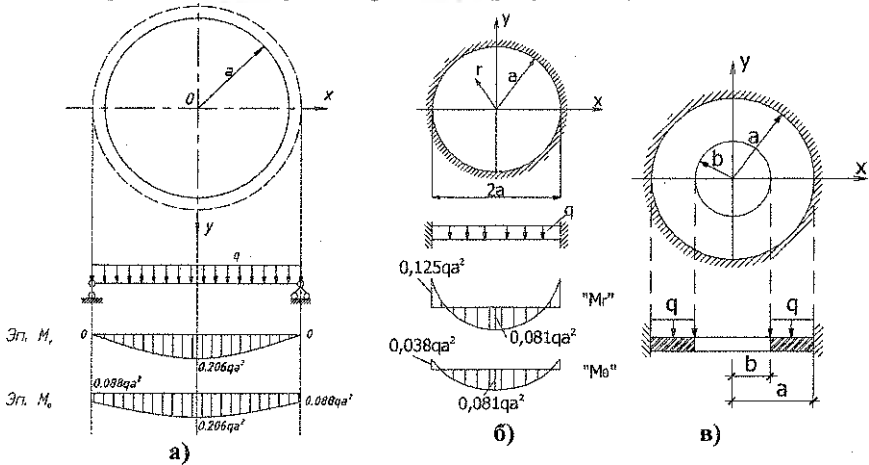


Рисунок 14 – Схемы пластин и эпюры  $M_r, M_\theta$

В случае сплошной защемлённой по контуру пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки (рисунок 14, б) для определения постоянных  $C_1$  и  $C_3$  имеем следующие граничные условия: на контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и углы поворота сечений: при  $r = a$ :  $w = 0$ ;  $\frac{dw}{dr} = 0$ . Окончательно получим:  $w(r) = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2$ .

Для кольцевой пластинки с заземлённым наружным краем (рисунок 14, в) для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  в функции  $w(r)$  имеем следующие граничные условия: при  $r=a$ :  $w=0, \frac{dw}{dr}=0$ , при  $r=b$ :  $M_r=0, Q_r=0$ . Подставляя в эти условия  $w(r)$ , получим четыре уравнения для определения  $C_1-C_4$ .

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

#### Пример 1.

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Стрелки на рисунке соответствуют положительным направлениям компонент в выбранной системе координат.

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}; \sigma_y = -45 \text{ МПа}; \sigma_z = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \tau_{yz} = -30 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 40 \text{ МПа}.$$

Элементарный параллелепипед с заданными компонентами напряжения представлен на рисунке 15.

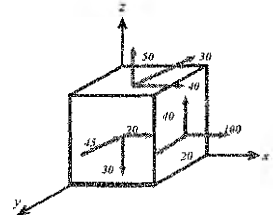


Рисунок 15 - Исходное напряженное состояние

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости  $E = 200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Положительные некоторой площадки, наклоненной к осям  $x, y, z$  и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рисунок 1, в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке  $l = \cos \alpha = 1/\sqrt{2} = 0,707$ ;  $m = \cos \beta = 1/\sqrt{3} = 0,577$ ;  $n = \cos \gamma = 1/\sqrt{6} = 0,408$ . Как известно из математики, направляющие косинусы должны удовлетворять условию  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Требуется:

- 1) найти нормальную и касательную составляющие напряжений на площадке с заданной ориентацией (с заданными направляющими косинусами  $l, m, n$ );
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) найти величину наибольших касательных напряжений в данной точке тела и указать площадки, по которым они действуют;
- 4) найти нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках и указать их расположение;
- 5) построить для заданного напряженного состояния круги Мора и указать на них точки, изображающие напряженное состояние на площадках, на которых напряженное состояние задано или определилось в процессе решения задачи;
- 6) определить компоненты деформаций в заданных и главных осях;
- 7) определить интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;
- 8) разложить заданный тензор напряжения на шаровой и девiator;
- 9) приняв в исходном тензоре напряжений  $\sigma_z=0, \tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$ , вычислить величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;
- 10) найти удельную потенциальную энергию деформации (полную, изменения объема, изменения формы);
- 11) определить расчетные напряжения по четырем классическим критериям прочности и пластичности.

Решение:

1. *Определение нормальной и касательной составляющих напряжения на площадке с заданной ориентацией.*

Напряжения на площадке, нормаль к которой имеет направляющие косинусы  $l, m, n$ , определяются из условий равновесия тетраэдра, отсекаемого этой площадкой с нормалью от элементарного параллелепипеда с гранями, нагруженными заданными компонентами напряжения (рисунок 16).

Составляющие вдоль осей  $x, y, z$  полного напряжения на площадке с нормалью  $v_n$  определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \quad (27)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью  $v_n$ :

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \quad (28)$$

Нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью  $v_n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_v &= p_{xv} \cdot l + p_{yv} \cdot m + p_{zv} \cdot n = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{xy} \cdot lm + 2\tau_{yz} \cdot mn + 2\tau_{zx} \cdot nl; \\ p_v^2 &= \sigma_v^2 + \tau_v^2; \quad \tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

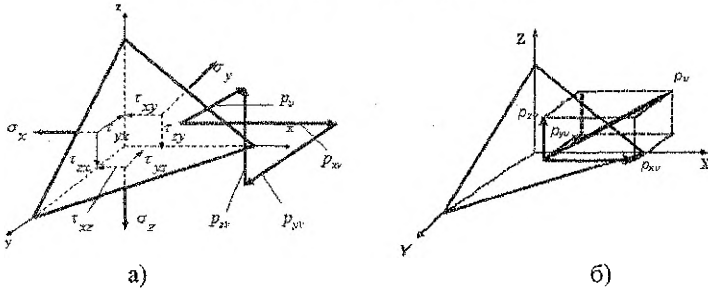


Рисунок 16 - Напряжения на наклонной площадке

Подставляя в зависимости (27) - (29) исходные данные, получаем составляющие вдоль осей  $x, y, z$  полного напряжения на площадке с нормалью  $v_n$ :

$$\begin{aligned} p_{xv} &= 100 \cdot 0,707 + 20 \cdot 0,577 + 40 \cdot 0,408 = 98,56 \text{ МПа}; \\ p_{yv} &= 20 \cdot 0,707 + 45 \cdot 0,577 + 30 \cdot 0,408 = -24,07 \text{ МПа}; \\ p_{zv} &= 40 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,577 + 50 \cdot 0,408 = 31,37 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Полное напряжение на той же площадке:

$$p_v = \sqrt{98,56^2 + (-24,07)^2 + 31,37^2} = 106,2 \text{ МПа}.$$

Нормальное и касательное напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 100 \cdot (1/\sqrt{2})^2 + (-45) \cdot (1/\sqrt{3})^2 + 50 \cdot (1/\sqrt{6})^2 + 20 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{3} + \\ &+ (-30) \cdot 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{6} + 40 \cdot 1/\sqrt{6} \cdot 1/\sqrt{2} = 68,6 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\tau_v = \sqrt{106,2^2 - 68,6^2} = 81,07 \text{ МПа}.$$

## 2. Определение величины и направления главных напряжений.

Для отыскания величины главных напряжений необходимо решить кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (30)$$

Вычисляем инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 50 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 50 + 50 \cdot 100 - 20^2 - (-30)^2 - 40^2 = -4650 \text{ (МПа)}^2, \quad (31)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= 100 \cdot (-45) \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot (-30) \cdot 40 - 100 \cdot (-30)^2 + 45 \cdot 40^2 - 50 \cdot 20^2 = -311000 \text{ (МПа)}^3.$$

Кубическое уравнение (5) принимает вид:  $\sigma^3 - 105\sigma^2 - 4650\sigma + 311000 = 0$ .

Кубическое уравнение (30) решаем с помощью формулы Кардано, относящейся к уравнению вида:

$$x^3 + cx + q = 0. \quad (32)$$

Это кубическое уравнение имеет три действительных корня, если выполняется неравенство:

$$D = (c/3)^3 + (q/2)^2 < 0. \quad (33)$$

Тогда решение кубического уравнения (32) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2R \cos(\varphi/3), \\ x_2 &= -2R \cos(\varphi/3 + 2\pi/3), \\ x_3 &= -2R \cos(\varphi/3 + 4\pi/3), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{q}{2R^3}, \quad R = \pm \sqrt{\frac{|c|}{3}}, \quad (35)$$

при этом знак  $R$  должен совпадать со знаком  $q$ , а  $c \leq 0$ .

Кубическое уравнение (30) можно привести к виду (32) посредством замены переменной

$$\sigma = x + I_1/3. \quad (36)$$

Тогда

$$c = -I_1^2/3 + I_2, \quad q = -(2I_1^3)/27 + I_1 I_2/3 - I_3. \quad (37)$$

Подставляя в (37) подсчитанные выше значения инвариантов напряжения  $I_1, I_2, I_3$ , находим

$$\begin{aligned} c &= -\frac{105^2}{3} - 4650 = -8325 \text{ (МПа)}^2, \\ q &= -\frac{2}{27} \cdot 105^3 + \frac{105 \cdot (-4650)}{3} + 311000 = 62500 \text{ (МПа)}^3. \end{aligned}$$

Проверяем условия (10) и (12):

$$D = \left(\frac{-8325}{3}\right)^3 + \left(\frac{62500}{2}\right)^2 = -2,039 \cdot 10^{10} < 0, \quad C = -8325 < 0.$$

Оба условия выполнены. Следовательно, в данном случае можно воспользоваться решением Кардано:

$$R = +\sqrt{\frac{8325}{3}} = 52,678 \text{ МПа}, \quad \cos \varphi = \frac{62500}{2 \cdot (52,678)^3} = 0,214, \quad \text{откуда } \varphi = 1,355 \text{ рад.}$$

По формулам (34) находим корни уравнения кубического уравнения (32):

$$x_1 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355}{3}\right) = -94,791 \text{ МПа},$$

$$x_2 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 2 \cdot 3,14}{3}\right) = +87,219 \text{ МПа},$$

$$x_3 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 4 \cdot 3,14}{3}\right) = +7,572 \text{ МПа}.$$

Проверка:  $x_1 + x_2 + x_3 = -94,791 + 87,219 + 7,572 = 0$ .

