бол. Гипербола по определению – это геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная. Согласно теории интерференции, минимум интенсивности соответствует точкам, в которые волны приходят с разностью хода $\Delta d = (2k + 1)\cdot\lambda/2$; $k = 0,1,2,3...$ Геометрические места таких точек на плоскости представляют собой семейство гипербол, в фокусах которых расположены излучатели.

Таблица 4 – Расстояние между ветвями гиперболы

k	Средняя разность расстояний, (Δr), см		
0	9 - 7,2 = 1,8;	11 - 9 = 2;	16 - 14 = 2
1	12 - 6 = 6;	15 - 9 = 6;	20 - 14 = 6
2	24 - 14 = 10;	19 - 9 = 10;	14 - 4 = 10
3	23 - 9 = 14;	19 - 5 = 14;	17 - 3 = 14

Вывод: при переходе от одной линии ко второй и т. д. разность расстояний увеличивается *2:6:10:14...* т.е. *1:3:5:7...* Экспериментальные данные совпадают с теоретическими, если положить $\Delta r = \lambda/2$. (см. таблицу 3)

Список цитированных источников

1. Александров, Н.В. Курс общей физики. Механика / Н.В. Александров, А.Я. Яшкин. – Москва: Просвещение, 1978.
2. Бутиков, Е.И. Физика для углубленного изучения / Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. – Москва-Санкт-Петербург: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
3. Уоккер, Дж. Физический фейерверк. – М.: Мир, 1979.
4. Квант: журнал. – 1978. – № 8.
5. Квант: журнал. – 1976. – № 5.
6. Брэгг, Уильям. Мир света. Мир звука. – М.: Наука, 1967.
7. Шахмаев, Н.М. Физика: ч. II. – М.: Высшая школа, 1977. – Ч. 2.

УДК 517.8

Липовцев А.П.

Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., к.ф.-м.н., доцент Каримова Т.И.

О МОМЕНТАХ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Биномиальное распределение (распределение Бернулли) – распределение вероятностей случайной величины *X*, принимающей целочисленные значения $k = 0,1,2,\ldots,n$ с вероятностями соответственно

$$P(X = k) = p_k(n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, $0 \le p \le 1$ – параметр биномиального распределения ($q = 1 - p$), называемый вероятностью положительного исхода.

Ряд распределения:

X	0	1	2	...	k	...	$n-2$	$n-1$	n
p_k	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^{n-2} p^{n-2} q^2$	$np^{n-1}q$	p^n

Начальным моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$.

Заметим, что $\alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$,

$$\alpha_1 = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k q^{n-1-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$ – **математическое ожидание.**

Начальным факториальным моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\ldots$) случайной величины X называется $\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X-1)\ldots(X-n+1)\right)$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Найдем начальный факториальный момент 2-го порядка биномиального распределения:

$$\alpha_{[2]} = M\left(X^{[2]}\right) = M\left(X(X-1)\right) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} p^k q^{n-2-k} = n(n-1)p^2.$$

Найдем начальные факториальные моменты m-го порядка биномиального распределения:

$$\alpha_{[m]} = M\left(X^{[m]}\right) = M\left(X(X-1)\ldots(X-m+1)\right) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ldots(k-m+1)C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} k(k-1)\ldots(k-m+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=m}^{n} n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= n^{[m]}\sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} p^k q^{n-k} = n^{[m]}p^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} p^{k-m} q^{n-k} = n^{[m]}p^m (p+q)^{n-m} = n^{[m]}p^m.$$

Тогда для *начальных факториальных моментов* m-го порядка биномиального распределения выполняется $\alpha_{[m]} = n^{[m]}p^m$. Следовательно:

$\alpha_{[1]} = n^{[1]}p = np$, $\quad \alpha_{[2]} = n^{[2]}p^2 = n(n-1)p^2$, $\quad \alpha_{[3]} = n^{[3]}p^3 = n(n-1)(n-2)p^3$,

$\alpha_{[4]} = n^{[4]}p^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$, $\alpha_{[5]} = n^{[5]}p^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)p^5, \ldots$

Учитывая, что начальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\alpha_{[m]},$$

где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода, найдем некоторые начальные моменты:

$\alpha_1 = \alpha_{[1]} = np$ – математическое ожидание,

$\alpha_2 = \alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n-1)p^2 + np$,

$\alpha_3 = \alpha_{[3]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,

$\alpha_4 = \alpha_{[4]} + 6\alpha_{[3]} + 7\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} =$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np$.

Центральным моментом n-го порядка случайной величины X называется $\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$. Центральные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right) = M\left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m .$$

Найдем некоторые центральные моменты n-го порядка:

$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(-p+1)$;

$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np -$

$-3\left(n(n-1)p^2 + np\right)np + 2(np)^3 = 2np^3 - 3np^2 + np = np\left(2p^2 - 3p + 1\right)$;

$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np -$

$-4\left(n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np\right)np + 6\left(n(n-1)p^2 + np\right)(np)^2 - 3(np)^4 =$

$= \left(3n^2 - 6n\right)\left(p^4 - 2p^3 + p^2\right) - np^2 + np$.

