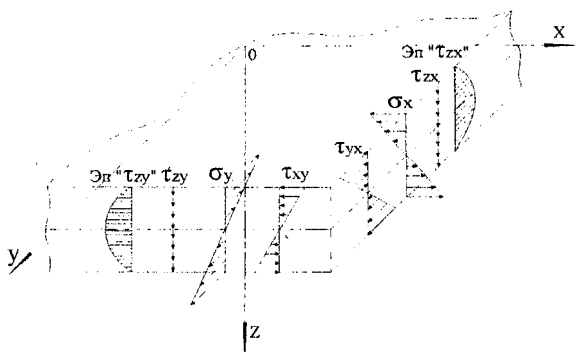


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к практическим занятиям  
по теории упругости и пластичности  
для студентов специальности

1-70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство»  
всех форм обучения



Брест 2017

УДК 539.3 (075.8)

Методические указания направлены на приобретение студентами навыков самостоятельной работы при изучении курса «Теория упругости и пластичности». В них приведены краткие теоретические сведения, примеры расчета некоторых задач теории упругости: исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела, плоская задача теории упругости, расчет тонких пласти, а также индивидуальные задания для выполнения контрольной работы.

Задания и методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения специальности 1 – 70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство».

Составители: Веремейчик А.И., доцент  
Черноиван Н.В., доцент, к.т.н.  
Хвисевич В.М., профессор, к.т.н.

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
Требования к оформлению контрольных (расчетно-графических) работ .....	3
Краткие теоретические сведения .....	3
Примеры решения задач .....	19
Задания для выполнения контрольной работы .....	48
Литература .....	58

### ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания соответствуют базовым учебным планам специальности 1–70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство» и включают в себя краткие теоретические сведения, условия задания для выполнения контрольной работы и примеры расчетов по исследованию напряженно-деформированного состояния в точке упругого тела, решению плоской задачи теории упругости, расчету тонких пластин. Каждый студент-заочник по теории упругости и пластичности должен выполнить одну контрольную работу. При ее защите необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать типовые задачи. Зачет по курсу принимается после того, как защищена контрольная работа.

### ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ) РАБОТ

1. Контрольная (расчетно-графическая) работа выполняется на отдельных листах формата А4 с рамкой для текстовых документов.

2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; перечень литературы.

3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «Брестский государственный технический университет». Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Теория упругости** – раздел механики деформируемого твёрдого тела, рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. Теория упругости является научной основой для

расчётов на прочность, жесткость и устойчивость частей машин и сооружений. Главная задача теории упругости — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях.

**Теория пластичности** — раздел механики сплошных сред, задачами которого является определение напряжений и перемещений в деформируемом теле за пределами упругости.

### Теория напряженно-деформированного состояния в точке тела

В твердом теле, нагруженном системой уравновешенных сил, происходит взаимное перемещение точек, возникают линейные и угловые упругие деформации, что вызывает изменение сил взаимодействия между частицами тела. Эти изменения в силах взаимодействия называют внутренними силами, а их интенсивность на бесконечно малых площадках, проведенных внутри тела в той или иной точке, — напряжениями.

Если внутри нагруженного тела вблизи некоторой точки вырезать бесконечно малых размеров параллелепипед (рисунок 1, а), то на его гранях можно показать девять компонент напряжений (рисунок 1 б, в). Совокупность этих девяти компонент полностью характеризует напряженное состояние в данной точке тела и образует тензор напряжений  $T_{\sigma}$ , который записывается в виде матрицы:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Нормальные напряжения  $\sigma$  считаются положительными, если они вызывают растяжение. Для определения знака напряжений используется правило внешней нормали: если внешняя нормаль к площадке совпадает (противоположна) с направлением оси координат, то напряжение положительно, если оно также совпадает (противоположно) с осью координат.

Зная компоненты напряжений на трех взаимно ортогональных площадках в некоторой точке тела, можно найти нормальную и касательную составляющие на любой другой площадке, проведенной через данную точку тела ( $\sigma_v, \tau_v$ ) (рисунок 1, в).

Известно, что в любой точке тела всегда существуют по крайней мере три такие взаимно ортогональные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения достигают экстремума. Эти площадки и напряжения называют главными (рисунок 1, г). Главные напряжения обозначают индексами 1, 2, 3, которые нумеруются в соответствии с неравенством  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Площадки равнонаклоненные к главным и напряжения, действующие на них, называются октаэдрическими  $\sigma_{окт}, \tau_{окт}$  (рисунок 2).

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  к каждой паре главных площадок и равным полуразности соответствующих главных напряжений. Их обозначают  $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$  (рисунок 3).

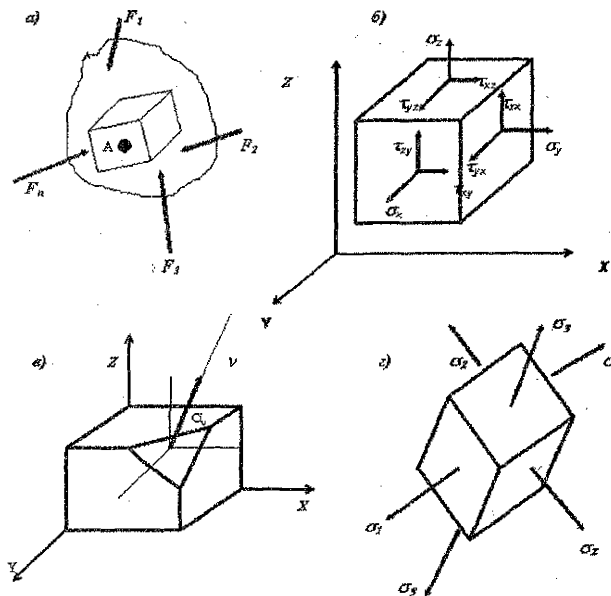


Рисунок 1 – Компоненты тензора напряжений, главные напряжения

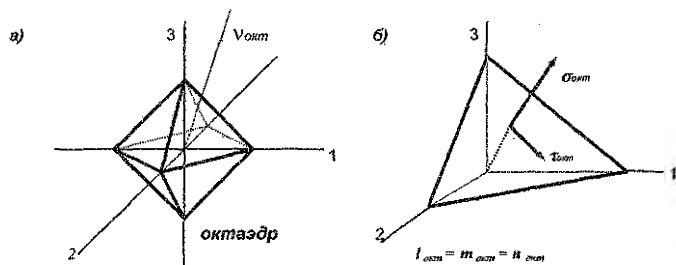


Рисунок 2 – Октаэдрические напряжения и площадки

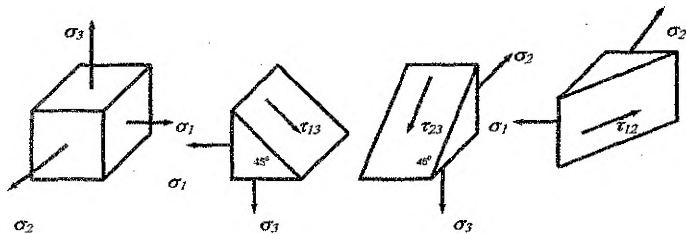


Рисунок 3 – Наибольшие касательные напряжения

Основные уравнения теории упругости:

I. Группа статических уравнений:

Дифференциальные уравнения равновесия (Навье-Коши):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  – проекции объемных сил на оси координат.

II. Группа геометрических уравнений:

Формулы Коши:

$$\begin{aligned} \text{-- линейные деформации: } \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \text{-- угловые деформации: } \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u, v, w$  – перемещения вдоль осей  $x, y, z$  соответственно.

Уравнения совместности деформаций (Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

III. Группа физических уравнений:

Обобщенный закон Гука:

– прямая форма:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (4)$$

– обратная форма:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}; \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода (Юнга),  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  
 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль упругости второго рода (сдвига),  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – относи-  
 тельное изменение объема,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$  – коэффициенты Ляме.

Решение уравнений групп I, II, III должно удовлетворять условиям на поверхности (3). Система 15 уравнений (1), (2), (4) или (5) используется для определения 15 неизвестных ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$ ).

Способы решения задач теории упругости: решение в перемещениях, напряжениях или системной форме.

Методы решения:

1. Прямой метод. Интегрируется система 15-ти уравнений при выполнении условий на поверхности.

2. Обратный метод. Задаются функции напряжений или перемещений, удовлетворяющих системе уравнений, а затем из граничных условий определяются нагрузки, соответствующие такому решению.

3. Полуобратный метод (Сен-Венана). Часть неизвестных задаётся и подставляется в систему уравнений, из которых определяются остальные неизвестные.

Формулы и уравнения, по которым можно вычислить  $\sigma_v, \tau_v$ , величины главных напряжений и положение главных площадок,  $\tau_{окт}, \sigma_{окт}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ , а также другие необходимые зависимости будут приведены ниже в примере 1.

**Плоская задача теории упругости**

В теории упругости различают две плоские задачи (в плоскости  $xOy$ ):

1. Плоское деформированное состояние, при котором деформации из плоскости, т. е. в направлении оси  $z$ , равны нулю:  $\varepsilon_z = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$ . К этой задаче относятся тела, вытянутые вдоль оси  $z$  под действием нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль нее (длинные пластины, подпорные стенки, плотины).

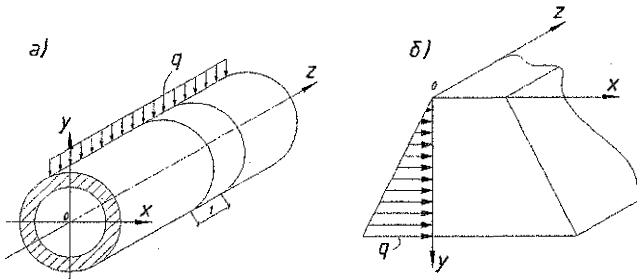


Рисунок 4 – Пример плоского деформированного состояния

2. Обобщенное плоское напряженное состояние, при котором напряжения  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$  равны нулю. К этой задаче относится расчет тонких пластин, нагруженных по боковым граням силами, параллельными плоскости пластин (рисунок 5).

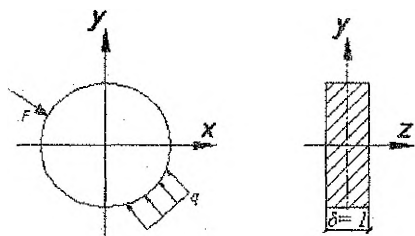


Рисунок 5 – Пример плоского напряженного состояния

Суть обобщения: для пластин конечной толщины  $\delta$  принимается то, что выполняется в бесконечно тонкой пластине: равенство нулю напряжений из плоскости, а также равномерное распределение неизвестных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  по толщине пластин.

Основные уравнения для плоской деформации.

1. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия на поверхности:

$$P_{xy} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad P_{yz} = \tau_{yz} \cdot l + \sigma_y \cdot m, \quad (7)$$

где  $l = \cos(x, \nu), m = \cos(y, \nu)$  -- направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

2. Формулы Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

3. Закон Гука:

а) в прямой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (10)$$



б) в обратной форме:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad (11)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (12)$$

При плоском напряженном состоянии плоскости свободны от нагрузки

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad (13)$$

а другие напряжения не зависят от координаты z:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (14)$$

Из закона Гука:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\text{а } \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy};$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}.$$

Таким образом, плоское напряженное состояние и плоская деформация отличаются лишь постоянными  $E, E_1$  и  $\nu, \nu_1$  при использовании закона Гука, и обе задачи можно объединить в одну: плоскую задачу теории упругости.

В итоге, для решения плоских задач имеем восемь уравнений: два дифференциальных уравнения Навье-Коши; три геометрических соотношения Коши и три уравнения обобщенного закона Гука, с восьмью неизвестными:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ .

При решении задачи в напряжениях основными неизвестными будут  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Если объемные силы постоянны (например, собственный вес), то уравнения для обеих плоских задач совпадают. Решение упрощается, если все неизвестные напряжения выразить через одну функцию  $\varphi(x, y)$  (функцию напряжений) следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \bar{X}y + \bar{Y}x \right), \quad (15)$$

где  $\bar{X}, \bar{Y}$  — объемные силы в проекциях на оси  $x$  и  $y$  соответственно.

Функцию  $\varphi(x, y)$  можно определить из решения бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (16)$$

при граничных условиях:  $X_n = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m, \quad Y_n = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m.$

Во многих случаях получить точное решение уравнения (16) оказывается сложным. Для приближенного решения этого уравнения применяют численные методы и в частности метод конечных разностей (МКР). Суть МКР состоит в том, чтобы решение плоской задачи с помощью функции напряжений  $\varphi$  свести к алгебраическим уравнениям. В этом методе частные производные бигармонического уравнения (16) приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое. Это уравнение, как увидим далее, содержит значение функции напряжений в тринадцати точках, расположенных в определенном порядке на сетке вокруг центральной точки. Поэтому вместо одного бигармонического уравнения в частных производных приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений. Точность МКР прямо зависит от густоты сетки: чем гуще сетка, тем точнее будет решение задачи.