**Примечание.** При ненулевом значении необходимо оценить погрешность расчета.

По формуле (36) найдем три корня уравнения (32), т.е. искомые значения главных напряжений:

$$\sigma_I = x_1 + \frac{I_1}{3} = -94,791 + \frac{105}{3} \approx -59,79 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = x_2 + \frac{I_1}{3} = 87,219 + \frac{105}{3} \approx 122,22 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = x_3 + \frac{I_1}{3} = 7,572 + \frac{105}{3} \approx 42,57 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  наибольшему по алгебраической величине из этих напряжений присвоим индекс I и т. д. Тогда

$$\sigma_1 = \sigma_{II} = 122,22 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \sigma_{III} = 42,57 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = \sigma_I = -59,79 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности полученного решения найдем инварианты напряженного состояния, выразив их через главные напряжения. Они должны быть такими же, как и вычисленные выше по заданным компонентам напряжений (31):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 122,22 + 42,57 - 59,79 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22 \approx -4649,9 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 122,22 \cdot 42,57 \cdot (-59,79) \approx -311082 \text{ (МПа)}^3.$$

Оценим погрешность расчета:

$$\varepsilon_2 = \frac{4650 - 4649,9}{4649,9} \cdot 100\% = 0,0022\% < 3\%,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{311082 - 311000}{311000} \cdot 100\% = 0,026\% < 3\%.$$

Положение главных площадок определяется направляющими косинусами нормали к главным площадкам. Для отыскания направляющих косинусов нормали к  $i$ -й главной площадке ( $i=1,2,3$ ) используем систему уравнений, подставив в нее  $\sigma = \sigma_i$ . Тогда направляющие косинусы принимают значения  $l_i, m_i, n_i$ .

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{xz} n_i = 0, \\ \tau_{yx} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{yz} n_i = 0, \\ \tau_{zx} l_i + \tau_{zy} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (39)$$

Из трех уравнений (38) выберем любые два, например, первое и второе. Делим эти уравнения на  $n_i$  и вводим обозначения

$$a_i = l_i / n_i; \quad b_i = m_i / n_i. \quad (40)$$

Получаем

$$(\sigma_x - \sigma_i) a_i + \tau_{xy} b_i = -\tau_{xz}, \quad \tau_{yx} a_i + (\sigma_y - \sigma_i) b_i = -\tau_{yz},$$

отсюда

$$\begin{aligned} a_i &= [\tau_{yx} \tau_{zy} - \tau_{zx} (\sigma_y - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{zy}^2], \\ b_i &= [\tau_{xy} \tau_{zx} - \tau_{zy} (\sigma_x - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{zy}^2]. \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда из (39) и (40)

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{1 + a_i^2 + b_i^2}}, \quad l_i = a_i \cdot n_i, \quad m_i = b_i \cdot n_i, \quad (42)$$

Примем сначала  $\sigma_i = \sigma_1 = 122,22$  МПа, и из (41) и (42) найдем:

$$\begin{aligned} a_1 &= [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 1,836, \\ b_1 &= [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 0,040, \end{aligned}$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + 1,836^2 + 0,040^2}} = \pm 0,478,$$

$$l_1 = a_1 \cdot n_1 = 1,836 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,878,$$

$$m_1 = b_1 \cdot n_1 = 0,040 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,019.$$

Проверка:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad 0,878^2 + 0,019^2 + 0,478^2 = 0,9998 \approx 1.$$

Относительная погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{1 - 0,998}{0,998} \cdot 100\% = 0,2\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

Равенство выполнено.

Теперь подставляем в (41) и (42)  $\sigma_2 = 42,57$  МПа и находим

$$\begin{aligned} a_2 &= [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,535, \\ b_2 &= [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,465, \end{aligned}$$



$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,535)^2 + (-0,465)^2}} = \pm 0,816,$$

$$l_2 = a_2 \cdot n_2 = -0,535 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,437,$$

$$m_2 = b_2 \cdot n_2 = -0,465 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,379.$$

Проверка:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad (-0,437)^2 + 0,816^2 + (-0,379)^2 = 1,00047 \approx 1.$$

Подставив в (41) и (42)  $\sigma_3 = -59,79$  МПа, получаем:

$$a_3 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = -0,607,$$

$$b_3 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = 2,849,$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,607^2 + 2,849^2}} = \pm 0,325,$$

$$l_3 = a_3 \cdot n_3 = -0,607 \cdot (\pm 0,325) = \mp 0,197,$$

$$m_3 = b_3 \cdot n_3 = 2,849 \cdot (\pm 0,325) = \pm 0,926.$$

Проверка:

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad (-0,197)^2 + 0,926^2 + 0,325^2 = 1,002 \approx 1.$$

Сведем найденные значения в таблицу 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам.

	1	2	3
$l_i$	$\pm 0,878$	$\mp 0,437$	$\mp 0,197$
$m_i$	$\pm 0,019$	$\mp 0,379$	$\pm 0,926$
$n_i$	$\pm 0,478$	$\pm 0,816$	$\pm 0,345$

Сделаем следующие три проверки, подтверждающие взаимную ортогональность главных площадок (в дальнейшем рассматриваем направляющие косинусы внешних нормалей, соответствующие верхним знакам в таблице 1):

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,437) + 0,019 \cdot (-0,379) + 0,478 \cdot 0,816 = 0,39088 - 0,390048 = -8,32 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

Относительная погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{8,32 \cdot 10^{-4}}{0,390048} \cdot 100\% = 0,2\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$(-0,437) \cdot (-0,197) + (-0,379) \cdot 0,926 + 0,816 \cdot 0,325 = 3,35 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,197) + 0,019 \cdot 0,926 + 0,478 \cdot 0,325 = 2,20 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

Относительная погрешность расчета не превышает 3%.

Взаимная ортогональность нормалей к главным площадкам этими проверками подтверждается.

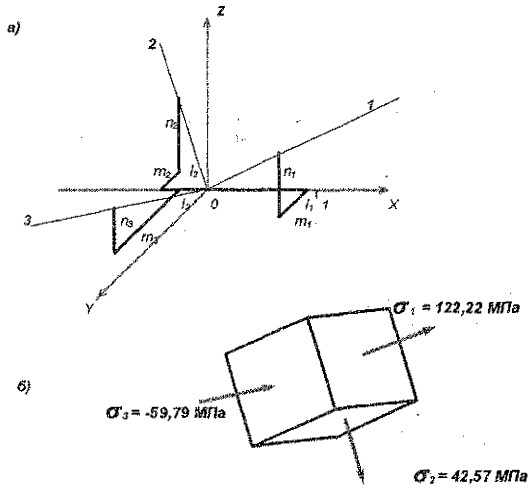


Рисунок 17 - Графическое построение главных площадок

Чтобы изобразить графически положение в пространстве параллелепипеда, гранями которого являются главные площадки, надо произвести следующее построение. В осях  $x, y, z$  по заданным направляющим косинусам (таблица 1) строим нормали к главным площадкам, взяв за исходную точку начало координат. Для построения  $i$ -й нормали достаточно вдоль осей  $x, y, z$  отложить в некотором масштабе отрезки, равные направляющим косинусам  $l_i, m_i, n_i$  и точку с такими координатами соединить с центром  $O$  (рисунок 17, а). Его грани и будут главными площадками с напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рисунок 17, б).

### 3. Определение максимальных касательных напряжений.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  между каждой парой главных площадок (рисунок 3). Величины наибольших касательных напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (43)$$

$$\tau_{13} = [122,22 - (-59,79)] / 2 = 91,01 \text{ МПа}; \quad \tau_{12} = [122,22 - 42,57] / 2 = 39,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = [42,57 - (-59,79)] / 2 = 51,18 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} = \tau_{13} = 91,01 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, наклоненной под углом  $45^\circ$  к первой и третьей главным площадкам.

### 4. Определение октаэдреских площадок.

Площадки, равнонаклоненные к трем главным площадкам  $l=m=n=1/\sqrt{3}$ , называются октаэдрескими (рисунок 2). Нормальное и касательное напряжения на этих площадках определяются по формулам:

$$\sigma_{\text{ср}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \quad \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}, \quad (44)$$

$$\text{или } \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

В данном случае:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(122,22 + 42,57 - 59,79) = 35 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{39,83^2 + 52,18^2 + 91,01^2} = 74,5 \text{ МПа}.$$

### 5. Построение кругов Мора.

В координатах  $\sigma$  и  $\tau$  построим круги Мора для исследуемого объёмного напряжённого состояния. Отложим в осях  $\sigma$  и  $\tau$  точки, изображающие напряжённое состояние на главных площадках:  $K_1(\sigma_1, 0) = K_1(122,21; 0)$ ;  $K_2(\sigma_2, 0) = K_2(42,57; 0)$ ;  $K_3(\sigma_3, 0) = K_3(-59,79; 0)$  (рисунок 18).