Коэффициент асимметрии $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{npq(q-p)}{\left(\sqrt{npq}\right)^3} = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$.

Биномиальный закон распределения имеет положительную (отрицательную) асимметрию, если $q - p = 1 - 2p > 0$ $(1 - 2p < 0)$ или $p > 0{,}5$ $(p < 0{,}5)$.

Эксцесса коэффициент (эксцесс – скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения)

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3n(n-2)p^2q^2 + npq}{(npq)^2} - 3 = \frac{3n^2 p^2q^2 - 6np^2q^2 + npq}{(npq)^2} - 3 =$$

$$= \frac{-6pq+1}{npq} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{npq} = \frac{6\left(p - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\left(p - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)}{npq}.$$

$$E'(p) = \left(\frac{6p^2 - 6p + 1}{np(1-p)}\right)' = \frac{1}{n}\left(-6 + \frac{1}{p(1-p)}\right)' = \frac{1}{n}\left(-6 + \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)' = \frac{2p-1}{np^2(1-p)^2}.$$

Эксцесса коэффициент $E < 0$, если $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} < p < \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ и $E > 0$, если $0 < p < \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ или $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6} < p < 1$.

Мода распределения $M_0(X) = k_0$, если $p_{k_0}(n,p) \geq p_{k_0-1}(n,p)$ и $p_{k_0}(n,p) \geq p_{k_0+1}(n,p)$.

Неравенство $p_{k_0}(n,p) \geq p_{k_0-1}(n,p)$ выполняется, если $C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq C_n^{k_0-1} p^{k_0-1} q^{n-(k_0-1)}$ или $\dfrac{n!\,p^{k_0}q^{n-k_0}}{k_0!(n-k_0)!} \geq \dfrac{n!\,p^{k_0-1}q^{n-k_0+1}}{(k_0-1)!(n-k_0+1)!}$, т.е., когда $(n - k_0 + 1)p \geq k_0 q$ или $np + p \geq k_0$.

Неравенство $p_{k_0}(n,p) \leq p_{k_0-1}(n,p)$ выполняется, если

$$C_n^{k_0} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq C_n^{k_0+1} p^{k_0+1} q^{n-(k_0+1)} \text{ или } \frac{n!\,p^{k_0}q^{n-k_0}}{k_0!(n-k_0)!} \geq \frac{n!\,p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!},$$

т.е., когда $(k_0 + 1)q \geq (n - k_0)p$ или $k_0 \geq np - q$.

Следовательно, для моды $M_0(X)=k_0$ выполняется неравенство $np-q\le k_0\le np+p$ или, когда k_0 принадлежит отрезку $[np-q;np+p]$, который имеет длину, равную $(np+p)-(np-q)=p+q=1$.

Таким образом, если $(np+p)\notin N$, то распределение имеет моду $M_0(X)=[np+p]$, где $[np+p]$ – целая часть числа $(np+p)$, и распределение является **унимодальным**.

Если же $(np+p)\in N$, то распределение имеет две моды $M_0(X)=np+p-1=$ $=np-q$ и $M_0(X)=np+p$, и распределение является **бимодальным**.

Заметим, что распределение является бимодальным, если $np+p=m\in N$ или когда $p=\dfrac{m}{n+1}$, где $m\in N$ и $m<n+1$.

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 831 с.

УДК 519.853.3

Мокин А.А., Бруцкий В.Р.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Ракецкий В.М.

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ПРЯМОГО ОПОРНОГО МЕТОДА С МЕТОДАМИ СОПРЯЖЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

1. Введение. Целью настоящей работы является экспериментальное исследование прямого опорного метода для минимизации выпуклых функций [1] и его сравнение с другими известными методами. В качестве объекта для проведения численного эксперимента рассматривается задача безусловной оптимизации

$$f(x)\to min, x\in R^n, \tag{1}$$

где $f(x)$- строго выпуклая функция, т.е. в задаче (1) всегда существует единственное решение x^* – точка минимума функции $f(x)$, которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности

$$\Delta_j(x)=\frac{d}{dx_j}f(x)=0, \quad j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Для выяснения эффективности прямого опорного метода и получения данных для анализа и сравнения в эксперименте использовались:

1) метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса [2]. Выбор этого известного метода в качестве одного из эталонов для сравнения обусловлен его алгоритмической простотой и низкой трудоемкостью итерации, что обеспечивает высокую эффективность метода на задачах невысокой размерности. Его недостатком является чувствительность к вычислительным погрешностям, что снижает его эффективность особенно для задач с большим числом переменных;

2) метод Давидона-Флетчера-Пауэлла [2]. Этот метод относится к группе квазиньютоновских методов, которые для организации итерационных вычислений используют специальную вспомогательную матрицу, в которой накапливается информация о структуре минимизируемой функции. Итерация квазиньютоновских методов отличается большей трудоёмкостью в сравнении с методом сопряженных градиентов. Однако, благодаря ис-