Рассмотрим некоторую функцию  $\varphi(x)$ , проходящую через точки 1, 2, 3 (рисунок 6). Представим приближенно эту функцию параболой  $\varphi = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ , тогда

$$\varphi_{лев} = a \cdot (\Delta x)^2 - b \cdot \Delta x + c; \quad \varphi_0 = c; \quad \varphi_{пр} = a \cdot (\Delta x)^2 + b \cdot \Delta x + c.$$

Находим коэффициенты  $a, b, c$ :

$$a = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2 \cdot (\Delta x)^2}, \quad b = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}, \quad c = \varphi_0.$$

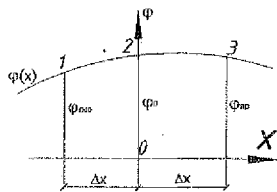


Рисунок 6 — Графическое представление функции  $\varphi$

Уравнение параболы примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2 \cdot (\Delta x)^2} \cdot x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x} \cdot x + \varphi_0$$

Находим производные

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \cdot x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2}.$$

При  $x=0$ :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad (a) \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2}. \quad (6)$$

Воспользуемся этими формулами для решения плоской задачи. Нанесём на рассматриваемую область сетку с шагом  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рисунок 7).

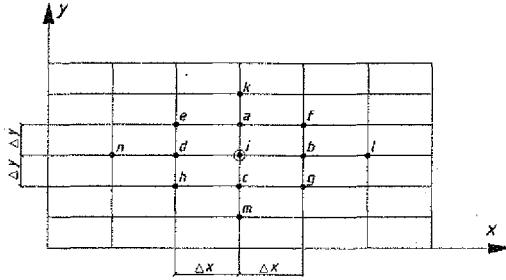


Рисунок 7 – Схема сетки

Выберем некоторую центральную точку “i”. На основании формул (а) и (б) для неё:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i &= \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \cdot \Delta x}; & \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{(\Delta x)^2}; \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i &= \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \cdot \Delta y}; & \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i &= \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_a}{(\Delta y)^2}; \\ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_c}{2 \cdot \Delta y} = \\ &= \frac{1}{2 \Delta y} \left( \frac{\varphi_f - \varphi_e}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2 \cdot \Delta x} \right) = \frac{\varphi_f - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_h}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (17), находим 4-ю производную:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_i &= \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_b + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_n)}{(\Delta x)^4}; & \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_i &= \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_a + \varphi_c) + (\varphi_k + \varphi_m)}{(\Delta y)^4}; \\ \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_i &= \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_f + \varphi_e + \varphi_g + \varphi_h)}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (B)$$

Подставим (в) в (16) и после преобразования получим алгебраическое уравнение, заменяющее бигармоническое:

$$\begin{aligned} (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_i - 4(\alpha + 1) \cdot (\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) + \\ + (\varphi_k + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ . Тогда напряжения в точке "i" получим по формулам:

$$\sigma_x = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i = \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_c}{(\Delta y)^2}; \quad \sigma_y = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_b - 2\varphi_i + \varphi_d}{(\Delta x)^2};$$

$$\tau_{xy} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \quad (19)$$

Уравнения (19) должны составляться для каждой внутриконтурной точки. Когда уравнения составляются для внутриконтурных точек, лежащих на ближайшей линии, параллельной контуру, то в них вынужденно входят и значения функции  $\varphi$  контурных и законтурных точек. Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий (рисунок 8). Таким образом, неизвестных значений  $\varphi$  столько, сколько узлов внутри контура.

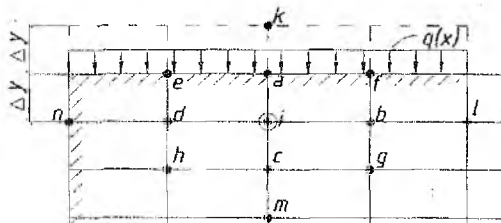


Рисунок 8 – Схема для определения  $\varphi$  на контуре и вне контура

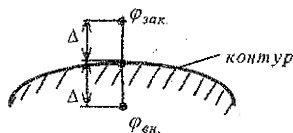


Рисунок 9 – Определение  $\varphi$  в законтурных точках

Для определения значений функции  $\varphi$  на контуре и вне его удобно воспользоваться так называемой рамной аналогией (идеи профессоров П.Л. Пастернака, П.М. Варвака, А.П. Силицина). Если, например, на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка  $q(x)$ , направленная вниз, то для этой грани можно записать:  $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q$ .

Сравнивая это выражение с известной зависимостью  $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$ , заключаем, что функцию напряжений на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки (рамы) с такой же нагрузкой, т.е.  $\varphi_a = M_a$ , или в общем виде:

$$\varphi_{кон} = M. \quad (20)$$

Для отыскания  $\varphi$  в законтурной точке (рисунок 9) используется формула:

$$\varphi_{зак} = 2 \cdot \Delta \cdot N + \varphi_{вн}, \quad (21)$$

где N – значение продольной силы в контурной точке.

Из формул (20) и (21) следует, что для записи  $\varphi_{кон}$  и  $\varphi_{вас}$  нужно построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  для соответствующей рамы. Под соответствующей рамой будем понимать такую раму, которая повторяет контур пластинки, геометрически неизменяемая и, желательно, статически определимая.

На основании вышеизложенного следует придерживаться следующего порядка расчета балки-стенки (пластинки) методом конечных разностей:

1. На заданную балку-стенку наносится сетка с определенным шагом и нумеруются внутренние узлы сетки (с учетом симметрии).

2. В соответствии с методом рамных аналогий, выбирается соответствующая рама и для нее строятся эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$ . Эпюры  $M$  строятся на растянутых волокнах, изгибающие моменты, отложенные внутри контура рамы, считать положительными. Знак продольной силы: растяжение — плюс, сжатие — минус.

3. Выражаются значения функции  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные по формуле (21).

4. Записываются алгебраические уравнения по формулам (18) для каждой внутриконтурной точки, решается система уравнений и находятся значения функции  $\varphi$  во внутриконтурных точках.

5. Определяются напряжения в узлах сетки по формулам (19) и строятся их эпюры.

### Расчет тонких пластин:

#### а) прямоугольные пластины.

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого толщина мала по сравнению с другими размерами, т. е.  $h \ll a \sim b$  (рисунок 10). Пластинки, которые будут рассматриваться далее, являются тонкими, жесткими, упругими и прямоугольными. Это значит, что толщина их  $h$  не превышает  $1/5$  наименьшего размера в плане, а наибольший прогиб  $w$  не превышает  $1/4$  толщины. Задача о расчете пластинок является трехмерной, однако вследствие некоторых гипотез она сводится к двумерной. Широкое практическое применение получила техническая теория изгиба на основе гипотез, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом [1-4].

Согласно этим допущениям, все напряжения и деформации можно выразить через функцию прогибов срединной поверхности пластинки  $w(x, y)$ . Считаем, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки, т. е. нормальной к срединной плоскости, а срединная плоскость совпадает с плоскостью  $xOy$  прямоугольной системы координат. Ось  $z$  направлена по вертикали вниз (рисунок 10).

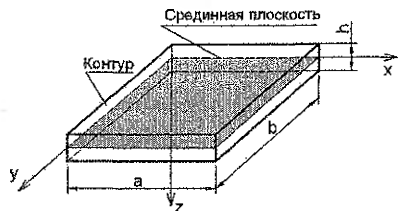


Рисунок 10 – Схема пластинки

Усилия в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости, выраженные через функцию прогибов  $w(x, y)$  (погонные, т. е. приходящиеся на единицу ширины сечения), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & (22) \\ Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), & Q_y &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right), \end{aligned}$$

где  $M_x, M_y$  – погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалью  $x$  и  $y$  соответственно;  $M_{xy} = M_{yx}$  – погонные крутящие моменты в тех же сечениях;

$Q_x, Q_y$  – погонные перерезывающие (поперечные) силы;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость при изгибе.

Напряжения связаны с  $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}, Q_x, Q_y$  следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_x}{I}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_y}{I}; \quad (23)$$

где  $I = \frac{h^3}{12}$  – погонный момент инерции сечения пластинки,  $S_x = S_y = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$  –

статический момент отсеченной части площади сечения, находящейся выше или ниже уровня точки, в которой определяются напряжения. Эти формулы аналогичны формулам, полученным в сопротивлении материалов при изгибе балки прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Действие силовых факторов и распределение напряжений в сечениях пластинки показаны на рисунках 11, 12, 13.

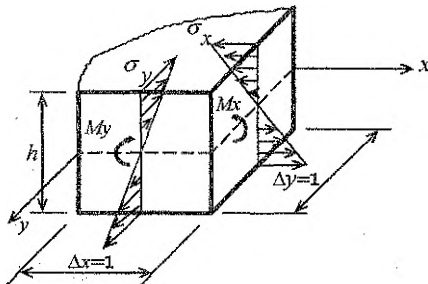


Рисунок 11 – Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$

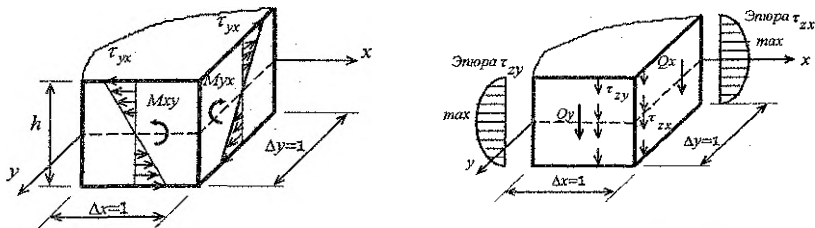


Рисунок 12 – Эпюры касательных напряжений  $\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

**Примечание.** На рисунках 11, 12, 13 показаны положительные направления указанных усилий.

Из формул (22) и (23) следует, что для определения усилий и напряжений необходимо знать функцию прогибов  $w(x, y)$ , которая должна в каждой точке пластинки удовлетворять основному дифференциальному уравнению ее изогнутой поверхности (уравнению Софи Жермен) и условиям на опорном контуре (граничным условиям). Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (24)$$

где  $\nabla$  – оператор Лапласа,  $q(x, y)$  – распределенная нормально к поверхности пластинки нагрузка.

Укажем, каковы должны быть граничные условия для функции  $w(x, y)$  в различных случаях закрепления пластинки (рисунок 13).

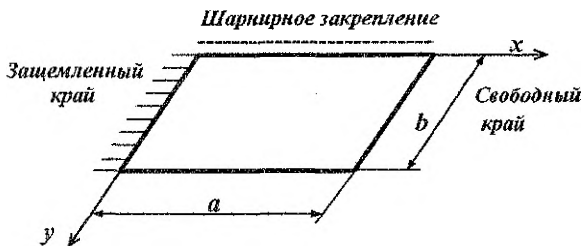


Рисунок 13 – Варианты закрепления граней пластинки

Для каждого края пластинки должно быть два граничных условия.

1. Защемленный край:

при  $x=0$ : прогиб  $w=0$ , угол поворота  $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ , изгибающий момент

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \neq 0.$$

2. Шарнирно опертый край:

при  $y=0$ : прогиб  $w=0$ , угол поворота  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ , изгибающий момент

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$

3. Свободный край:

при  $x=a$ : прогиб  $w \neq 0$ , изгибающий момент  $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$ ,

$$\text{приведенная поперечная сила } Q_x^{прив} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Здесь рассмотрены три основных способа закрепления краев пластинки и показаны соответствующие граничные условия для функции  $w$ . На практике приходится встречаться и с другими способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворот же края возможен, но сопровождается появлением изгибающих моментов, пропорциональных повороту — упруго заделанный край ( $w=0, \varphi \neq 0, M \neq 0$ ). Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку — упруго опертый край ( $w \neq 0, Q \neq 0$ ).

Задача об изгибе пластинки будет решена, если будет найдена функция  $w(x, y)$ , удовлетворяющая уравнению (24) и граничным условиям. Эта задача в некоторых случаях решается обратным методом, т. е. задается вид функции прогибов  $w(x, y)$ , а затем определяются нагрузки и условия закрепления, которым соответствует эта функция.

В тех случаях, когда не удовлетворяется уравнение (24), расчет производится приближенным методом Бубнова-Галеркина. Он состоит в том, что для заданной нагрузки  $q(x, y)$  задается вид функции  $w(x, y)$ , удовлетворяющей только граничным условиям. При подстановке  $w(x, y)$  и  $q(x, y)$  в уравнение Софи Жермен последнее может тождественно не удовлетворяться. Поэтому уравнение удовлетворяют в среднем для всей площади пластинки, т. е. в интегральном смысле. Исходя из этого, получают следующее уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_{S^D} \frac{q}{D} w dS, \text{ где } S \text{ — плоская область, ограниченная контуром}$$

пластинки. Методика расчета рассмотрена в [1–5].

