- модификация указанного подхода с упрощенным анализом списков и возможностью отката к предыдущим тактам моделирования при возникновении конфликтов;

- распараллеливание процессов обработки отдельных событий – параллельное выполнение соответствующих им независимых базовых активностей.

Таким образом, в работе рассмотрены проблемы, связанные с оценкой трудоемкости имитационных моделей и ее снижения за счет применения инструментов распараллеливания на примере стохастических сетевых моделей. Предложены алгоритмы распараллеливания. Приведены результаты мониторинга трудоемкости моделей и их составляющих.

Список цитированных источников

1. Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я.Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2005. – 343 с.
2. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: КОРОНА, 2004. – 320 с.
3. Майоров, С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, Т.И. Алиев. – М.: Высшая школа, 1978. – 320 с.
4. Максимей, И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 232 с.
5. Рыщук, А.С. Трудоемкость имитационного моделирования стохастических сетей: сб. конкурсных науч. работ студентов и магистрантов. – Брест: БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 92-94.
6. Муравьев, Г.Л. К оценке трудоемкости имитационных моделей / А.Н. Рыщук, Г.Л. Муравьев // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях (СИТОНИ-2012): материалы 3-й Междунар. НТК студентов и молодых ученых. – Донецк: ДонНТУ, 2012. – С. 340-344.
7. Труб, И.И. Объектно-ориентированное моделирование на С++. – СПб.: Питер, 2006. – 411 с.

УДК 681.3.06

Сухоцкий Р.П.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Лебедь С.Ф.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

В работе рассмотрено понятие производящей функции и ее приложения.

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется сумма степенного ряда $f_a(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Приложения производящей функции.

- **Комбинаторика.**

Постановка задачи о расстановке черных и белых шаров. Сколькими различными способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно *n*?

Решение. В этой задаче есть один параметр – число шаров *n*. Решением считается формула, позволяющая получить ответ для любого заданного *n* (в данном случае $n \geq 0$). Этот ответ будем обозначать символом a_n.

Обозначим белый шар символом – ○, а чёрный – ●. Нулевое количество шаров будем обозначать – о. Получим решение для небольшого значения параметра. Например: n = 2 : ○○, ○●,●○,●● $\Rightarrow a_2$=4; n =1 : ○, ● $\Rightarrow a_1$ =2. Единственный способ не располагать в линию ничего – это **ничего не делать**, причём ничего не делать **можно одним способом.**

В случае *n* = *3* можно взять самый левый шар белым и **закончить комбинацию** ○... **четырьмя способами**, а можно взять его чёрным, **закончив комбинацию** ●... **также**

четырьмя способами. Значит, $a_3 = 2a_2$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $a_n = 2a_{n-1}$ (для $n \geq 1$), это означает, что $a_n = 2^n$.

Решим данную задачу с помощью производящей функции. Для этого «просуммируем» все возможные комбинации (включая пустую) следующим образом: А=ø+○+●+○○+●○+ +○●+●●+○○○+○○●+○●○+○●●+...

Проведя с «рядом» *А* ряд арифметических манипуляций, получим А = øø−○−●, т.е.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} (\circ + \bullet)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \circ^k \bullet^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k t^n .$$

Так как в нашей задаче неважно, какой шар на каком месте стоит, важно, что их общее количество равно *n*, то можно заменить оба символа ○ и ● одной буквой *t*. Значит,

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k = 2^n .$$

- **Теория вероятностей.**

1. Постановка задачи. Вероятность перегорания первой, второй, третьей и четвертой ламп равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,2; двух ламп – 0,4; трех – 0,6; четырех – 0,8. Определить вероятность выхода прибора из строя.

Решение. Традиционно такого рода задачи решаются при помощи формулы полной вероятности. Применение понятия производящей функции существенно сокращает вычисления. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с событиями с двумя исходами (бросание монеты, устройство работает или нет, и т.д.): $q+p=1$. Для *n* независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли) производящей функцией будет $f(t) = (q + pt)^n$.