На отрезках  $K_1K_3$ ,  $K_1K_2$ ,  $K_2K_3$ , как на диаметрах строим окружности — это и есть круги Мора для заданного напряжённого состояния.

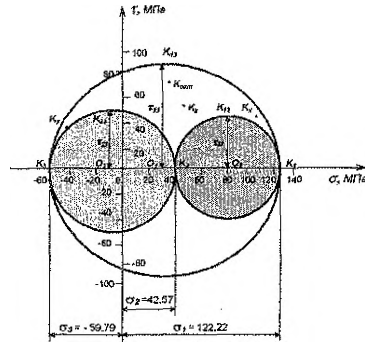


Рисунок 18 - Круги Мора

Напряженное состояние на любой площадке, проходящей через заданную точку тела, изображается точками, которые лежат внутри заштрихованной области.

Нанесем на круги Мора точки, изображающие напряженное состояние на площадках с нормальными  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для этого на этих площадках найдем полные касательные напряжения:

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72 \text{ МПа};$$

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} = 36,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50 \text{ МПа}.$$

Координаты точек, изображающих напряженное состояние на площадках, перпендикулярных осям  $x, y, z$ :  $K_x(\sigma_x, \tau_x) = K_x(100, 44,72)$ ,  $K_y(\sigma_y, \tau_y) = K_y(-45, 36,06)$ ,  $K_z(\sigma_z, \tau_z) = K_z(50, 50)$ .

Координаты точки, изображающей напряженное состояние на октаэдрической площадке:  $K_{\text{окт}}(\sigma_{\text{окт}}; \tau_{\text{окт}}) = K_{\text{окт}}(35, 74,5)$ .

Точки, изображающие напряженное состояние на площадках с наибольшими касательными напряжениями  $K_{12}$ ,  $K_{23}$ ,  $K_{13}$ , расположены на концах вертикальных диаметров кругов Мора (рисунок 18).

6. Определение компонент тензора деформации в заданных и главных осях и относительного изменения объема.

Тензор деформации в заданных осях имеет вид:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Его компоненты находим по формулам обобщённого закона Гука в произвольных осях (4):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};$$

где  $G$  — модуль упругости при сдвиге:  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 7,69 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

В нашем случае:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [100 - 0,3 \cdot (-45 + 50)] = 49,25 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-45 - 0,3 \cdot (50 + 100)] = -45 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [50 - 0,3 \cdot (100 - 45)] = 16,75 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{20}{7,69 \cdot 10^4} = 26 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{yz} = \frac{-30}{7,69 \cdot 10^4} = -39 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{zx} = \frac{40}{7,69 \cdot 10^4} = 52 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 49,25 & 13 & 26 \\ 13 & -45 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 16,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}. \quad (46)$$

Тензор деформации в главных осях:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — главные деформации, определяемые по формулам (48):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (48)$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79)] = 63,69 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [42,57 - 0,3 \cdot (-59,79 + 122,22)] = 11,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-59,79 - 0,3 \cdot (122,22 + 42,57)] = -54,61 \cdot 10^{-5}.$$

$$T_E = \begin{pmatrix} 63,69 & 0 & 0 \\ 0 & 11,92 & 0 \\ 0 & 0 & -54,61 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Проверка:  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  — первый инвариант деформированного состояния.

$$(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5} = (63,69 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5}; \quad 21 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема определяется по формуле

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (63,19 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}. \quad (49)$$

**Примечание.** От деформаций по направлению осей  $x, y, z$  можно перейти к главным деформациям и определить их величины из кубического уравнения:

$$e^3 - E_1 e^2 + E_2 e - E_3 = 0;$$

где инварианты тензора деформаций:  $E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ;

$$E_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2;$$

$$E_3 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy} \cdot \gamma_{yz} \cdot \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \cdot \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \cdot \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \cdot \gamma_{xy}^2.$$

Решение данного уравнения проводится аналогично методике, изложенной в п. 2 примера.

### 7. Определение интенсивности напряжений и деформаций.

Интенсивность касательных напряжений определяем по формуле:

$$\tau_H = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(100 - (-45))^2 + (-45 - 50)^2 + (50 - 100)^2 + 6(20^2 + (-30)^2 + 40^2)} = 91,24 \text{ МПа}.$$

Интенсивность нормальных напряжений определяем по формуле:

$$\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3} \cdot \tau_H =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_H = 158,04 \text{ МПа}.$$

Интенсивность деформаций сдвига:

$$\gamma_H = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]} = 118,47 \cdot 10^{-5}.$$

Интенсивность продольных деформаций:

$$\varepsilon_H = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_H = \frac{118,47 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 68,4 \cdot 10^{-5}.$$

Строим направляющий тензор деформаций:  $\bar{D}_e = \frac{2}{\gamma_H} D_e$ , где  $D_e$  - девиатор деформаций:

$$D_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{средняя деформация: } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5}}{3} = 7 \cdot 10^{-5},$$

$$D_e = \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5},$$

$$\bar{D}_e = \frac{2}{\gamma_H} D_e = \frac{2}{118,47 \cdot 10^{-5}} \cdot \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,11 & 0,22 \\ 0,11 & -0,44 & -0,16 \\ 0,22 & -0,16 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

#### 8. Разложение заданного тензора напряжения на шаровой и девиатор.

Компоненты напряжённого состояния, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в некоторой точке тела, вызывают изменение объёма и формы этого параллелепипеда. Относительное изменение объёма определяется зависимостью:  $\theta = \frac{\sigma_0}{K}$ , где  $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$  - среднее гидростатическое напряжение,  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  - модуль объёмной упругости,

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}. \quad (50)$$

Изменение формы параллелепипеда характеризуется наличием относительных деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , которые выражаются через компоненты напряжения по закону Гука (4).

Тензор напряжений  $T_\sigma$  можно представить в виде двух составляющих тензоров, один из которых — шаровой  $T_\sigma^0$  — связан с изменением только объёма, а другой —  $D_\sigma$  — вызывает изменение только формы:

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma. \quad (51)$$

Эти тензоры имеют вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае  $\sigma_0 = \frac{100 - 45 + 50}{3} = 35$  МПа, и следовательно,

$$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 40 \\ 20 & -45 & -30 \\ 40 & -30 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 65 & 20 & 40 \\ 2 & -80 & -30 \\ 40 & -30 & 15 \end{pmatrix}.$$

$T_{\sigma} \qquad \qquad \qquad T_{\sigma}^0 \qquad \qquad \qquad D_{\sigma}$

Графическое разложение на шаровой и девиатор представлено на рисунке 19.

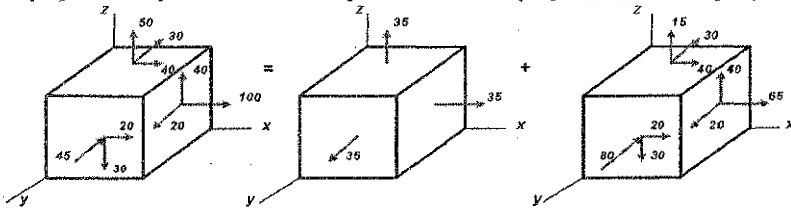


Рисунок 19 - Графическое разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Примечание. Тензор деформаций также можно разложить на шаровой и девиатор деформаций:

$$T_{\epsilon} = T_{\epsilon}^0 + D_{\epsilon}; \text{ где } T_{\epsilon}^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, D_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{pmatrix}, \epsilon_0 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3}.$$

9. Приняв в исходном тензоре напряжений  $\sigma_z=0$ ,  $\tau_{xz}=0$ ,  $\tau_{yz}=0$ , вычислить величины главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ .

Для отыскания величины главных напряжений решаем кубическое уравнение (30). Вычисляем инварианты напряженного состояния по формулам (31):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 0 = 55 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 0 + 0 \cdot 100 - 20^2 - 0^2 - 0^2 = -4900 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 100 \cdot (-45) \cdot 0 + 2 \cdot 20 \cdot 0 \cdot 0 - 100 \cdot 0^2 + 45 \cdot 0^2 - 50 \cdot 0^2 = 0.$$

В этом случае третий инвариант равен нулю, поэтому одно из главных напряжений также равно нулю. Такое напряженное состояние называется плю-

ским или двухосным (рисунок 20). Тензор напряжений примет вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

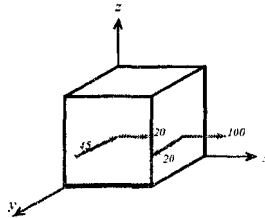


Рисунок 20 – Схема плоского напряженного состояния

Кубическое уравнение (30) представим в следующем виде:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma = 0, \text{ или } \sigma(\sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2) = 0. \text{ Решаем данное уравнение:}$$

$$\sigma = 0 \text{ или } \sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma^2 - 55 \cdot \sigma - 4900 = 0,$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{55 \pm \sqrt{(-55)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4900)}}{2} = 27,5 \pm 75,21,$$

$$\sigma_1 = 27,5 + 75,21 = 102,71 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = 27,5 - 75,21 = -47,71 \text{ МПа}.$$

Выполним проверку:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 102,71 + 0 - 47,71 = 55 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 102,71 \cdot 0 + 0 \cdot (-47,71) + (-47,71) \cdot 102,71 \approx -4900,3 (\text{МПа})^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 186,42 \cdot 0 \cdot (-131,42) = 0.$$

10. Определение удельной потенциальной энергии деформации (полной, изменения объема, изменения формы).