### б) круглые пластины.

Задача об изгибе круглой пластины будет осесимметричной, если нагрузка и условия закрепления её краев не зависят от полярного угла  $\theta$ . В этом случае прогибы также не зависят от угла  $\theta$ , а являются функцией координаты  $r$ , т. е.  $w = f(r)$ . Тогда имеем:



а) дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D} \quad (25)$$

б) внутренние силы:

$$\text{изгибающие моменты: } M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

$$\text{поперечная сила: } Q_r = -D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right);$$

в) граничные условия:

$$\text{жесткое защемление } - w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} = 0, \quad M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \neq 0,$$

$$\text{шарнирное закрепление } - w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} \neq 0; \quad M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$$

свободный край (в зависимости от действующих нагрузок) -  $w \neq 0$ ;  $M_r = 0$   
или  $M_r = m$ ,  $Q_r = 0$  или  $Q_r = F$ .

Уравнение (25) можно решить в общем виде:  $w = w_1 + w_2$ , где  $w_1$  - общее решение однородного уравнения,  $w_2$  - частное решение неоднородного уравнения:  $w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$ .

Например, для равномерно распределённой нагрузки  $q(r) = q = const$ :  $w_2 = \frac{qr^4}{64D}$ . Тогда  $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$ . Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из граничных условий.

Рассмотрим сплошную пластинку, шарнирно опертую по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ . Для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  имеем следующие условия: в центре пластинки при  $r=0$  прогиб  $w$  должен иметь конечное значение. Т. к.  $\ln 0 = \infty$ , то  $C_2 = C_4 = 0$ .

$$\text{Решение имеет вид: } w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 r^2.$$

Определим  $C_1$  и  $C_3$ ; при  $r=a$ :  $w=0$ ;  $M_r=0$ . Из первого условия ( $w=0$ ):  $\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0$ . Из второго условия ( $M_r=0$ ):  $2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left( C_3 \cdot 2a + \frac{qa^2}{16D} \right) = 0$ ,

$$\text{откуда } C_1 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{qa^2}{32D}.$$

Подставляем полученные величины в выражение для  $w(r)$ :

$$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right).$$

Подставляем функцию  $w(r)$  в выражения для  $M_r$  и  $M_\theta$ , получим:

$$M_r = \frac{q}{16}(3 + \nu)(a^2 - r^2); \quad M_\theta = \frac{q}{16} \left( (3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2 \right). \quad (26)$$

Эпюры  $M_r$  и  $M_\theta$  построены при  $\nu = 0,3$  (рисунок 14а).

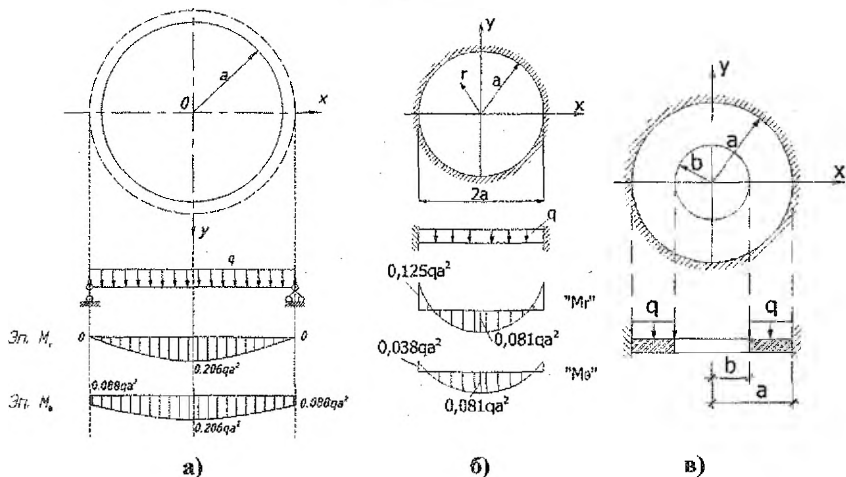


Рисунок 14 – Схемы пластин и эпюры  $M_r, M_\theta$

В случае сплошной защемлённой по контуру пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки (рисунок 14, б) для определения постоянных  $C_1$  и  $C_3$  имеем следующие граничные условия: на контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и углы поворота сечений: при  $r = a$ :  $w = 0$ ;  $\frac{dw}{dr} = 0$ . Окончательно получим:  $w(r) = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$ .

Для кольцевой пластинки с защемлённым наружным краем (рисунок 14, в) для определения постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  в функции  $w(r)$ , имеем следующие граничные условия: при  $r = a$ :  $w = 0$ ,  $\frac{dw}{dr} = 0$ , при  $r = b$ :  $M_r = 0$ ;  $Q_r = 0$ . Подставляя в эти условия  $w(r)$ , получим четыре уравнения для определения  $C_1 - C_4$ .

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

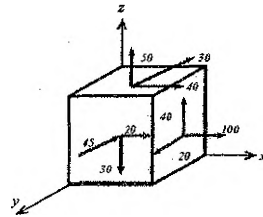
### Пример 1

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Стрелки на рисунке соответствуют положительным направлениям компонент в выбранной системе координат.

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}; \sigma_y = -45 \text{ МПа}; \sigma_z = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \tau_{yz} = -30 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 40 \text{ МПа}.$$

Элементарный параллелепипед с заданными компонентами напряжения представлен на рисунке 15.



*Рисунок 15 – Исходное напряженное состояние*

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости  $E = 200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Положение некоторой площадки, наклоненной к осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рисунок 1, в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке  $l = \cos\alpha = 1/\sqrt{2} = 0,707$ ;  $m = \cos\beta = 1/\sqrt{3} = 0,577$ ;  $n = \cos\gamma = 1/\sqrt{6} = 0,408$ . Как известно из математики, направляющие косинусы должны удовлетворять условию  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Требуется:

- 1) найти нормальную и касательную составляющие напряжений на площадке с заданной ориентацией (с заданными направляющими косинусами  $l$ ,  $m$ ,  $n$ );
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) найти величину наибольших касательных напряжений в данной точке тела и указать площадки, по которым они действуют;
- 4) найти нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках и указать их расположение;
- 5) построить для заданного напряженного состояния круги Мора и указать на них точки, изображающие напряженное состояние на площадках, на которых напряженное состояние задано или определилось в процессе решения задачи;
- 6) определить компоненты деформаций в заданных и главных осях;
- 7) определить интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;
- 8) разложить заданный тензор напряжения на шаровой и дивiator;
- 9) найти удельную потенциальную энергию деформации (полную, изменения объема, изменения формы);
- 10) определить расчетные напряжения по четырем классическим критериям прочности и пластичности.

Решение:

1. Определение нормальной и касательной составляющих напряжения на площадке с заданной ориентацией.

Напряжения на площадке, нормаль к которой имеет направляющие косинусы  $l, m, n$ , определяются из условий равновесия тетраэдра, отсекаемого этой площадкой с нормалью от элементарного параллелепипеда с гранями, нагруженными заданными компонентами напряжения (рисунок 16).

Составляющие вдоль осей  $x, y, z$  полного напряжения на площадке с нормалью  $\nu_n$  определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \quad (27)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью  $\nu_n$ :

$$p_\nu = \sqrt{p_{x\nu}^2 + p_{y\nu}^2 + p_{z\nu}^2}. \quad (28)$$

Нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью  $\nu_n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= p_{x\nu}l + p_{y\nu}m + p_{z\nu}n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl; \\ p_\nu^2 &= \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2; \quad \tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

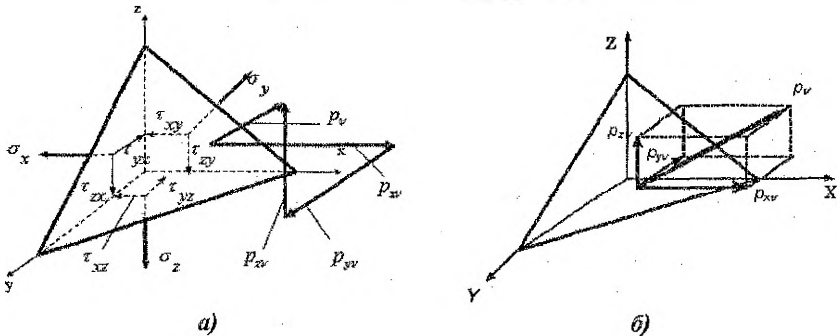


Рисунок 16 – Напряжения на наклонной площадке

Подставляя в зависимости (27) – (29) исходные данные, получаем составляющие вдоль осей  $x, y, z$  полного напряжения на площадке с нормалью  $\nu_n$ :

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= 100 \cdot 0,707 + 20 \cdot 0,577 + 40 \cdot 0,408 = 98,56 \text{ МПа}; \\ p_{y\nu} &= 20 \cdot 0,707 + 45 \cdot 0,577 + 30 \cdot 0,408 = -24,07 \text{ МПа}; \\ p_{z\nu} &= 40 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,577 + 50 \cdot 0,408 = 31,37 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Полное напряжение на той же площадке:

$$p_\nu = \sqrt{98,56^2 + (-24,07)^2 + 31,37^2} = 106,2 \text{ МПа}.$$

Нормальное и касательное напряжения:

$$\sigma_v = 100 \cdot (1/\sqrt{2})^2 + (-45) \cdot (1/\sqrt{3})^2 + 50 \cdot (1/\sqrt{6})^2 + 20 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{3} + (-30) \cdot 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{6} + 40 \cdot 1/\sqrt{6} \cdot 1/\sqrt{2} = 68,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_v = \sqrt{106,2^2 - 68,6^2} = 81,07 \text{ МПа}.$$

2. Определение величины и направления главных напряжений.

Для отыскания величины главных напряжений необходимо решить кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (30)$$

Вычисляем инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 50 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 50 + 50 \cdot 100 - 20^2 - (-30)^2 - 40^2 = -4650 \text{ (МПа)}^2, \quad (31)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yx} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 100 \cdot (-45) \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot (-30) \cdot 40 - 100 \cdot (-30)^2 + 45 \cdot 40^2 - 50 \cdot 20^2 = -311000 \text{ (МПа)}^3.$$

Кубическое уравнение (5) принимает вид:  $\sigma^3 - 105\sigma^2 - 4650\sigma + 311000 = 0$ .

Кубическое уравнение (30) решаем с помощью формулы Кардано, относящейся к уравнению вида:

$$x^3 + cx + q = 0. \quad (32)$$

Это кубическое уравнение имеет три действительных корня, если выполняется неравенство:

$$D = (c/3)^3 + (q/2)^2 < 0. \quad (33)$$

Тогда решение кубического уравнения (32) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2R \cos(\varphi/3), \\ x_2 &= -2R \cos(\varphi/3 + 2\pi/3), \\ x_3 &= -2R \cos(\varphi/3 + 4\pi/3), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{q}{2R^3}, \quad R = \pm \sqrt{\frac{|c|}{3}}, \quad (35)$$

при этом знак  $R$  должен совпадать со знаком  $q$ , а  $c \leq 0$ .

Кубическое уравнение (30) можно привести к виду (32) посредством замены переменной

$$\sigma = x + I_1/3. \quad (36)$$

Тогда

$$c = -I_1^2/3 + I_2, \quad q = -(2I_1^3)/27 + I_1 I_2/3 - I_3. \quad (37)$$

Подставляя в (37) подсчитанные выше значения инвариантов напряжения  $I_1, I_2, I_3$ , находим

$$c = -\frac{105^2}{3} - 4650 = -8325 \text{ (МПа)}^2,$$

$$q = -\frac{2}{27} \cdot 105^3 + \frac{105 \cdot (-4650)}{3} + 311000 = 62500 \text{ (МПа)}^3.$$

Проверяем условия (10) и (12):

$$D = \left(\frac{-8325}{3}\right)^3 + \left(\frac{62500}{2}\right)^2 = -2,039 \cdot 10^{10} < 0, \quad C = -8325 < 0.$$

Оба условия выполнены. Следовательно, в данном случае можно воспользоваться решением Кардано:

$$R = +\sqrt{\frac{8325}{3}} = 52,678 \text{ МПа}, \quad \cos \varphi = \frac{62500}{2 \cdot (52,678)^3} = 0,214, \text{ откуда } \varphi = 1,355 \text{ рад.}$$

По формулам (34) находим корни уравнения кубического уравнения (32):

$$x_1 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355}{3}\right) = -94,791 \text{ МПа},$$

$$x_2 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 2 \cdot 3,14}{3}\right) = +87,219 \text{ МПа},$$

$$x_3 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 4 \cdot 3,14}{3}\right) = +7,572 \text{ МПа}.$$

Проверка:  $x_1 + x_2 + x_3 = -94,791 + 87,219 + 7,512 = 0$ .

По формуле (36) найдем три корня уравнения (32), т. е. искомые значения главных напряжений:

$$\sigma_I = x_1 + \frac{I_1}{3} = -94,791 + \frac{105}{3} \approx -59,79 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = x_2 + \frac{I_1}{3} = 87,219 + \frac{105}{3} \approx 122,22 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = x_3 + \frac{I_1}{3} = 7,572 + \frac{105}{3} \approx 42,57 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  наибольшему по алгебраической величине из этих напряжений присвоим индекс 1 и т. д. Тогда

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 122,22 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \sigma_{III} = 42,57 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = \sigma_I = -59,79 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности полученного решения найдем инварианты напряженного состояния, выразив их через главные напряжения. Они должны быть такими же, как и вычисленные выше по заданным компонентам напряжений (31):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 122,22 + 42,57 - 59,79 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22 \approx -4649,9 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 122,22 \cdot 42,57 \cdot (-59,79) \approx -311082 \text{ (МПа)}^3.$$

Положение главных площадок определяется направляющими косинусами нормалей к главным площадкам. Для отыскания направляющих косинусов нормали к  $i$ -й главной площадке ( $i=1,2,3$ ) используем систему уравнений, подставив в нее  $\sigma = \sigma_i$ . Тогда направляющие косинусы принимают значения  $l_i, m_i, n_i$ .