По условию задачи имеем: $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $q_1 = 0.9$; $q_2 = 0.8$; $q_3 = 0.7$; $q_4 = 0.6$. Тогда производящая функция равна:

$$f(t) = 0.3024 + 0.4404t + 0.2144\, t^2 + 0.0404\, t^3 + 0.0024\, t^4 ,$$

где коэффициенты при t^k – вероятности отказа *k*-й лампы. Применяя формулу полной вероятности, находим вероятность выхода прибора из строя:

$P = 0.4404 \cdot 0.2 + 0.2144 \cdot 0.4 + 0.0404\; 0.6 + 0.0024 \cdot 0.8 = 0.2.$

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Нахождение числовых характеристик ДСВ с целыми неотрицательными значениями удобно производить с помощью производящих функций.

Пусть задан ряд распределения ДСВ *X*.

X_i	0	1	2	...	k	...
p_i	p_0	p_1	p_2	...	p_k	...

Производящей функцией для ДСВ*X* называется функция вида:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k ,$$

где *t* – произвольный параметр, $0 < t \leq 1$, p_k – вероятности закона распределения ДСВ *X*.

Дифференцируя по *t* производящую функцию и положив в ней $t = 1$, получим: $f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M(X)$, то есть математическое ожидание $M(X) = f'(1)$.

Рассуждая аналогично, получим, что дисперсия ДСВ X вычисляется по формуле: $D(X)=f''(1)+f'(1)-(f'(1))^2$.

Постановка задачи. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Ряд распределения СВ X:

X_i	0	1	2	3
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Решение. Составим производящую функцию для нашей СВ X:

$f(t)=0.1+0.2t+0.3t^2+0.4t^3$, тогда:

$M(X)=f'(1)=2$ и $D(X)=f''(1)+f'(1)-(f'(1))^2=1$.

- **Применение производящей функции для нахождения суммы ряда.**

Постановка задачи. Найти сумму ряда: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Решение. Введем в рассмотрение четыре числовых последовательности $a_k=1$, $b_k=ka_k$, $c_k=kb_k$ и $d_k=\sum_{i=1}^{k} i^2$, а также их производящие функции $f_a(t)$, $f_b(t)$, $f_c(t)$, $f_d(t)$.

Искомой суммой будет число d_k – общий член последовательности $\{d_k\}$. Для его определения надо найти $f_d(t)$.

$$f_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot t^k=\frac{1}{1-t},\ f_a'(t)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot a_k\cdot t^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\cdot t^{k-1},\ tf_a'(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\cdot t^k=f_b(t).$$

Аналогично получим: $f_c(t)=t\cdot f_b'(t)=t(t\cdot f_a'(t))'=t\cdot f_f'(t)+t^2\cdot f_a''(t)$.

Утверждение. Если $a_n=\sum_{i=0}^{n} b_i,\ n=0,1,2,\ldots$, то $f_a(t)=\frac{1}{1-t}f_b(t)$.

Тогда $f_d(t)=\frac{1}{1-t}f_c(t)$. Т.к. $f_a(t)=\frac{1}{1-t}$ разложим полученное выражение в ряд:

$f_d(t)=\frac{1}{1-t}\left(tf_a'(t)+t^2f_a''(t)\right)=\frac{t(1+t)}{(1-t)^4}$. Т.к. $\frac{1}{(1-t)^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k}\cdot t^k$, то $\frac{1}{(1-t)^4}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k}\cdot t^k$.

Следовательно,

$$f_d(t)=\frac{t(1+t)}{(1-t)^4}=t\cdot\frac{1}{(1-t)^4}+t^2\cdot\frac{1}{(1-t)^4}=t\cdot\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k}\cdot t^k+t^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k}\cdot t^k=\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k}\cdot t^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^{k}\cdot t^{k+2}.$$

Откуда

$$d_k=C_{k+2}^{k-1}+C_{k+1}^{k-2}=C_{k+2}^{3}+C_{k+1}^{3}=\frac{(k+2)!}{(k-1)!\cdot 3!}+\frac{(k+1)!}{(k-2)!\cdot 3!}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Значит, $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Список цитированных источников

1. Шапорев, С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.