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется по формулам:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \text{ или } u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (52)$$

Полную удельную потенциальную энергию  $u$  можно представить в виде двух составляющих, одна из которых связана с изменением объема  $u_0$ , а другая с изменением формы  $u_\phi$  в окрестности некоторой точки тела:

$$u = u_0 + u_\phi. \quad (53)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема и изменения формы выражается зависимостями:

$$u_0 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (54)$$



$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (55)$$

В нашем случае из (52):

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \{ 122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot [ 122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22 ] \} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

$$\text{Из (54): } u_o = \frac{(1-2 \cdot 0,3)}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (122,22 + 42,57 - 59,79)^2 = 3,675 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3},$$

$$u_{\phi} = \frac{(1+0,3)}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot [122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22] = 5,41 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3};$$

$$u = u_o + u_{\phi} = 0,368 \cdot 10^{-2} + 5,411 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Сравниваем полученные значения для  $u$ :

$$5,779 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2}.$$

*11. Определение расчётных напряжений по четырём классическим критериям прочности и пластичности.*

Первый критерий (прочности) — критерий наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma'_p = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа}. \quad (56)$$

Второй критерий (прочности) — критерий наибольших удлинений:

$$\sigma''_p = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79) = 127,39 \text{ МПа}. \quad (57)$$

Третий критерий (пластичности) — критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma'''_p = \sigma_1 - \sigma_3 = 122,22 - (-59,79) = 182,01 \text{ МПа}. \quad (58)$$

Четвёртый критерий (пластичности) — энергетический:

$$\begin{aligned} \sigma''''_p &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22} = \\ &= 158,03 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

### **Пример 2.**

Балка-стенка толщиной  $\delta = 1$  м нагружена на верхней кромке и частично на нижней распределённой нагрузкой  $q$  и сверху сосредоточенной силой  $P$ . Пролёт балки-стенки  $l$ , а высота её  $h$ . Требуется определить напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в балке-стенке и построить их эпюры в сечениях А-А и В-В; для сечения А-А построить также эпюру  $\sigma_x$  методом сопротивления материалов.

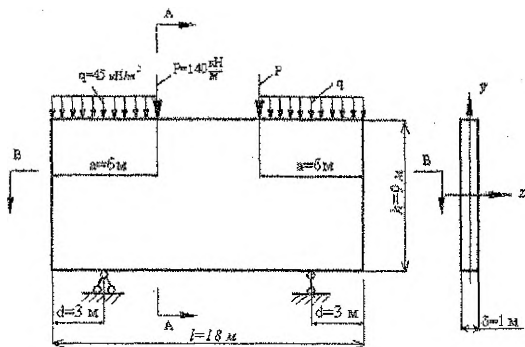


Рисунок 21 - Схема балки-стенки

Решение:

1. Нанесём на балку-стенку сетку (3x3) с шагом  $\Delta x = 6 \text{ м}$ ,  $\Delta y = 3 \text{ м}$ . Затем пронумеруем внутренние точки (узлы сетки), соблюдая при этом симметрию системы (рисунок 22).

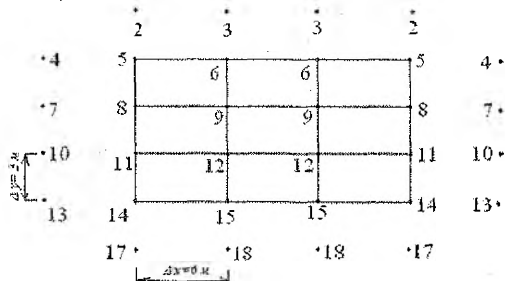


Рисунок 22 - Расположение узлов сетки

2. Выбираем статически определимую раму с учётом симметрии. Для этого разрежем нижний ригель (рисунок 23).

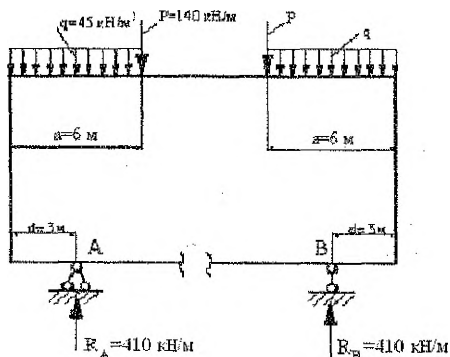


Рисунок 23 - Модель соответствующей рамы

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot (l - 2d) = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2}}{(l - 2d)} =$$

$$= \frac{45 \cdot 6 \cdot (18 - 3 - 3) + 140 \cdot (18 - 3 - 6) + 140 \cdot 3}{18 - 6} = 410 \text{ кН/м};$$

аналогично определяем:  $R_B = 410 \text{ кН/м}$ .

Строим эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  (рисунок 24).

$M_{14} = R_A \cdot d = 410 \cdot 3 = 1230 \text{ кН}$  (растянуты волокна снизу);

$M_{11} = M_8 = M_5 = 1230 \text{ кН}$  (растянуты волокна слева);

$M_6 = R_A \cdot \frac{a}{2} - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 410 \cdot 3 - 45 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 420 \text{ кН}$  (растянуты волокна снизу).

3. По формуле (20) находим функцию  $\varphi$  на контуре балки-стенки.

$\varphi_{14} = \varphi_{11} = \varphi_8 = \varphi_5 = -1230 \text{ кН}$ ;  $\varphi_6 = 420 \text{ кН}$ ;  $\varphi_{15} = 0$ .

4. По формуле (21) выразим функцию  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные.

$\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_8 = \varphi_8 = -1230 \text{ кН}$ ,  $\varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_5 = \varphi_5$ ,

$\varphi_4 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = 420 - 4920 = -4500 \text{ кН}$ ,

$\varphi_7 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_9 = \varphi_9 - 4920$ ,  $\varphi_{10} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{12} = \varphi_{12} - 4920$ ,

$\varphi_{13} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{15} = -4920 \text{ кН}$ ,  $\varphi_{17} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{11} = \varphi_{11} = -1230 \text{ кН}$ ,

$\varphi_{18} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{12} = \varphi_{12}$ .

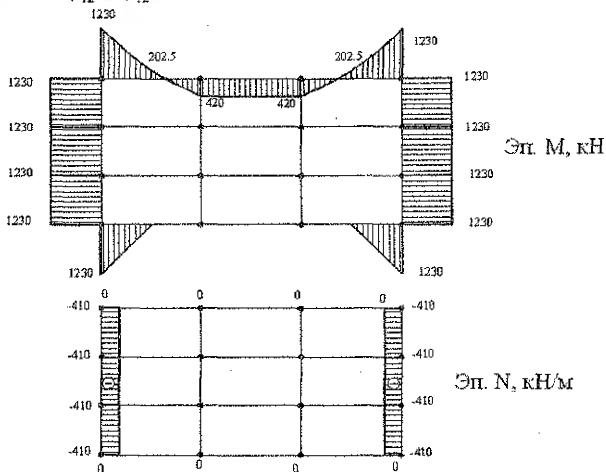


Рисунок 24 - Эпюры  $M$  и  $N$  для соответствующей рамы

5. Запишем уравнения для каждой контурной точки:

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_6 - 4(\alpha + 1)(\varphi_6 + \alpha\varphi_9 + \varphi_{12} + \alpha\varphi_8) + 2\alpha(\varphi_3 + \varphi_6 + \varphi_{12} + \varphi_{11}) + (\varphi_3 + \alpha^2\varphi_8 + \varphi_{15} + \alpha^2\varphi_7) = 0,$$

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_{12} - 4(\alpha + 1)(\varphi_9 + \alpha\varphi_{12} + \varphi_{15} + \alpha\varphi_{11}) + 2\alpha(\varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{15} + \varphi_{14}) + (\varphi_8 + \alpha^2\varphi_{11} + \varphi_{18} + \alpha^2\varphi_{10}) = 0,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{9}{36} = 0,25,$$

$$8,375\varphi_6 - 5(420 + 0,25\varphi_9 + \varphi_{12} - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + 420 + \varphi_{12} - 1230) + (\varphi_9 - 0,0625 \cdot 1230 + 0 + 0,0625(\varphi_9 - 4920)) = 0,$$

$$8,375\varphi_{12} - 5(\varphi_9 + 0,25\varphi_{12} + 0 - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + \varphi_9 + 0 - 1230) + (420 - 0,0625 \cdot 1230 + \varphi_{12} + 0,0625(\varphi_{12} - 4920)) = 0.$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} 8,1875\varphi_6 - 4,5\varphi_{12} = 1966,875, \\ -4,5\varphi_9 + 8,1875\varphi_{12} = -343,125. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\varphi_6 = 311,204 \text{ кН},$$

$$\varphi_{12} = 129,135 \text{ кН}.$$

**Примечание.** При решении задачи контрольной работы привести решение системы уравнений. Если для решения системы уравнений используется компьютер, необходимо приложить распечатку расчетов.