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{xz} n_i = 0, \\ \tau_{yx} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{yz} n_i = 0, \\ \tau_{zx} l_i + \tau_{xy} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (39)$$

Из трех уравнений (38) выберем любые два, например, первое и второе. Делим эти уравнения на  $n_i$  и вводим обозначения

$$a_i = l_i / n_i; \quad b_i = m_i / n_i. \quad (40)$$

Получаем

$$(\sigma_x - \sigma_i) a_i + \tau_{xy} b_i = -\tau_{xz}, \quad \tau_{yx} a_i + (\sigma_y - \sigma_i) b_i = -\tau_{yz},$$

отсюда

$$\begin{aligned} a_i &= [\tau_{yx} \tau_{zy} - \tau_{zx} (\sigma_y - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i) (\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2], \\ b_i &= [\tau_{xy} \tau_{zx} - \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i) (\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]. \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда из (39) и (40)

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{1 + a_i^2 + b_i^2}}, \quad l_i = a_i \cdot n_i, \quad m_i = b_i \cdot n_i. \quad (42)$$

Примем сначала:  $\sigma_i = \sigma_1 = 122,22$  МПа, и из (41) и (42) найдем:

$$a_1 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 1,836,$$

$$b_1 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 0,040,$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,836^2 + 0,040^2}} = \pm 0,478,$$

$$l_1 = a_1 \cdot n_1 = 1,836 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,878,$$

$$m_1 = b_1 \cdot n_1 = 0,040 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,019.$$

Проверка:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad 0,878^2 + 0,019^2 + 0,478^2 = 0,9998 \approx 1.$$

Равенство выполнено.

Теперь подставляем в (41) и (42)  $\sigma_2 = 42,57$  МПа и находим

$$a_2 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,535,$$

$$b_2 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,465,$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,535)^2 + (-0,465)^2}} = \pm 0,816,$$

$$l_2 = a_2 \cdot n_2 = -0,535 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,437,$$

$$m_2 = b_2 \cdot n_2 = -0,465 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,379.$$

Проверка:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad (-0,437)^2 + 0,816^2 + (-0,379)^2 = 1,00047 \approx 1.$$

Подставив в (41) и (42)  $\sigma_3 = -59,79$  МПа, получаем:

$$a_3 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = -0,607,$$

$$b_3 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = 2,849,$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,607^2 + 2,849^2}} = \pm 0,325,$$

$$l_3 = a_3 \cdot n_3 = -0,607 \cdot (\pm 0,325) = \mp 0,197,$$

$$m_3 = b_3 \cdot n_3 = 2,849 \cdot (\pm 0,325) = \pm 0,926.$$

Проверка:

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad (-0,197)^2 + 0,926^2 + 0,325^2 = 1,002 \approx 1.$$

Сведем найденные значения в таблицу 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам.

	1	2	3
$l_i$	$\pm 0,878$	$\mp 0,437$	$\mp 0,197$
$m_i$	$\pm 0,019$	$\mp 0,379$	$\pm 0,926$
$n_i$	$\pm 0,478$	$\pm 0,816$	$\pm 0,345$

Сделаем следующие три проверки, подтверждающие взаимную ортогональность главных площадок (в дальнейшем рассматриваем направляющие косинусы внешних нормалей, соответствующие верхним знакам в таблице 1):

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,437) + 0,019 \cdot (-0,379) + 0,478 \cdot 0,816 = -8,39 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$(-0,437) \cdot (-0,197) + (-0,379) \cdot 0,926 + 0,816 \cdot 0,325 = 3,35 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,197) + 0,019 \cdot 0,926 + 0,478 \cdot 0,325 = 2,20 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

Можно сделать вывод, что взаимная ортогональность нормалей к главным площадкам этими проверками подтверждается.



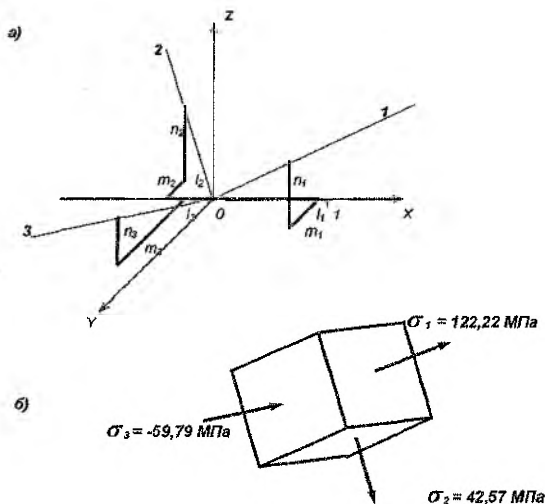


Рисунок 17 – Графическое построение главных площадок

Чтобы изобразить графически положение в пространстве параллелепипеда, гранями которого являются главные площадки, надо произвести следующее построение. В осях  $x, y, z$  по заданным направляющим косинусам (таблица 1) строим нормали к главным площадкам, взяв за исходную точку начало координат. Для построения  $i$ -й нормали достаточно вдоль осей  $x, y, z$  отложить в некотором масштабе отрезки, равные направляющим косинусам  $l_i, m_i, n_i$ , и точку с такими координатами соединить с центром  $O$  (рисунок 17, а). Его грани и будут главными площадками с напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рисунок 17, б).

### 3. Определение максимальных касательных напряжений.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  между каждой парой главных площадок (рисунок 3). Величины наибольших касательных напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (43)$$

$$\tau_{13} = [122,22 - (-59,79)] / 2 = 91,01 \text{ МПа};$$

$$\tau_{12} = [122,22 - 42,57] / 2 = 39,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = [42,57 - (-59,79)] / 2 = 51,18 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{13} = 91,01 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, наклоненной под углом  $45^\circ$  к первой и третьей главным площадкам.

### 4. Определение октаэдрических площадок.

Площадки равнонаклоненные к трем главным площадкам  $l=m=n=1/\sqrt{3}$ , называются октаэдрическими (рисунок 2). Нормальное и касательное напряжения на этих площадках определяются по формулам:

$$\sigma_{окт} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \quad \tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \quad (44)$$

$$\text{или } \tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}$$

В данном случае:

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(122,22 + 42,57 - 59,79) = 35 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{39,83^2 + 52,18^2 + 91,01^2} = 74,5 \text{ МПа.}$$

### 5. Построение кругов Мора.

В координатах  $\sigma$  и  $\tau$  построим круги Мора для исследуемого объёмного напряжённого состояния. Отложим в осях  $\sigma$  и  $\tau$  точки, изображающие напряжённое состояние на главных площадках:  $K_1(\sigma_1, 0) = K_1(122,21; 0)$ ;  $K_2(\sigma_2, 0) = K_2(42,57; 0)$ ;  $K_3(\sigma_3, 0) = K_3(-59,79; 0)$  (рисунок 18).

На отрезках  $K_1K_3$ ,  $K_1K_2$ ,  $K_2K_3$ , как на диаметрах строим окружности — это и есть круги Мора для заданного напряжённого состояния.

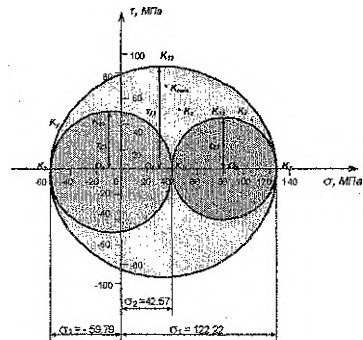


Рисунок 18 – Круги Мора

Напряжённое состояние на любой площадке, проходящей через заданную точку тела, изображается точками, которые лежат внутри заштрихованной области.

Нанесем на круги Мора точки, изображающие напряжённое состояние на площадках с нормальными  $x, y, z$ . Для этого на этих площадках найдем полные касательные напряжения:

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72 \text{ МПа;}$$

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} = 36,06 \text{ МПа;}$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50 \text{ МПа.}$$

Координаты точек, изображающих напряжённое состояние на площадках, перпендикулярных осям  $x, y, z$ :  $K_x(\sigma_x, \tau_x) = K_x(100; 44,72)$ ,  $K_y(\sigma_y, \tau_y) = K_y(-45; 36,06)$ ,  $K_z(\sigma_z, \tau_z) = K_z(50; 50)$ .

Координаты точки, изображающей напряжённое состояние на октаэдрической площадке:  $K_{окт}(\sigma_{окт}; \tau_{окт}) = K_{окт}(35; 74,5)$ .

Точки, изображающие напряжённое состояние на площадках с наибольшими касательными напряжениями  $K_{12}$ ,  $K_{23}$ ,  $K_{13}$ , расположены на концах вертикальных диаметров кругов Мора (рисунок 18).

6. Определение компонент тензора деформации в заданных и главных осях и относительного изменения объема.

Тензор деформации в заданных осях имеет вид:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Его компоненты находим по формулам обобщённого закона Гука в произвольных осях (4):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге:  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 7,69 \cdot 10^4$  МПа.

В нашем случае:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [100 - 0,3 \cdot (-45 + 50)] = 49,25 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-45 - 0,3 \cdot (50 + 100)] = -45 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [50 - 0,3 \cdot (100 - 45)] = 16,75 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{20}{7,69 \cdot 10^4} = 26 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{yz} = \frac{-30}{7,69 \cdot 10^4} = -39 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{zx} = \frac{40}{7,69 \cdot 10^4} = 52 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 49,25 & 13 & 26 \\ 13 & -45 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 16,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}. \quad (46)$$

Тензор деформации в главных осях:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — главные деформации, определяемые по формулам (48):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (48)$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79)] = 63,69 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [42,57 - 0,3 \cdot (-59,79 + 122,22)] = 11,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-59,79 - 0,3 \cdot (122,22 + 42,57)] = -54,61 \cdot 10^{-5}.$$

$$T_E = \begin{pmatrix} 63,69 & 0 & 0 \\ 0 & 11,92 & 0 \\ 0 & 0 & -54,61 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Проверка:  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  — первый инвариант деформированного состояния.

$$(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5} = (63,69 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5}; \quad 21 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема определяется по формуле:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (63,19 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}. \quad (49)$$

**Примечание.** От деформаций по направлению осей  $x, y, z$  можно перейти к главным деформациям и определить их величины из кубического уравнения:

$$e^3 - E_1 e^2 + E_2 e - E_3 = 0;$$

где инварианты тензора деформаций:  $E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ ;

$$E_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2;$$

$$E_3 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy} \cdot \gamma_{yz} \cdot \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \cdot \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \cdot \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \cdot \gamma_{xy}^2.$$

Решение данного уравнения проводится аналогично методике, изложенной в п. 2 примера.

7. Определение интенсивности напряжений и деформаций.

Интенсивность касательных напряжений определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \tau_H &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(100 - (-45))^2 + (-45 - 50)^2 + (50 - 100)^2 + 6(20^2 + (-30)^2 + 40^2)} = 91,24 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Интенсивность нормальных напряжений определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3} \cdot \tau_H = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_H = 158,04 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Интенсивность деформаций сдвига:

$$\gamma_H = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]} = 118,47 \cdot 10^{-5}.$$

Интенсивность продольных деформаций:

$$\varepsilon_H = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_H = \frac{118,47 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 68,4 \cdot 10^{-5}.$$

Строим направляющий тензор деформаций:  $\bar{D}_e = \frac{2}{\gamma_H} D_e$ , где  $D_e$  – девиатор деформаций:

$$D_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{средняя деформация: } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5}}{3} = 7 \cdot 10^{-5},$$

$$D_e = \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5},$$

$$\bar{D}_e = \frac{2}{\gamma_H} D_e = \frac{2}{118,47 \cdot 10^{-5}} \cdot \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,11 & 0,22 \\ 0,11 & -0,44 & -0,16 \\ 0,22 & -0,16 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

### 8. Разложение заданного тензора напряжения на шаровой и девиатор.

Компоненты напряжённого состояния, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в некоторой точке тела, вызывают изменение объёма и формы этого параллелепипеда. Относительное изменение объёма

определяется зависимостью:  $\theta = \frac{\sigma_0}{K}$ , где  $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$  – среднее гидростатическое напряжение,  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  – модуль объёмной упругости,

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}. \quad (50)$$

Изменение формы параллелепипеда характеризуется наличием относительных деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , которые выражаются через компоненты напряжения по закону Гука (4).