6. Напряжения в  $i$ -й точке сечения А-А определяются по формулам (19).

$$(\sigma_x)_6 = \frac{\varphi_6 - 2\varphi_9 + \varphi_3}{9} = \frac{311,204 - 2 \cdot 420 + 311,204}{9} = -24,17 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{12} = \frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{12} + \varphi_9}{9} = \frac{0 - 2 \cdot 129,135 + 311,204}{9} = 5,88 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{15} = \frac{\varphi_{18} - 2\varphi_{15} + \varphi_{12}}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 0 + 129,135}{9} = 28,7 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_6 = \frac{\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_9}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 420}{36} = -45,83 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_9 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{12} = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_{12} + \varphi_{15}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 129,135 + 129,135}{36} = -37,75 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{15} = \frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{15} + \varphi_{18}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 0 + 0}{36} = -34,17 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_9 - \varphi_8}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 311,204 + 1230}{72} = 0,$$

$$(\tau_{xy})_9 = \frac{\varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{12} = \frac{\varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{15} - \varphi_{14}}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 0 + 1230}{72} = -4,32 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{15} = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{12} + \varphi_{18} - \varphi_{17}}{72} = \frac{-1230 - 129,135 + 129,135 + 1230}{72} = 0.$$

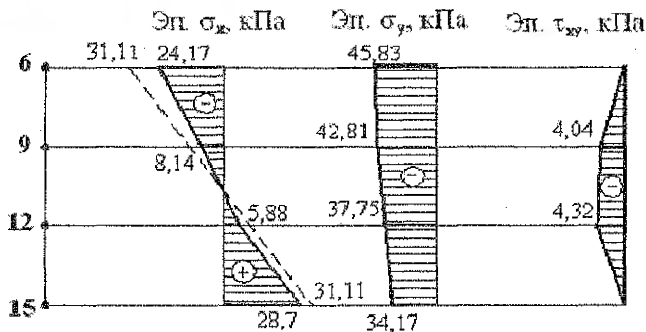


Рисунок 25- Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении А-А

Построим эпюру  $\sigma_x$  в сечении А-А методом сопротивления материалов. Представим балку-стенку в виде обычной балки (рисунок 26).

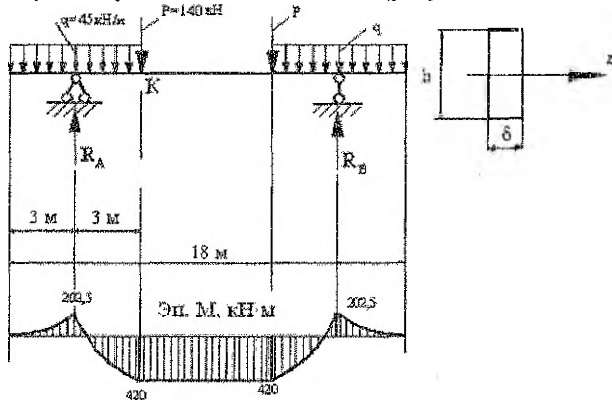


Рисунок 26 - К расчету балки-стенки по балочной схеме (метод сопротивления материалов)

$$\sigma_x = \frac{M_K}{W_{st}}$$

изгибающий момент в сечении К:  $M_K = R_A \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = 420 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

$$W_z = \frac{\delta \cdot a^3}{6} = \frac{1 \cdot 9^3}{6} = 13,5 \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x = \frac{420}{13,5} = 31,11 \text{ кПа}.$$

Эпюра  $\sigma_x$  показана на рисунке 24 пунктирной линией.

### Пример 3.

Дана прямоугольная полоса-балка длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной 1 (рисунок 27). Начало координат  $O$  принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси  $Oy$  и  $Oz$ . Продольная ось  $Ox$  проходит посередине полосы-балки. Задано выражение для функции  $\varphi$ .

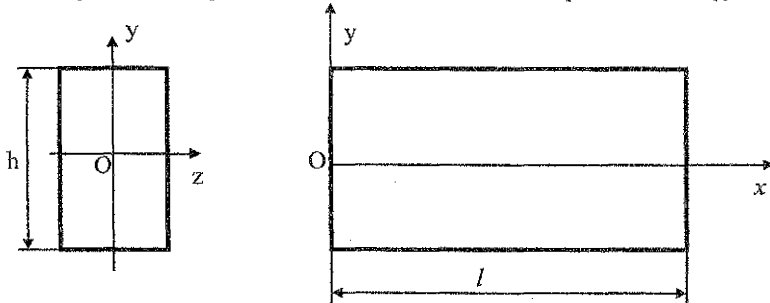


Рисунок 27 – Схема полосы-балки

Объемными силами пренебречь. Требуется:

- 1) проверить, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости;
- 2) найти выражения для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ;
- 3) построить эпюры напряжений для сечения  $x=2$  м, перпендикулярного оси  $x$ ;
- 4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Дано:  $\varphi(x,y) = 2x^4 - 9x^2y^2 + y^4$ ,  $l = 6$  м,  $h = 1$  м,  $x = 2$  м.

Решение:

1. Проверим, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используем бигармоническое

уравнение: 
$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Находим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 8x^3 - 18xy^2, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 24x^2 - 18y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= 48x, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 48, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -18x^2y + 4y^3, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -18x^2 + 12y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &= 24y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 24, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= -36y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= -36. \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение:  
 $48 + (-36) \cdot 2 + 24 = 0, \quad 0 = 0.$

Следовательно, заданное  $\varphi(x, y)$  тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2. Находим выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -18x^2 + 12y^2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 24x^2 - 18y^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -36xy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 36xy.$$

Выполняем проверку выполнения уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Для этого находим соответствующие производные:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -36x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 36x, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -36y, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 36y,$$

$$\begin{cases} -36x + 36x = 0, \\ 36y - 36y = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры напряжений в сечении  $x = 2$  м. В данном случае:

$$\sigma_x = -72 + 12y^2, \quad \sigma_y = 96 - 18y^2, \quad \tau_{xy} = 72y.$$

По указанным выражениям для напряжений, изменяя  $y$  от  $-\frac{h}{2} = -0,5$  м до

$\frac{h}{2} = 0,5$  м, строим их эпюры (рисунок 28).

Таблица 2 – Расчет значений напряжений в сечении  $x = 2$  м.

	$-0,5$ м	$0$	$0,5$ м
$\sigma_x$	$-69$	$-72$	$-69$
$\sigma_y$	$91,5$	$96$	$91,5$
$\tau_{xy}$	$-36$	$0$	$36$

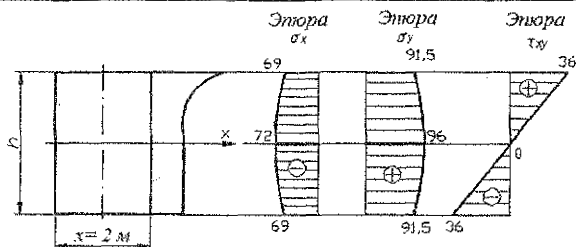


Рисунок 28 – Эпюры напряжений в сечении  $x = 2$  м

4) Определяем внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки. Для этого воспользуемся условиями на поверхности тела (условиями на контуре или статическими граничными условиями):

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad p_{yv} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m,$$

где  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  - проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  внешних сил, действующих на гранях полосы-балки;  $v_n$  - внешняя нормаль к грани;  $l = \cos(x, v_n)$ ,  $m = \cos(y, v_n)$  - направляющие косинусы нормали.

$$\text{Верхняя грань: } y = \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot 0,5^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot 0,5^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot 0,5 = 18x.$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, y) = 1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

Для сил, нормальных  $p_{yv}$  и касательных  $p_{xv}$  строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 6$  м.

Таблица 3 – Расчет нормальных и касательных сил для верхней грани

	0	3 м	6 м
$p_{xv}$	0	54	108
$p_{yv}$	-4,5	211,5	859,5

$$\text{Нижняя грань: } y = -\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot (-0,5)^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot (-0,5)^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot (-0,5) = -18x,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, -y) = -1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} \cdot 0 + \sigma_y \cdot (-1) = -\sigma_y = -24x^2 + 4,5.$$

Для сил, нормальных  $p_{yv}$  и касательных  $p_{xv}$  строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 6$  м.

Таблица 4 – Расчет нормальных и касательных сил для нижней грани

	0	3 м	6 м
$p_{xv}$	0	54	108
$p_{yv}$	4,5	-211,5	-859,5

$$\text{Левая грань: } x = 0;$$

$$\sigma_x = 12y^2, \quad \sigma_y = -18y^2, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -x) = -1;$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = -12y^2, \quad p_{yv} = \tau_{yx} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy} = 0.$$

Для сил, нормальных  $p_{xv}$  и касательных  $p_{yv}$  строим их эпюры, изменяя  $y$  от

$$-\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м до } \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м.}$$



Таблица 5 – Расчет нормальных и касательных сил для левой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
$p_{xy}$	-3	0	3
$p_{yx}$	0	0	0

Правая грань:  $x = l = 6$  м;

$$\sigma_x = -18 \cdot 6^2 + 12y^2 = -648 + 12y^2,$$

$$\sigma_y = 24 \cdot 6^2 - 18y^2 = 864 - 18y^2,$$

$$\tau_{xy} = 36 \cdot 6 \cdot y = 216y,$$

$$l = \cos(x, v_{nl}) = \cos(x, x) = 1;$$

$$m = \cos(y, v_{nl}) = \cos(y, x) = 0;$$

$$p_{xy} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 = \sigma_x = -648 + 12y^2,$$

$$p_{yx} = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{xy} = 216y.$$

Для сил, нормальных  $p_{xy}$  и касательных  $p_{yx}$  строим их эпюры, изменяя  $y$  от

$$-\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м до } \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м (таблица 6).}$$