Тензор напряжений  $T_\sigma$  можно представить в виде двух составляющих тензоров, один из которых — шаровой  $T_\sigma^0$  — связан с изменением только объема, а другой —  $D_\sigma$  — вызывает изменение только формы:

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma. \quad (51)$$

Эти тензоры имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае  $\sigma_0 = \frac{100 - 45 + 50}{3} = 35$  МПа, и следовательно,

$$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 40 \\ 20 & -45 & -30 \\ 40 & -30 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 65 & 20 & 40 \\ 2 & -80 & -30 \\ 40 & -30 & 15 \end{pmatrix}.$$

$T_\sigma \qquad T_\sigma^0 \qquad D_\sigma$

Графическое разложение на шаровой и девиатор представлено на рисунке 19.

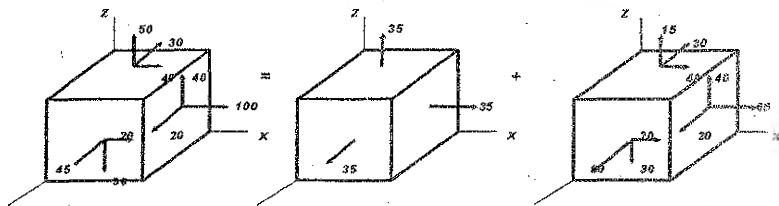


Рисунок 19 — Графическое разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

**Примечание.** Тензор деформаций также можно разложить на шаровой и девиатор деформаций:

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon; \text{ где } T_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}.$$

9. Определение удельной потенциальной энергии деформации (полной, изменения объема, изменения формы).

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется по формулам:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \text{ или } u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (52)$$

Полную удельную потенциальную энергию  $u$  можно представить в виде двух составляющих, одна из которых связана с изменением объёма  $u_0$ , а другая — с изменением формы  $u_\phi$  в окрестности некоторой точки тела:

$$u = u_0 + u_\phi. \quad (53)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объёма и изменения формы выражается зависимостями:

$$u_0 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (54)$$

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (55)$$

В нашем случае из (52):

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \{ 122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot [ 122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22 ] \} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

$$\text{Из (54): } u_0 = \frac{(1-2 \cdot 0,3)}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (122,22 + 42,57 - 59,79)^2 = 3,675 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3},$$

$$u_\phi = \frac{(1+0,3)}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot [122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) -$$

из (55):

$$-(-59,79) \cdot 122,22] = 5,41 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3};$$

$$u = u_0 + u_\phi = 0,368 \cdot 10^{-2} + 5,411 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Сравниваем полученные значения для  $u$ :

$$5,779 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2}.$$

10. Определение расчётных напряжений по четырём классическим критериям прочности и пластичности.

Первый критерий (прочности) — критерий наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma'_p = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа}. \quad (56)$$

Второй критерий (прочности) — критерий наибольших удлинений:

$$\sigma''_p = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79) = 127,39 \text{ МПа}. \quad (57)$$

Третий критерий (пластичности) — критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma'''_p = \sigma_1 - \sigma_3 = 122,22 - (-59,79) = 182,01 \text{ МПа}. \quad (58)$$

Четвёртый критерий (пластичности) — энергетический:

$$\begin{aligned} \sigma''''_p &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22} = \\ &= 158,03 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

### Пример 2

Балка-стенка толщиной  $\delta = 1$  м нагружена на верхней кромке и частично на нижней распределённой нагрузкой  $q$  и сверху сосредоточенной силой  $P$ . Пролёт балки-стенки  $l$ , а высота её  $h$ . Требуется определить напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в балке-стенке и построить их эпюры в сечениях А-А и В-В; для сечения А-А построить также эпюру  $\sigma_x$  методом сопротивления материалов.

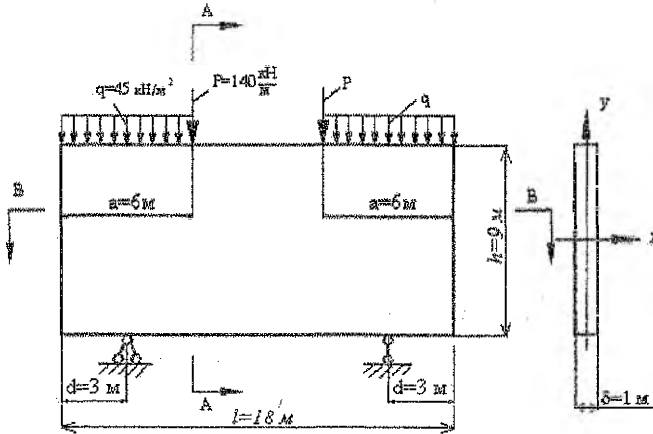


Рисунок 20 – Схема балки-стенки

Решение:

1. Нанесём на балку-стенку сетку (3x3) с шагом  $\Delta x = 6$  м,  $\Delta y = 3$  м. Затем пронумеруем внутренние точки (узлы сетки), соблюдая при этом симметрию системы (рисунок 21).

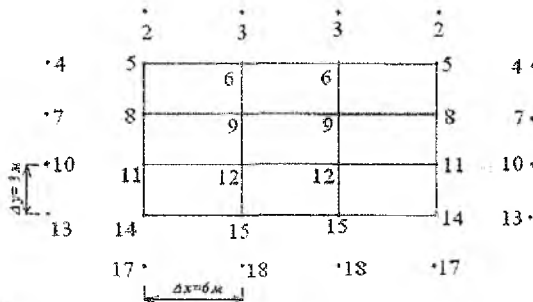


Рисунок 21 – Расположение узлов сетки

2. Выбираем статически определимую раму с учётом симметрии. Для этого разрежем нижний ригель (рисунок 22).



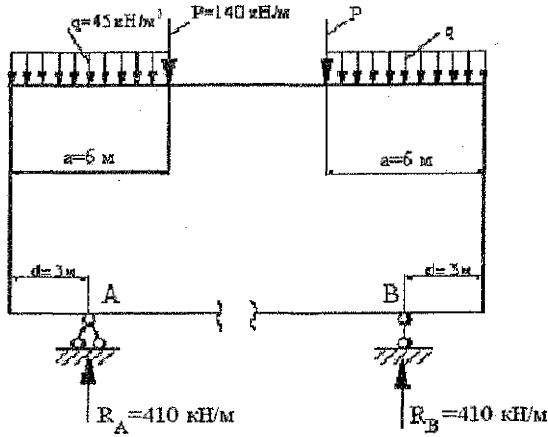


Рисунок 22 – Модель соответствующей рамы

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot (l - 2d) = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left( l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2}}{(l - 2d)} =$$

$$= \frac{45 \cdot 6 \cdot (18 - 3 - 3) + 140 \cdot (18 - 3 - 6) + 140 \cdot 3}{18 - 6} = 410 \text{ кН/м};$$

аналогично определяем:  $R_B = 410 \text{ кН/м}$ .

Строим эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  (рисунок 23).

$$M_{14} = R_A \cdot d = 410 \cdot 3 = 1230 \text{ кН (растянуты волокна снизу);}$$

$$M_{11} = M_8 = M_5 = 1230 \text{ кН (растянуты волокна слева);}$$

$$M_6 = R_A \cdot \frac{a}{2} - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 410 \cdot 3 - 45 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 420 \text{ кН (растянуты волокна снизу).}$$

3. По формуле (20) находим функцию  $\varphi$  на контуре балки-стенки.

$$\varphi_{14} = \varphi_{11} = \varphi_8 = \varphi_5 = -1230 \text{ кН; } \varphi_6 = 420 \text{ кН; } \varphi_{15} = 0.$$

4. По формуле (21) выразим функцию  $\varphi$  в законтурных точках через внутриконтурные:

$$\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_8 = \varphi_8 = -1230 \text{ кН, } \varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_5 = \varphi_5,$$

$$\varphi_4 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = 420 - 4920 = -4500 \text{ кН,}$$

$$\varphi_7 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_5 = \varphi_5 - 4920, \quad \varphi_{10} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{12} = \varphi_{12} - 4920,$$

$$\varphi_{13} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{15} = -4920 \text{ кН, } \varphi_{17} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{11} = \varphi_{11} = -1230 \text{ кН,}$$

$$\varphi_{18} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{12} = \varphi_{12}.$$

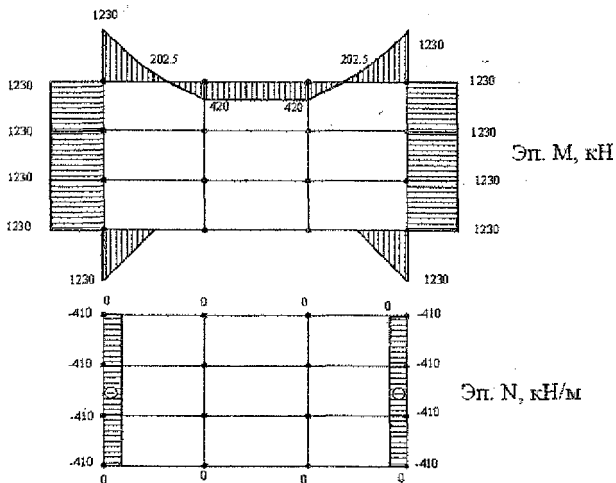


Рисунок 23 – Эпюры  $M$  и  $N$  для соответствующей рамы

5. Запишем уравнения для каждой внутриконтурной точки:

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_3 - 4(\alpha + 1)(\varphi_6 + \alpha\varphi_5 + \varphi_{12} + \alpha\varphi_8) + 2\alpha(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_{12} + \varphi_{11}) + (\varphi_3 + \alpha^2\varphi_8 + \varphi_{15} + \alpha^2\varphi_7) = 0,$$

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_{12} - 4(\alpha + 1)(\varphi_9 + \alpha\varphi_{12} + \varphi_{13} + \alpha\varphi_{11}) + 2\alpha(\varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{15} + \varphi_{14}) + (\varphi_6 + \alpha^2\varphi_{11} + \varphi_{18} + \alpha^2\varphi_{10}) = 0,$$

где  $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{9}{36} = 0,25,$

$$8,375\varphi_3 - 5(420 + 0,25\varphi_9 + \varphi_{12} - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + 420 + \varphi_{12} - 1230) + (\varphi_9 - 0,0625 \cdot 1230 + 0 + 0,0625(\varphi_9 - 4920)) = 0,$$

$$8,375\varphi_{12} - 5(\varphi_9 + 0,25\varphi_{12} + 0 - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + \varphi_9 + 0 - 1230) + (420 - 0,0625 \cdot 1230 + \varphi_{12} + 0,0625(\varphi_{12} - 4920)) = 0.$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} 8,1875\varphi_3 - 4,5\varphi_{12} = 1966,875, \\ -4,5\varphi_9 + 8,1875\varphi_{12} = -343,125. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\varphi_3 = 311,204 \text{ кН},$$

$$\varphi_{12} = 129,135 \text{ кН}.$$

**Примечание.** При решении задачи в контрольной (расчетно-графической) работе привести решение системы уравнений. Если для ее решения используется компьютер, необходимо приложить распечатку расчетов.

6. Напряжения в  $i$ -й точке сечения А-А определяются по формулам (19).

$$(\sigma_x)_6 = \frac{\varphi_9 - 2\varphi_6 + \varphi_3}{9} = \frac{311,204 - 2 \cdot 420 + 311,204}{9} = -24,17 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{12} = \frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{12} + \varphi_9}{9} = \frac{0 - 2 \cdot 129,135 + 311,204}{9} = 5,88 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{15} = \frac{\varphi_{18} - 2\varphi_{15} + \varphi_{12}}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 0 + 129,135}{9} = 28,7 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_6 = \frac{\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 420 + 420}{36} = -45,83 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_9 + \varphi_9}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{12} = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_{12} + \varphi_{12}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 129,135 + 129,135}{36} = -37,75 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{15} = \frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{15} + \varphi_{15}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 0 + 0}{36} = -34,17 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_9 - \varphi_8}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 311,204 + 1230}{72} = 0,$$

$$(\tau_{xy})_9 = \frac{\varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{12} = \frac{\varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{15} - \varphi_{14}}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 0 + 1230}{72} = -4,32 \text{ кПа},$$

$$(\tau_{xy})_{15} = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{12} + \varphi_{18} - \varphi_{17}}{72} = \frac{-1230 - 129,135 + 129,135 + 1230}{72} = 0.$$

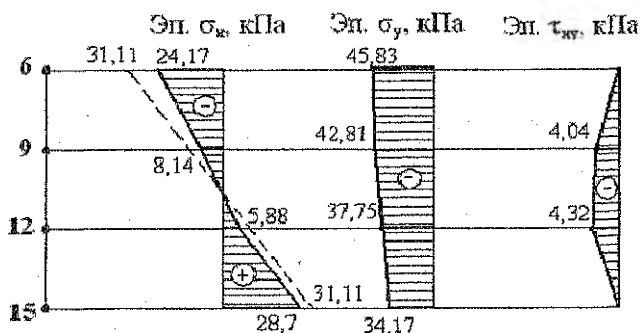


Рисунок 24 – Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении А-А

Аналогично можно построить эпюры в любом другом сечении. Эпюры напряжений в горизонтальном сечении В-В приведены на рисунке 25.