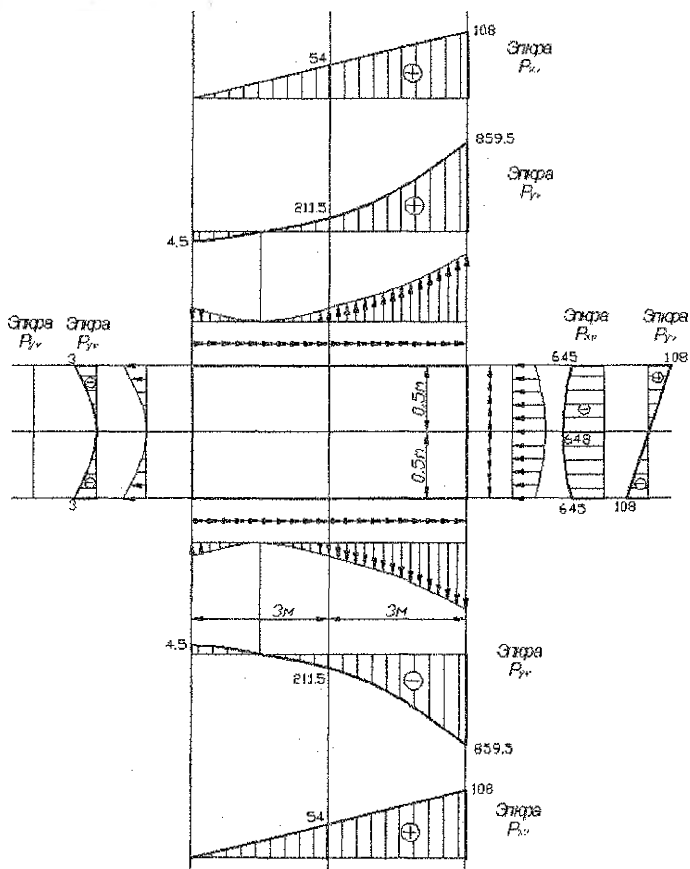


Рисунок 29 – Эпюры нормальных и касательных сил на гранях.

Таблица 6 – Расчет нормальных и касательных сил для правой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
$P_{x1}$	-645	-648	-645
$P_{y1}$	-108	0	108

Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рисунке 29

**Пример 4.**

Дана прямоугольная изгибаемая пластина.

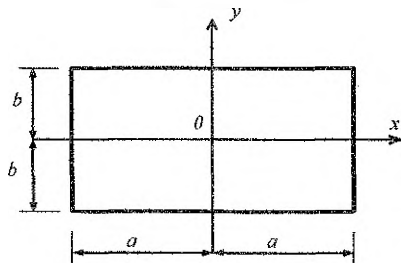


Рисунок 30 - Схема пластины

Требуется:

1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ ;

2) проверить, удовлетворяет ли функция  $w(x, y)$  уравнению Софи Жермен  $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$ , и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS. \text{ Из этих уравнений определить постоянную } C \text{ и вы-}$$

числить максимальный прогиб  $W_{max}$ ;

3) по формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составить их выражения;

4) построить эпюры внутренних сил  $M_x, Q_y, M_{xy}$  в сечении  $y=2$  м.

Дано:  $q = q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), a=3\text{ м}, b=3\text{ м},$

$y=2\text{ м}, \nu=0,3.$

Решение:

1. Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ .

При  $x=\pm a, w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = 0,$

$y=\pm b, w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = 0.$

Следовательно, пластинка оперта по всем четырем краям. Определим тип опирания. Углы поворота:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

при  $x = \pm a$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi \cdot (\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \neq 0,$$

$y = \pm b$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \sin\left(\frac{3\pi \cdot (\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot b \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \neq 0.$$

Значит, пластинка не защемлена. Проверим шарнирное опирание. Условие шарнирного опирания:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость при изгибе.}$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$M_x = -D \cdot \left[ -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left( -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] =$$

$$= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right],$$

$$M_y = -D \cdot \left[ -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left( -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] =$$

$$= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right],$$

$$\text{тогда при } x = \pm a, \quad M_x = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] = 0,$$

$$y = \pm b: \quad M_y = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] = 0.$$

Итак, пластинка шарнирно оперта по всем четырем краям (рисунок 31).

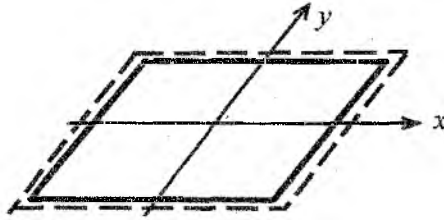


Рисунок 31 - Схема закрепления пластинки

2. Определим постоянный коэффициент  $C$ , используя основное дифференциальное уравнение изогнутой поверхности (уравнение Софи Жермен) (24):  
Находим производные:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

Подставляем производные в бигармоническое уравнение:

$$C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + 2 \cdot C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) +$$

$$+ C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = \frac{q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)}{D},$$

$$C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \pi^4 \left[ \left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right] = \frac{q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)}{D},$$

$$C = \frac{q_0}{D \pi^4 \left[ \left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right]} = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot \pi^4 \left[ \left(\frac{1}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^4 \right]}$$

Подставляем числовые значения:

$$C = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot 3,14^4 \left[ \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 + 2 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 \right]} = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

Находим максимальный прогиб: при  $x=0, y=0$ :

$$w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2b}\right) = C \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

3. По формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составим их выражения.

Изгибающие моменты:

$$M_x = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] =$$

$$= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] =$$

$$= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$M_y = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] =$$

$$= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] =$$

$$= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right).$$

Крутящие моменты:

$$M_{xy} = M_{yx} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D \cdot (1 - 0,3) \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) =$$

$$= -0,14 q_0 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right).$$

Поперечные силы:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= -D \left[ C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^3 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \right] = \\
 &= -DC \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^3 + \left( \frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^2 \right] = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right] = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \\
 &= -D \left[ C \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^3 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^2 \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \right] = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right] = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

4. Строим эпюры внутренних сил  $M_y, Q_y, M_{yx}$  в сечении  $y=2$  м.

$$M_y = 0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right),$$

$$M_{yx} = -0,14q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,14q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin(\pi) = 0,$$

$$Q_y = 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin(\pi) = 0.$$

$$\text{При } x = \pm a = \pm 3 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi(\pm a)}{2} \right) = 0,$$

$$\text{при } x = \pm 0,5a = \pm 1,5 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi(\pm 0,5a)}{2} \right) = 0,185q_0,$$

$$\text{при } x = 0 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos(0) = -0,261q_0.$$

По полученным данным строим эпюру  $M_y$  (рисунок 32).

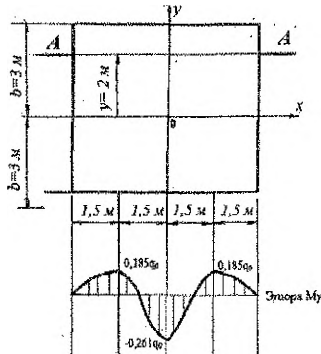


Рисунок 32 – Эпюра  $M_y$  в сечении А-А при  $y=2\text{ м}$

### Пример 5.

Кольцевая пластина (рисунок 33) жестко защемлена по наружному контуру и нагружена радиальными изгибающими моментами  $m$ , равномерно распределенными по внутреннему контуру.

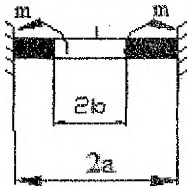
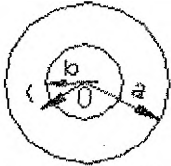


Рисунок 33 – Схема кольцевой пластины

Требуется:

1. Проверить граничные условия.
2. Определить постоянную  $C$ .
3. Составить выражения для внутренних сил.
4. В диаметральной сечении построить эпюры  $M_r, M_\theta$ .

Дано:  $w = C \left( 2\ell n \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$ ,  $a=8\text{ м}$ ,  $b=4\text{ м}$ ,

$\nu = 0,3$ .

Решение:

1. Проверка граничных условий. Прогиб и угол поворота в радиальном направлении при  $r=a$  должны быть равны нулю:

при  $r = a$ , прогиб  $w = 0$ , угол поворота  $\alpha_r = \frac{dw}{dr} = 0$ , в нашем случае:

при  $r = a$ :  $w(a) = C \left( 2\ell n \frac{a}{a} + \frac{a^2 - a^2}{a^2} \right) = 0$ ;

$\alpha_r(r) = C \left( 2 \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2r}{a^2} \right) = 2C \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right)$ ; при  $r = a$ :  $\alpha_r(a) = 2C \left( \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2} \right) = 0$ .

Граничные условия жесткого защемления выполняются.

## 2. Определение постоянной С.

Для этого используем условие: при  $r = b$ ,  $M_r = m$ . Находим производные:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 2C \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \quad \nu \frac{dw}{r dr} = 2C \nu \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right) = 2C \nu \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_r = -2CD \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = 2CD \frac{a^2(1-\nu) + r^2(1+\nu)}{a^2 r^2}.$$

при  $r = b$ :  $m = 2CD \frac{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)}{a^2 b^2}$ ; откуда  $C = \frac{ma^2 b^2}{2D [a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]}$ .

**Примечание.** В некоторых случаях для определения постоянной С можно использовать дифференциальное уравнение (25).

2. Находим выражения для  $M_r, M_\theta$  по формулам (26):

$$M_r = \frac{mb^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[ (1+\nu) + (1-\nu) \frac{a^2}{r^2} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \quad \nu \frac{d^2 w}{dr^2} = 2C \nu \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_\theta = -2CD \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = \frac{mb^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[ (1+\nu) + (-1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

3. Строим эпюры  $M_r, M_\theta$  (рисунок 34). Вычислим:

$$\frac{b^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} = \frac{4^2}{8^2(1-0,3) + 4^2(1+0,3)} = 0,244,$$

$$M_r = 0,244m \left( 1,3 + \frac{44,8}{r^2} \right);$$

$$M_\theta = 0,244m \left( 1,3 - \frac{44,8}{r^2} \right).$$

Находим значения изгибающих моментов:

при  $r = 4$  м,  $M_r = m$ ;  $M_\theta = -0,366m$ ;

при  $r = 6$  м,  $M_r = 0,621m$ ;  $M_\theta = 0,014m$ ;

при  $r = 8$  м,  $M_r = 0,488m$ ;  $M_\theta = 0,146m$ .