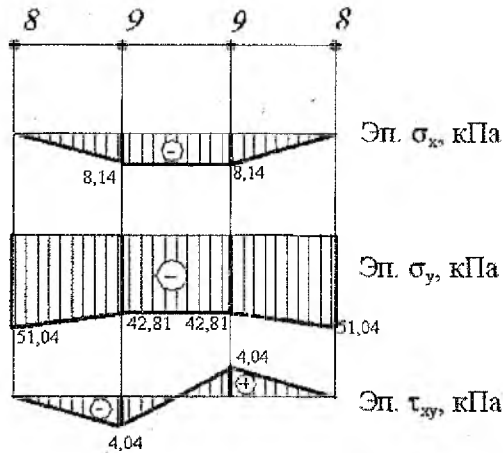


Рисунок 25 – Эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в сечении В-В

Построим эпюру  $\sigma_x$  в сечении А-А методом сопротивления материалов. Представим балку-стенку в виде обычной балки (рисунок 26).

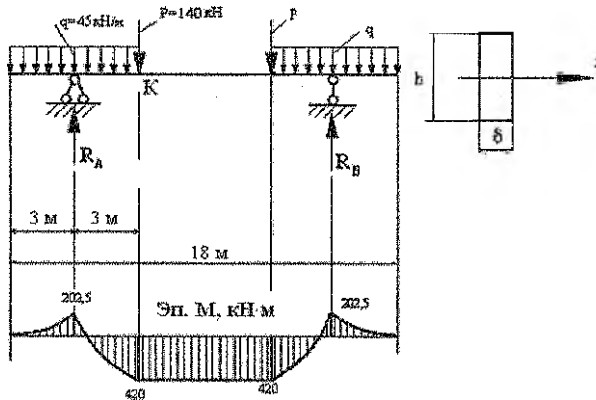


Рисунок 26 – К расчету балки-стенки по балочной схеме (метод сопротивления материалов)

$$\sigma_x = \frac{M_K}{W_{zt}}$$

изгибающий момент в сечении К:  $M_K = R_A \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = 420 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

$$W_z = \frac{\delta \cdot a^3}{6} = \frac{1 \cdot 9^3}{6} = 13,5 \text{ м}^3;$$

$$\sigma_x = \frac{420}{13,5} = 31,11 \text{ кПа.}$$

Эпюра  $\sigma_x$  показана на рисунке 24 пунктирной линией.

### Пример 3

Дана прямоугольная полоса-балка длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной 1 (рисунок 27). Начало координат  $O$  принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси  $Oy$  и  $Oz$ . Продольная ось  $Ox$  проходит посередине полосы-балки. Задано выражение для функции  $\varphi$ .

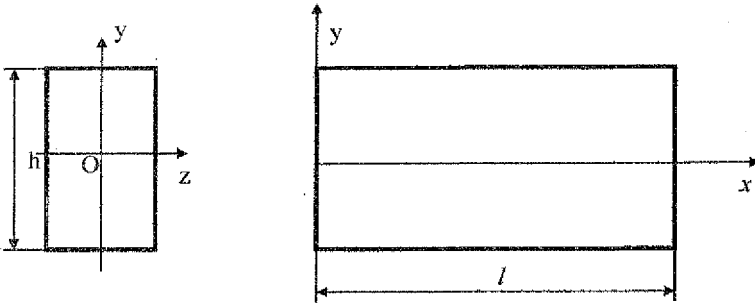


Рисунок 27 – Схема полосы-балки

Объемными силами пренебречь.

Требуется:

1. проверить, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости;
2. найти выражения для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ;
3. построить эпюры напряжений для сечения  $x=2$  м, перпендикулярного оси  $x$ ;
4. определять внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Дано:  $\varphi(x,y) = 2x^4 - 9x^2y^2 + y^4$ ,  $l = 6$  м,  $h = 1$  м,  $x = 2$  м.

Решение:

1. Проверим, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используем бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Находим производные:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 8x^3 - 18xy^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 24x^2 - 18y^2, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 48x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 48,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -18x^2y + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -18x^2 + 12y^2, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 24y, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24,$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = -36y, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -36.$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение:

$$48 + (-36) \cdot 2 + 24 = 0, \quad 0 = 0.$$

Следовательно, заданное  $\varphi(x,y)$  тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2. Находим выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -18x^2 + 12y^2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 24x^2 - 18y^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -36xy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 36xy.$$

Выполняем проверку выполнения уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Для этого находим соответствующие производные:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -36x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 36x, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -36y, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 36y,$$

$$\begin{cases} -36x + 36x = 0, \\ 36y - 36y = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры напряжений в сечении  $x = 2$  м. В данном случае:

$$\sigma_x = -72 + 12y^2, \quad \sigma_y = 96 - 18y^2, \quad \tau_{xy} = 72y.$$

По указанным выражениям для напряжений, изменяя  $y$  от  $-\frac{h}{2} = -0,5$  м

до  $\frac{h}{2} = 0,5$  м, строим их эпюры (рисунок 28).

Таблица 2 – Расчет значений напряжений в сечении  $x = 2$  м.

	$-0,5$ м	$0$	$0,5$ м
$\sigma_x$	$-69$	$-72$	$-69$
$\sigma_y$	$91,5$	$96$	$91,5$
$\tau_{xy}$	$-36$	$0$	$36$

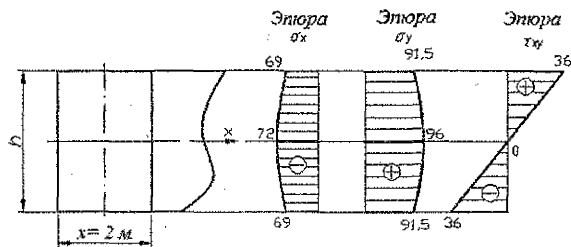


Рисунок 28 – Эпюры напряжений в сечении  $x = 2$  м

4. Определяем внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырём граням полосы-балки. Для этого воспользуемся условиями на поверхности тела (условиями на контуре или статическими граничными условиями):

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad p_{yv} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m,$$

где  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  – проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$  внешних сил, действующих на гранях полосы-балки;  $v_n$  – внешняя нормаль к грани;  $l = \cos(x, v_n)$ ,  $m = \cos(y, v_n)$  – направляющие косинусы нормали.

Верхняя грань:  $y = \frac{h}{2} = 0,5$  м;

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot 0,5^2 = -18x^2 + 3,$$

$$\sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot 0,5^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot 0,5 = 18x.$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, y) = 1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

Для сил, нормальных  $p_{yv}$  и касательных  $p_{xv}$ , строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 6$  м.

Таблица 3 – Расчет нормальных и касательных сил для верхней грани

	0	3 м	6 м
$p_{xv}$	0	54	108
$p_{yv}$	-4,5	211,5	859,5

Нижняя грань:  $y = -\frac{h}{2} = -0,5$  м;

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot (-0,5)^2 = -18x^2 + 3,$$

$$\sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot (-0,5)^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot (-0,5) = -18x,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, y) = -1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot (-1) = -\sigma_y = -24x^2 + 4,5.$$

Для сил, нормальных  $p_{yv}$  и касательных  $p_{xv}$ , строим их эпюры, изменяя  $x$  от 0 до  $l = 6$  м.

Таблица 4 – Расчет нормальных и касательных сил для нижней грани.

	0	3 м	6 м
$p_{xv}$	0	54	108
$p_{yv}$	4,5	-211,5	-859,5

Левая грань:  $x = 0$ ;

$$\sigma_x = 12y^2,$$

$$\sigma_y = -18y^2,$$

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -x) = -1;$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = -12y^2,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy} = 0.$$

Для сил, нормальных  $p_{xv}$  и касательных  $p_{yv}$ , строим их эпюры, изменяя  $y$  от  $-\frac{h}{2} = -0,5$  м до  $\frac{h}{2} = 0,5$  м.

Таблица 5 – Расчет нормальных и касательных сил для левой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
$p_{xy}$	-3	0	3
$p_{yy}$	0	0	0

Правая грань:  $x = l = 6$  м;

$$\sigma_x = -18 \cdot 6^2 + 12y^2 = -648 + 12y^2,$$

$$\sigma_y = 24 \cdot 6^2 - 18y^2 = 864 - 18y^2,$$

$$\tau_{xy} = 36 \cdot 6 \cdot y = 216y,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, x) = 1;$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, x) = 0;$$

$$p_{xy} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 = \sigma_x = -648 + 12y^2,$$

$$p_{yy} = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{xy} = 216y.$$

Для сил, нормальных  $p_{xy}$  и касательных  $p_{yy}$ , строим их эпюры, изменяя  $y$

от  $-\frac{h}{2} = -0,5$  м до  $\frac{h}{2} = 0,5$  м (таблица 6).

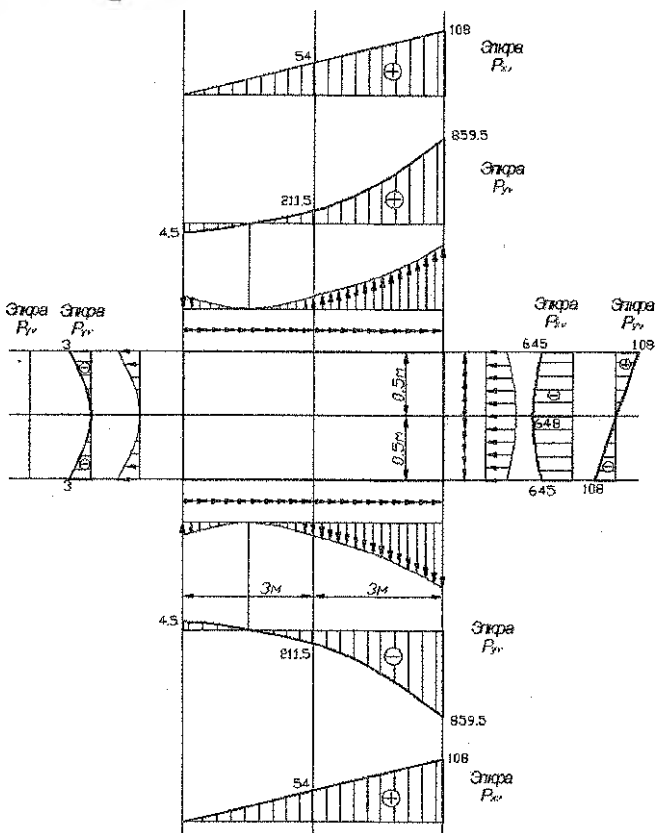


Рисунок 29 – Эпюры нормальных и касательных сил на гранях



Таблица 6 – Расчет нормальных и касательных сил для правой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
$\rho_{xy}$	-645	-648	-645
$\rho_{yy}$	-108	0	108

Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рисунке 29.

#### Пример 4

Дана прямоугольная изгибаемая пластина.

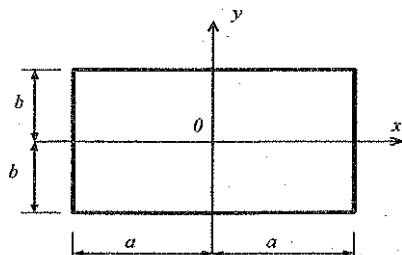


Рисунок 30 – Схема пластины

Требуется:

1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ ;

2) проверить, удовлетворяет ли функция  $w(x, y)$  уравнению Софи Жермен  $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$ , и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS$ . Из этих уравнений определить постоянную  $C$  и вы-

числить максимальный прогиб  $W_{max}$ ;

3) по формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составить их выражения;

4) построить эпюры внутренних сил  $M_x, Q_y, M_{xy}$  в сечении  $y=2$  м.

Дано:  $q = q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)$ ,  $w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)$ ,  $a=3$  м,

$b=3$  м,  $y=2$  м,  $v=0,3$ .

Решение:

1. Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ .

При  $x = \pm a$ ,  $w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = 0$ ,

$y = \pm b$ ,  
 $w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = 0$ .

Следовательно, пластинка опирается по всем четырем краям. Определим тип опирания. Углы поворота:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

при  $x = \pm a$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi(\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \neq 0,$$

$y = \pm b$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \sin\left(\frac{3\pi(\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot b \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \neq 0.$$

Значит, пластинка не закреплена. Проверим шарнирное опирание. Условие шарнирного опирания:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$D = \frac{EK^3}{12(1-\nu^2)} \text{ -- цилиндрическая жесткость при изгибе.}$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\begin{aligned} M_x &= -D \cdot \left[ -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left( -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] = \\ &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= -D \cdot \left[ -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left( -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] = \\ &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\text{тогда при } x = \pm a, \quad M_x = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] = 0,$$

$$y = \pm b: \quad M_y = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] = 0.$$

Итак, пластинка шарнирно оперта по всем четырем краям (рисунок 31).