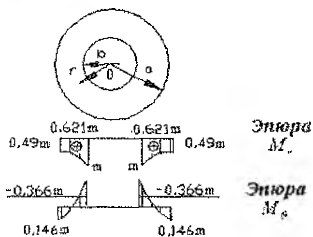


Рисунок 34 - Эпюры изгибающих моментов  $M_r, M_\theta$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание для выполнения контрольной работы выдается преподавателем во время экзаменационной сессии, на которой проводится аттестация по дисциплине. Задание может быть выдано на отдельном бланке индивидуально каждому студенту.



## ЗАДАЧА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке загруженного тела. Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  определяются по таблице 7. Требуется:

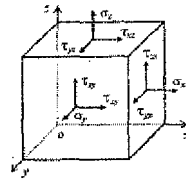


Рисунок 35.

1. Нанести исходные компоненты тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки.
2. Разложить тензор напряжений на шаровой и девиатор и показать их на гранях элементарного параллелепипеда.
3. Вычислить компоненты тензора деформаций в заданных осях, построить тензор деформаций.
4. Определить объемную деформацию, интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке.
5. Приняв в исходном тензоре напряжений  $\sigma_z=0$ ,  $\tau_{xz}=0$ ,  $\tau_{yz}=0$ , вычислить величины главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , а также максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$ .

Числовые данные для решения задачи 1 следует выбирать из таблицы 7 согласно пяти последним цифрам индивидуального шифра и первым пяти буквам русского алфавита.

Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр — 1 0 1 7 2 3

буква — а б в г д

выбирают из указанной таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Причем, вначале берется буква, а затем по ней определяется цифра.

**ПРИМЕР.** Шифр — 101723. В таблице 7 по горизонтали в последней строке первая буква "г". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т.е. цифре 2, находится  $\sigma_x = -80$  МПа. Затем по следующей букве "б" и соответствующей цифре шифра 1, пересечении столбца "б" и строки "1", получаем величину " $\sigma_y$ " и т.д.

Таблица 7 – Числовые данные к задаче 1

№ строки	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\sigma_z$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа	$\tau_{yz}$ , МПа	$\tau_{zx}$ , МПа	$E$ , ГПа	$\nu$
1	10	-40	60	20	-10	30	130	0,32
2	-80	20	-50	30	40	-10	150	0,25
3	50	20	-40	-10	10	20	120	0,22
4	20	30	-40	10	-60	10	200	0,32
5	40	-50	20	-20	80	-60	100	0,35
6	20	-10	-30	-50	-30	70	70	0,33
7	-40	50	50	-30	10	-90	60	0,25
8	-90	80	-60	40	-70	-40	70	0,3
9	-30	-70	70	-40	-20	-50	80	0,27
0	-60	-50	-80	-50	40	-30	110	0,36
	г	д	в	г	д	я	в	г

## ЗАДАЧА 2. РАСЧЕТ БАЛКИ-СТЕНКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для заданной схемы балки-стенки требуется:

- 1) определить значения функции напряжений  $\varphi$  во всех узлах предварительно нанесенной сетки (3×3) методом конечных разностей;
- 2) подсчитать напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках сетки и построить эпюры этих напряжений в одном из вертикальных сечений;
- 3) сравнить полученное решение с решением сопротивления материалов и выполнить анализ результатов сравнения.

Схема закрепления балки-стенки приведена на рисунке 36. Схемы загрузки балки-стенки (рисунок 37) следует принимать по двум последним цифрам шифра. Во всех вариантах принять  $P^* = 0$ . Числовые данные для выполнения задачи следует выбирать из таблицы 8 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение в условии задачи 1).

Таблица 8 – Числовые данные к задаче 2

№ стро- ки	$l$ (м)	$h$ (м)	$a$ (м)	$b$ (м)	$d$ (м)	$q$ (Кн/м <sup>2</sup> )	$P$ (Кн/м)
1	9	6	0	0	0	10	80
2	12	6	1/6	1/2	1	50	160
3	12	9	1/3	1/3	2	25	100
4	15	9	1/2	1/6	3	45	140
5	15	12	0	1/6	4	65	100
6	18	9	1/6	1/3	4	40	120
7	18	12	1/3	1/2	3	35	110
8	18	15	1/2	0	2	50	80
9	21	12	0	0	1	40	120
0	21	18	1/3	1/3	0	25	70
		д	г	б	г	в	а

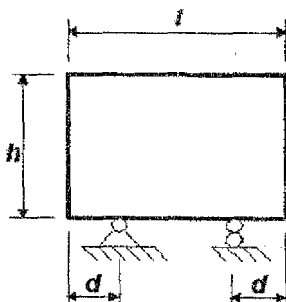


Рисунок 36 – Схема закрепления балки-стенки

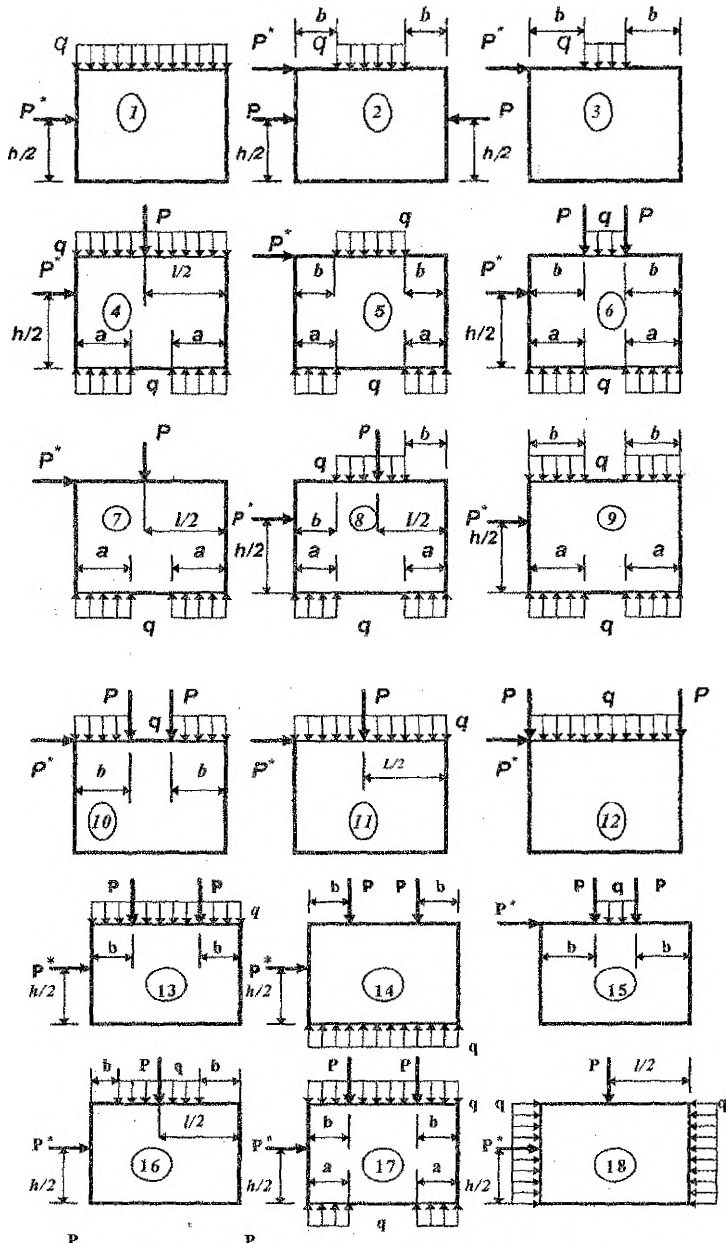
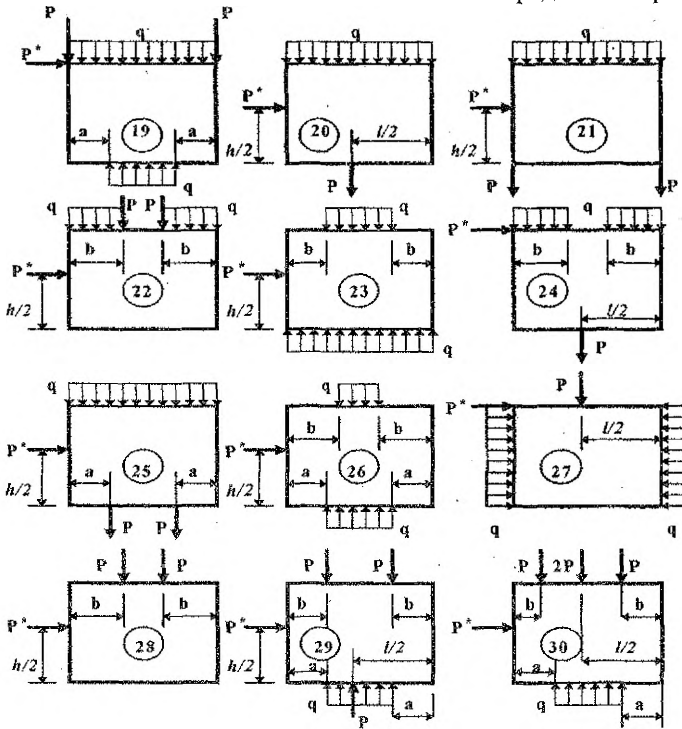


Рисунок 37 - Схемы загрузки балки-стенки



**ЗАДАЧА 3. РАСЧЕТ ПОЛОСЫ-БАЛКИ**

Дана прямоугольная полоса-балка длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной  $1$ . Начало координат  $O$  принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси  $Oy$  и  $Oz$ . Продольная ось  $Ox$  проходит по середине полоса-балки. Объемными силами пренебречь.