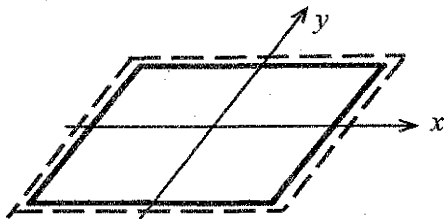


Рисунок 31 – Схема закрепления пластинки

2. Определим постоянный коэффициент  $C$ , используя основное дифференциальное уравнение изогнутой поверхности (уравнение Софи Жермен) (24):

Находим производные:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right).$$

Подставляем производные в бигармоническое уравнение:

$$C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + 2 \cdot C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) +$$

$$+ C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = \frac{q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)}{D},$$

$$C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \pi^4 \left[ \left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right] = \frac{q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)}{D},$$

$$C = \frac{q_0}{D \pi^4 \left[ \left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right]} = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot \pi^4 \left[ \left(\frac{1}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^4 \right]}.$$

Подставляем числовые значения:

$$C = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot 3,14^4 \left[ \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 + 2 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 \right]} = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

Находим максимальный прогиб при  $x=0, y=0$ :

$$w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2b}\right) = C \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

3. По формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составим их выражения.

Изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} M_x &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] = \\ &= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] = \\ &= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \\ M_y &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] = \\ &= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[ \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] = \\ &= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right). \end{aligned}$$

Крутящие моменты:

$$\begin{aligned} M_{xy} = M_{yx} &= -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D \cdot (1 - 0,3) \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = \\ &= -0,14 q_0 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right). \end{aligned}$$

Поперечные силы:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= -D \left[ C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^3 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \right] = \\
 &= -DC \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^3 + \left( \frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^2 \right] = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right] = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \\
 &= -D \left[ C \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right)^3 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left( \frac{3\pi}{2a} \right)^2 \cdot \left( \frac{3\pi}{2b} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \right] = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left[ \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left( \frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right] = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

4. Строим эпюры внутренних сил  $M_y, Q_y, M_{yx}$  в сечении  $y=2$  м.

$$M_y = 0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \cos \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right),$$

$$M_{yx} = -0,14q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,14q_0 \cdot \sin \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin(\pi) = 0,$$

$$Q_y = 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left( \frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = 0,21q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin(\pi) = 0.$$

$$\text{При } x = \pm a = \pm 3 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi(\pm a)}{2} \right) = 0,$$

$$\text{при } x = \pm 0,5a = \pm 1,5 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi(\pm 0,5a)}{2} \right) = 0,185q_0,$$

$$\text{при } x = 0 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos(0) = -0,261q_0.$$

По полученным данным строим эпюру  $M_v$  (рисунок 32).

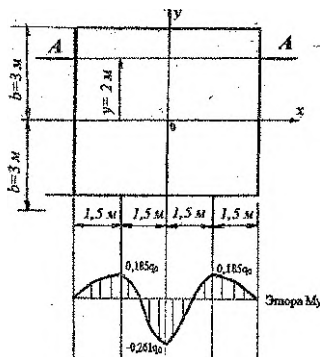


Рисунок 32 – Эпюра  $M_v$  в сечении А–А при  $y=2$  м

### Пример 5

Кольцевая пластина (рисунок 33) жестко защемлена по наружному контуру и нагружена радиальными изгибающими моментами  $m$ , равномерно распределенными по внутреннему контуру.

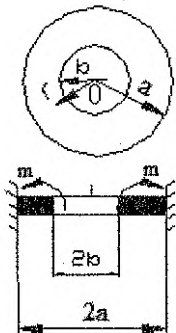


Рисунок 33 – Схема кольцевой пластины

Требуется:

- 1) проверить граничные условия;
- 2) определить постоянную  $C$ ;
- 3) составить выражения для внутренних сил;
- 4) в диаметральной сечении построить эпюры  $M_r, M_\theta$ .

Дано:  $w = C \left( 2\ell n \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$ ,  $a=8$  м,  $b=4$  м,

$\nu = 0,3$ .

Решение:

1. Проверка граничных условий. Прогиб и угол поворота в радиальном направлении при  $r=a$  должны быть равны нулю:

при  $r = a$ , прогиб  $w = 0$ , угол поворота  $\alpha_r = \frac{dw}{dr} = 0$ , в нашем случае:

при  $r = a$ :  $w(a) = C \left( 2\ell n \frac{a}{a} + \frac{a^2 - a^2}{a^2} \right) = 0$ ;

$\alpha_r(r) = C \left( 2 \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2r}{a^2} \right) = 2C \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right)$ ; при  $r = a$ :  $\alpha_r(a) = 2C \left( \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2} \right) = 0$ .

Граничные условия жесткого защемления выполняются.

## 2. Определение постоянной С.

Для этого используем условие: при  $r = b$ ,  $M_r = m$ . Находим производные:

$$\frac{d^2w}{dr^2} = 2C \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$\frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \nu \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right) = 2C \nu \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_r = -2CD \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = 2CD \frac{a^2(1-\nu) + r^2(1+\nu)}{a^2 r^2}.$$

при  $r = b$ :

$$m = 2CD \frac{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)}{a^2 b^2}; \text{ откуда } C = \frac{m a^2 b^2}{2D [a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]}.$$

**Примечание.** В некоторых случаях для определения постоянной С можно использовать дифференциальное уравнение (25).

## 3. Находим выражения для $M_r, M_\theta$ по формулам (26):

$$M_r = \frac{m b^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[ (1+\nu) + (1-\nu) \frac{a^2}{r^2} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \quad \nu \frac{d^2w}{dr^2} = 2C \nu \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_\theta = -2CD \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{a^2} \right) = \frac{m b^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} \left[ (1+\nu) + (-1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

## 4. Строим эпюры $M_r, M_\theta$ (рисунок 34). Вычислим:

$$\frac{b^2}{[a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)]} = \frac{4^2}{8^2(1-0,3) + 4^2(1+0,3)} = 0,244,$$

$$M_r = 0,244m \left( 1,3 + \frac{44,8}{r^2} \right);$$

$$M_\theta = 0,244m \left( 1,3 - \frac{44,8}{r^2} \right).$$

Находим значения изгибающих моментов:

при  $r = 4$  м,  $M_r = m$ ;  $M_\theta = -0,366m$ ;

при  $r = 6$  м,  $M_r = 0,621m$ ;  $M_\theta = 0,014m$ ;

при  $r = 8$  м,  $M_r = 0,488m$ ;  $M_\theta = 0,146m$ .

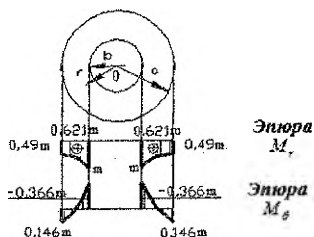


Рисунок 34 – Эпюры изгибающих моментов  $M_r, M_\theta$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ) РАБОТЫ

Задание для выполнения контрольной работы студентам-заочникам выдается преподавателем во время экзаменационной сессии, на которой проводится аттестация по дисциплине. Студенты дневной формы обучения получают задание на практических занятиях.

### ЗАДАЧА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  определяются по таблице 7. Требуется:

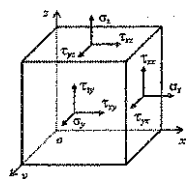


Рисунок 35

- 1) нанести исходные компоненты тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки;
- 2) разложить тензор напряжений на шаровой и девиатор и показать их на гранях элементарного параллелепипеда;
- 3) вычислить компоненты тензора деформаций в заданных осях, построить тензор деформаций;
- 4) определить объемную деформацию, интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;
- 5) приняв в исходном тензоре напряжений  $\sigma_z=0$ ,  $\tau_{xz}=0$ ,  $\tau_{yz}=0$ , вычислить величины главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , а также максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$ .

Числовые данные для выполнения задачи следует выбирать из таблицы 7 согласно пяти последним цифрам индивидуального шифра и первым пяти буквам русского алфавита.

Например, записав шифр и под каждой цифрой его буквы:

шифр — 1 0 1 7 2 3

буква — а б в г д,

выбирают из указанной таблицы число, которое находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Причем, вначале берется буква, а затем по ней определяется цифра.

**ПРИМЕР.** Шифр — 101723. В таблице 7 по горизонтали в последней строке первая буква "а". На пересечении этого столбца со строчкой, соответствующей цифре шифра, т. е. цифре 0, находится  $\sigma_x = -60$  МПа. Затем по следующей букве "б" и соответствующей цифре шифра 1, пересечении столбца "б" и строки "1", получаем величину " $\sigma_y$ " и т. д.



Таблица 7 – Числовые данные к задаче 1

№ строки	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\sigma_z$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа	$\tau_{yz}$ , МПа	$\tau_{zx}$ , МПа	E, ГПа	$\nu$
1	10	-40	60	20	-10	30	130	0,32
2	-80	20	-50	30	40	-10	150	0,25
3	50	20	-40	-10	10	20	120	0,22
4	20	30	-40	10	-60	10	200	0,32
5	40	-50	20	-20	80	-60	100	0,35
6	20	-10	-30	-50	-30	70	70	0,33
7	-40	50	50	-30	10	-90	60	0,25
8	-90	80	-60	40	-70	-40	70	0,3
9	-30	-70	70	-40	-20	-50	80	0,27
0	-60	-50	-80	-50	40	-30	110	0,36
	г	д	в	г	д	а	в	г

### ЗАДАЧА 2. РАСЧЕТ БАЛКИ-СТЕНКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для заданной схемы балки-стенки требуется:

- 1) определить значения функции напряжений  $\phi$  во всех узлах предварительно нанесенной сетки (3x3) методом конечных разностей;
- 2) подсчитать напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в узловых точках сетки и построить эпюры этих напряжений в одном из вертикальных сечений;
- 3) сравнить полученное решение с решением сопротивления материалов и выполнить анализ результатов сравнения.

Схема закрепления балки-стенки приведена на рисунке 36. Схемы загрузки балки-стенки (рисунок 37) следует принимать по двум последним цифрам шифра. Во всех вариантах принять  $P' = 0$ . Числовые данные для выполнения задачи следует выбирать из таблицы 8 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение в условии задачи 1).

Таблица 8 – Числовые данные к задаче 2

№ строки	$l$ (м)	$h$ (м)	$a$ (м)	$b$ (м)	$d$ (м)	$q$ (Кн/м <sup>2</sup> )	$P$ (Кн/м)
1	9	6	0	0	0	10	80
2	12	6	1/6	1/2	1	50	160
3	12	9	1/3	1/3	2	25	100
4	15	9	1/2	1/6	3	45	140
5	15	12	0	1/6	4	65	100
6	18	9	1/6	1/3	4	40	120
7	18	12	1/3	1/2	3	35	110
8	18	15	1/2	0	2	50	80
9	21	12	0	0	1	40	120
0	21	18	1/3	1/3	0	25	70
	д		г	б	г	в	а