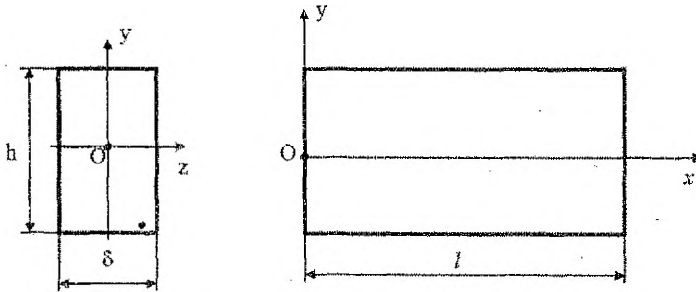


Рисунок 38 – Схема полоса-балки

Требуется:

1) проверить, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости;

1) найти выражения для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ;

2) построить эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для одного сечения: либо перпендикулярного оси  $x$ , либо перпендикулярного оси  $y$ ;

3) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Числовые данные для решения задачи следует выбирать из таблицы 9 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение приведено в условии задачи 1).

Таблица 9 – Исходные данные к расчету полосы-балки

№ строки	Функция напряжений $\varphi(x,y)$	a	b	l	h	x	y
1	$\varphi = a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$\varphi = axy^3 + b(x^2y^2 - x^4/3)$	1	2	6	1	2	0,3
5	$\varphi = ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	2	2	0,5
6	$\varphi = a(x^4 - y^4) + by^2 + by^2(x^2 - y^2/3)$	2	2	4	2	1	0,5
7	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	2	1	4	2	1	0,5
8	$\varphi = \frac{a}{12}(x^4 - y^4) + \frac{1}{3}xy(bx^2 + y^2)$	2	1	6	1	3	0,3
9	$\varphi = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}by^4$	1	2	5	1	2	0,2
0	$\varphi = \frac{1}{3}axy^3 + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}bx^4$	2	1	5	2	2	0,4
	д	д	г	в	д	б	а

#### ЗАДАЧА 4. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Номер варианта выбирается в соответствии с суммой 3-х последних цифр шифра.

*Варианты 1-15. Расчет прямоугольной пластины.*

Дана прямоугольная изгибаемая пластина (рисунок 39).

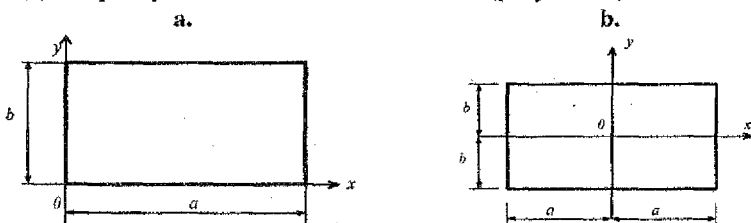


Рисунок 39 – Схема пластины

Требуется:

1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ ;

2) проверить, удовлетворяет ли функция  $w(x, y)$  уравнению Софи Жермен  $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$ , и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS. \text{ Из этих уравнений определить постоянную } C \text{ и вы-}$$

числить максимальный прогиб  $W_{max}$ ;

3) по формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составить их выражения;

4) построить эпюры внутренних сил в одном из сечений: сечение  $x$  - эпюры  $M_x, Q_x, M_{xy}$ ; сечение  $y$  - эпюры  $M_y, Q_y, M_{xy}$ .

Функции для прогиба и нагрузки взять из таблицы 10, а числовые значения – из таблицы 11. Числовые данные по таблице 11 выбираются согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (см. пример в условии задачи 1).

Таблица 10 – Числовые данные к расчету прямоугольных пластин

Сумма трех послед- них цифр шифра	Вид пластины по рисунку 39. Выражения для нагрузки $q(x, y)$ и прогиба $W(x, y)$ . $D, C$ и $q_0$ - постоянные величины
1	2
0	Рисунок 39, а $q = const; W = C(x-a)^2(y-b)^2$
1	Рисунок 39, а $q = const; W = Cxy(x-a)(y-b)$
2	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
3	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
4	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
5	Рисунок 39, б $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
6	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$
7	Рисунок 39, б $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$

Продолжение таблицы 10

1	2
8	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
9	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y - b)^2$
10	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x - a)^2(y^2 - b^2)$
11	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$
12	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
13	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$
14	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
15	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$

Таблица 11 – Числовые данные к задаче 4

№	м					ν
	а	б	h	х	у	
1	4	3	0,1	3	2	0,35
2	3	3	0,1	2	2	0,30
3	3	3	0,1	1	1	0,25
4	4	4	0,2	2	3	0,25
5	5	3	0,1	3	1	0,30
6	3	5	0,1	1	3	0,30
7	3	3	0,2	2	2	0,35
8	5	5	0,2	2	2	0,35
9	5	4	0,2	3	1	0,30
0	4	5	0,2	2	3	0,30
	д	г	б	а	д	в

**Варианты 16-27. Расчет круглой или кольцевой пластины.**

Дана круглая сплошная или кольцевая пластина. Для данной схемы закрепления требуется:

1. Проверить граничные условия.
2. Определить постоянную С.
3. Составить выражения для внутренних сил.
4. В диаметральной сечении построить эпюры  $M_r, M_\theta$ .

Функцию прогибов взять из таблицы 12, а числовые значения – из таблицы 13.

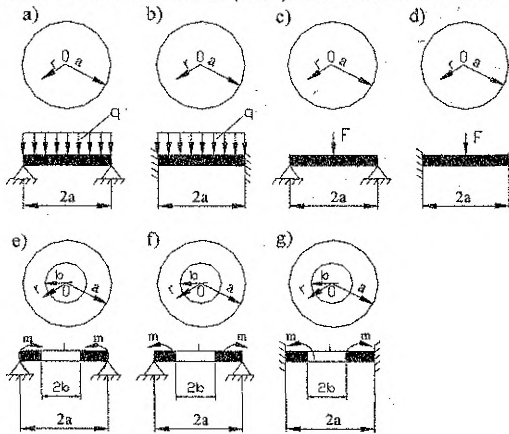


Рисунок 40 - Схемы круглых и кольцевых пластин

Таблица 12 – Выражения для нагрузки и прогибов

Сумма трех последних цифр шифра	Вид пластины по рисунку 40. Выражения для нагрузки и прогиба $W(r)$ . $D$ и $C$ постоянные величины
16	Рисунок 40, а; $q = const$ ; $W = C(a^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$
17	Рисунок 40, б; $q = const$ ; $W = C(a^2 - r^2)^2$
18	Рисунок 40, с; $W = C \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]$
19	Рисунок 40, д; $W = C \left( r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2} \right)$
20	Рисунок 40, е; $W = C \left[ \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)b^2}{1-\nu} \frac{1}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right]$
21	Рисунок 40, ф; $W = C \left[ \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln \frac{r}{a} \right]$
22	Рисунок 40, г; $W = C \left( 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$
23	Рисунок 40, а; $q = const$ ; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
24	Рисунок 40, б; $q = const$ ; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
25	Рисунок 40, д; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
26	Рисунок 40, е; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
27	Рисунок 40, г; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$



**Примечания:**

1. Радиальные моменты  $m$  равномерно распределены по внутреннему или наружному контуру.

2. Нагрузка  $q$  равномерно распределена по площади пластины.

3. В вариантах 18 и 19 постоянную  $C$  можно определить из равенства:

$$-D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = -\frac{F}{2\pi a}$$

4. В варианте 20 постоянную  $C$  можно определить из равенства: при  $r = a, M_r = m$ ; в вариантах 21, 22 из условия: при  $r = b, M_r = m$ .

5. В варианте 23 постоянные  $C_3, C_4$  находим из условий: при  $r = a, W = 0, M_r = 0$ ; в варианте 24: при  $r = a, W = 0, dW/dr = 0$ .

6. Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из условий:

вариант 25: при  $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$ ;

при  $r = a, W = 0; M_r = m$ ;

вариант 26: при ;  $M_r = m$ ;

при  $r = a, W = 0; M_r = 0$ ;

вариант 27: при  $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$ ;

при  $r = a, W = 0; dW/dr = 0$ .

Таблица 13 – Числовые данные к расчету круглой или кольцевой пластины

№ строки	M			v
	a	b	h	
1	5	3	0,1	0,25
2	5	2	0,1	0,27
3	4	2	0,2	0,4
4	5	3	0,2	0,3
5	4	3	0,2	0,33
6	6	4	0,1	0,29
7	4	3	0,1	0,35
8	5	3	0,2	0,4
9	5	2	0,1	0,36
0	6	2	0,2	0,32
	г	д	в	б

## ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1968.
2. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. - М.: Высшая школа, 1979.
3. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. - М.: Высшая школа, 1990.
4. Рочняк, О.А. Основы теории упругости / О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич. - Брест: Изд-во БрГТУ, 2001.
5. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. - М., 1984.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

*Веремейчик Андрей Иванович*  
*Хвисевич Виталий Михайлович*

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к решению задач**  
**по теории упругости и пластичности**  
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск: Веремейчик А.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 19.04.2016 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура «Times New Roman».  
Бумага «Performat». Усл. п. л. 3,49. Уч. изд. 3,75. Заказ №450. Тираж 135 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.