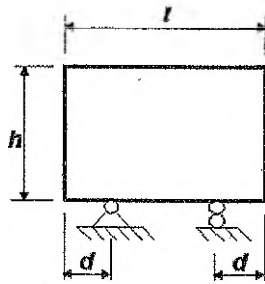


Рисунок 36 – Схема закрепления балки-стенки

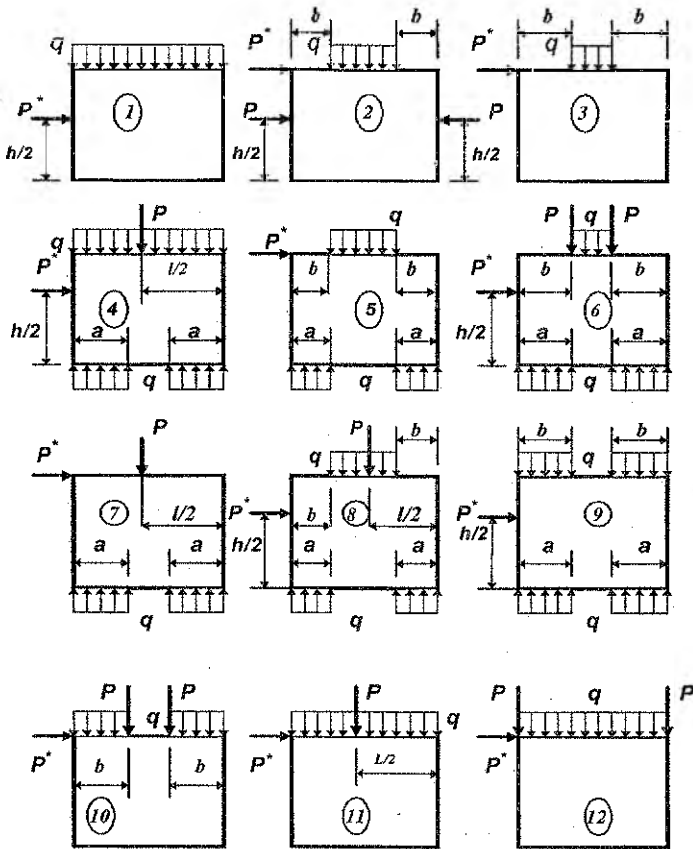
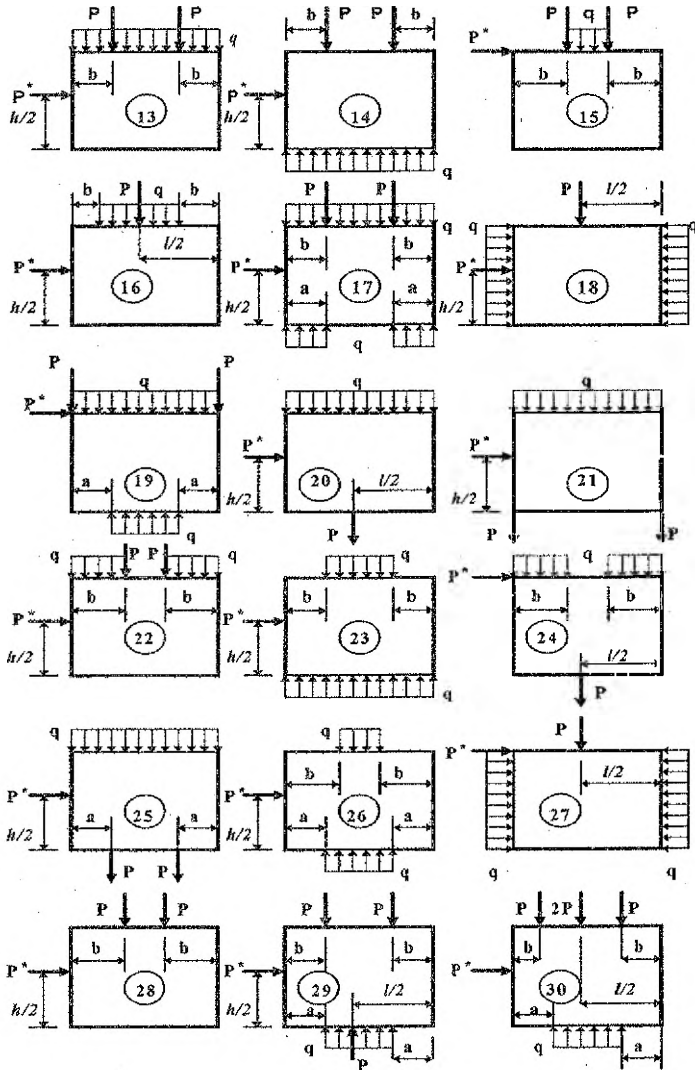


Рисунок 37 – Схемы загрузки балки-стенки



### ЗАДАЧА 3. РАСЧЕТ ПОЛОСЫ-БАЛКИ

Дана прямоугольная полоса-балка длиной  $l$ , высотой  $h$  и толщиной, равной 1. Начало координат  $O$  принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси  $Oy$  и  $Oz$ . Продольная ось  $Ox$  проходит по середине полоса-балки. Объемными силами пренебречь.

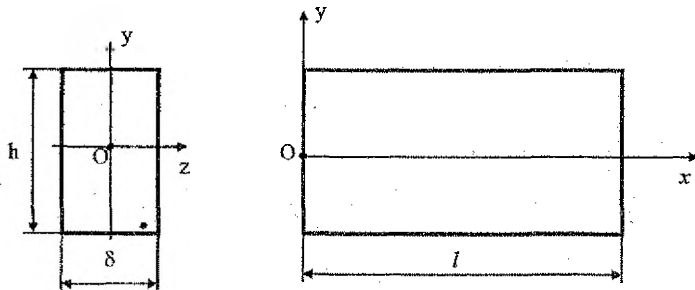


Рисунок 38 – Схема полосы - балки

Требуется:

- 1) проверить, можно ли предложенную функцию  $\varphi(x,y)$  принять для решения плоской задачи теории упругости;
- 2) найти выражения для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ;
- 3) построить эпюры напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для одного сечения: либо перпендикулярного оси  $x$ , либо перпендикулярного оси  $y$ ;
- 4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Числовые данные для решения задачи следует выбирать из таблицы 9 согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (пояснение приведено в условии задачи 1).

Таблица 9 – Исходные данные к расчету полосы-балки

№ строки	Функция напряжений $\varphi(x,y)$	$a$	$b$	$l$	$h$	$x$	$y$
		м					
1	$\varphi = a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$\varphi = axy^3 + b(x^2y^2 - x^4/3)$	1	2	6	1	2	0,3
5	$\varphi = ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	2	2	0,5
6	$\varphi = a(x^4 - y^4) + by^2 + by^2(x^2 - y^2/3)$	2	2	4	2	1	0,5
7	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	2	1	4	2	1	0,5
8	$\varphi = \frac{a}{12}(x^4 - y^4) + \frac{1}{3}xy(bx^2 + y^2)$	2	1	6	1	3	0,3
9	$\varphi = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}by^4$	1	2	5	1	2	0,2
0	$\varphi = \frac{1}{3}axy^3 + \frac{1}{2}bx^2y^2 - \frac{1}{6}bx^4$	2	1	5	2	2	0,4
	д	д	г	в	д	б	а

### ЗАДАЧА 4. РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Номер варианта выбирается в соответствии с суммой 3-х последних цифр шифра.

*Варианты 1–15. Расчет прямоугольной пластины.*

Дана прямоугольная изгибаемая пластина (рисунок 39).

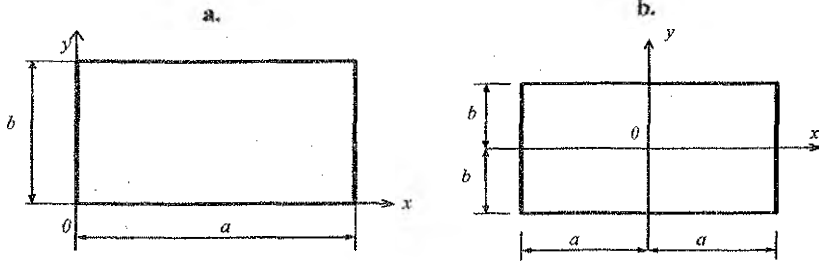


Рисунок 39 – Схема пластины

Требуется:

1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов  $w(x, y)$ ;

2) проверить, удовлетворяет ли функция  $w(x, y)$  уравнению Софи Жермен  $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$ , и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS. \text{ Из этих уравнений определить постоянную } C \text{ и вычислить максимальный прогиб } W_{max};$$

3) по формулам для  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  составить их выражения;

4) построить эпюры внутренних сил в одном из сечений: сечение  $x$  – эпюры  $M_x, Q_x, M_{yx}$ ; сечение  $y$  – эпюры  $M_y, Q_y, M_{xy}$ .

Функции для прогиба и нагрузки взять из таблицы 10, а числовые значения – из таблицы 11. Числовые данные по таблице 11 выбираются согласно пяти последним цифрам шифра и первым пяти буквам русского алфавита (см. пример в условии задачи 1).

Таблица 10 – Числовые данные к расчету прямоугольных пластин

Сумма трех последних цифр шифра	Вид пластины по рисунку 39. Выражения для нагрузки $q(x, y)$ и прогиба $W(x, y)$ . $D, C$ и $q_0$ – постоянные величины
1	2
0	Рисунок 39, а $q = const; W = C(x - a)^2(y - b)^2$
1	Рисунок 39, а $q = const; W = Cxy(x - a)(y - b)$

Продолжение таблицы 10

1	2
2	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
3	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
4	Рисунок 39, а $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
5	Рисунок 39, б $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
6	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$
7	Рисунок 39, б $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
8	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
9	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y - b)^2$
10	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x - a)^2(y^2 - b^2)$
11	Рисунок 39, б $q = const; W = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$
12	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
13	Рисунок 39 б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$
14	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
15	Рисунок 39, б $q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; W = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$

Таблица 11 – Числовые данные к задаче 4

№	М					ν
	a	b	h	x	y	
1	2	3	4	5	6	7
1	4	3	0,1	3	2	0,35
2	5	3	0,1	2	2	0,30
1	2	3	4	5	6	7
3	3	6	0,1	1	1	0,25
4	4	4	0,2	2	3	0,25
5	5	3	0,1	3	1	0,30
6	3	5	0,1	1	3	0,30
7	6	3	0,2	2	2	0,35
8	5	5	0,2	2	2	0,35
9	5	4	0,2	3	1	0,30
0	4	5	0,2	2	3	0,30
	д	г	б	а	д	в

**Варианты 16–27. Расчет круглой или кольцевой пластины.**

Дана круглая сплошная или кольцевая пластина. Для данной схемы закрепления требуется:

- 1) проверить граничные условия;
- 2) определить постоянную  $C$ ;
- 3) составить выражения для внутренних сил;
- 4) в диаметральной сечении построить эпюры  $M_r, M_\theta$ .

Функцию прогибов взять из таблицы 12, а числовые значения – из таблицы 13.

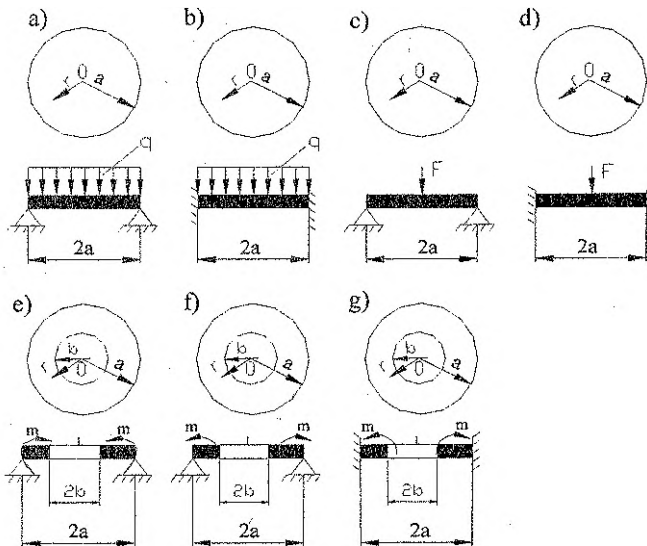


Рисунок 40 – Схемы круглых и кольцевых пластин

Таблица 12 – Выражения для нагрузки и прогибов

Сумма трех последних цифр шифра	Вид пластины по рисунку 40. Выражения для нагрузки и прогиба $W(r)$ . $D$ и $C$ – постоянные величины.
16	Рисунок 40, а; $q = const$ ; $W = C(a^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$
17	Рисунок 40, б; $q = const$ ; $W = C(a^2 - r^2)^2$
18	Рисунок 40, в; $W = C \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]$
19	Рисунок 40, д; $W = C \left( r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2} \right)$
20	Рисунок 40, е; $W = C \left[ \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right]$
21	Рисунок 40, ф; $W = C \left[ \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \ln \frac{r}{a} \right]$
22	Рисунок 40, г; $W = C \left( 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$
23	Рисунок 40, а; $q = const$ ; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
24	Рисунок 40, б; $q = const$ ; $W = C_3 + C_4 r^2 + \frac{q}{64D} r^4$
25	Рисунок 40, д; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
26	Рисунок 40, е; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$
27	Рисунок 40, г; $W = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2$

**Примечания:**

1. Радиальные моменты  $m$  равномерно распределены по внутреннему или наружному контуру. Нагрузка  $q$  равномерно распределена по площади пластины.

2. В вариантах 18 и 19 постоянную  $C$  можно определить из равенства:

$$-D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} \right) = -\frac{F}{2\pi a}$$

3. В варианте 20 постоянную  $C$  можно определить из равенства: при  $r = a, M_r = m$ ; в вариантах 21, 22 – из условия: при  $r = b, M_r = m$ .

4. В варианте 23 постоянные  $C_3, C_4$  находим из условий: при  $r = a, W = 0, M_r = 0$ ; в варианте 24; при  $r = a, W = 0, dW/dr = 0$ .

5. Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из условий:

вариант 25: при  $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$ ; при  $r = a, W = 0; M_r = m$ ;

вариант 26: при  $r = b, M_r = m$ ; при  $r = a, W = 0; M_r = 0$ ;

вариант 27: при  $r = b, Q_r = 0; M_r = 0$ ; при  $r = a, W = 0; dW/dr = 0$ .



Таблица 13 – Числовые данные к расчету круглой или кольцевой пластины

№ строки	м			v
	а	б	в	
1	5	3	0,1	0,25
2	5	2	0,1	0,27
3	4	2	0,2	0,4
4	5	3	0,2	0,3
5	4	3	0,2	0,33
6	6	4	0,1	0,29
7	4	3	0,1	0,35
8	5	3	0,2	0,4
9	5	2	0,1	0,36
0	6	2	0,2	0,32
	г	д	в	б

## ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968.
2. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Высшая школа, 1979.
3. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990.
4. Рочняк, О.А. Основы теории упругости / О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвисевич. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2001.
5. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М., 1984.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

*Веремейчик Андрей Иванович*  
*Черноиван Николай Вячеславович*  
*Хвисевич Виталий Михайлович*

## **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к практическим занятиям**

**по теории упругости и пластичности**

**для студентов специальности**

**1-70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство»  
всех форм обучения**

Ответственный за выпуск: Веремейчик А.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано в печать 04.05.2017 г. Формат 60x84  $\frac{1}{16}$ . Бумага «Performer».  
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,49. Уч. изд. л. 3,75. Заказ № 417. Тираж 140 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.